

HOOFDSTUK ITRILLINGEN.Deel I: ELASTICITEIT.Par. 1) Begrippen.1) Definitie veerkracht.

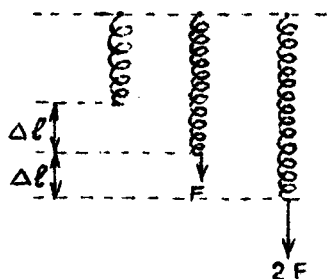
Wordt op een lichaam een kracht uitgeoefend, dan krijgt dit lichaam een vormverandering. Bij deze vormverandering treedt IN het lichaam een re-actie kracht op, die het lichaam de oorspronkelijke vorm terug wil geven.

Deze in het lichaam optredende re-actie kracht heet veerkracht of elastische kracht.

Definitie: Veerkracht is de in het lichaam optredende re-actie kracht, die het lichaam de oorspr. vorm terug wil geven.

2) De eigenschap van het lichaam, ten gevolge waarvan het lichaam zich herstelt van zijn vormverandering, heet elasticiteit.

Geef voorbeelden.

3) Schroefveer.

Conclusie: de lengte-VERMEERDERING is r.e. met de uittrekkende kracht.

In formule:  $\Delta l = \frac{F}{C}$

of  $F = C \cdot \Delta l$

C wordt bepaald door de veer zelf!

Als  $\Delta l = 1$  meter dan is  $|F| = |C|$  Newton.

C noemt men de krachtsconstante van de veer.

Definitie: De krachtsconstante is de factor, die aangeeft hoeveel Newton de uittrekkende kracht moet zijn om de veer een lengtevermeerdering te geven van 1 meter.

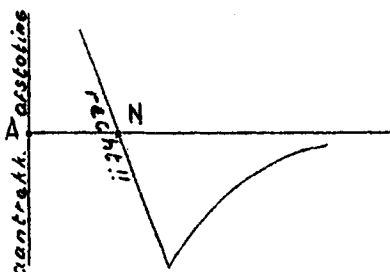
Vraag: Waarom is C een FACTOR en geen GETAL?

Antw: Was C een getal, dan had C geen dimensie. De dimensie van het rechter lid van de vergelijking  $F = C \cdot \Delta l$  was dan METER, en de dimensie van het linker lid NEWTON. Dit is onzin.

Conclusie: C is een GROOTHEID met dimensie  $\frac{N}{m}$ .

Par. 2) Elastische draden.1) Ideaal elastische draden.

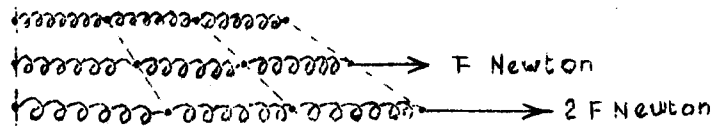
Zoals bekend is (zie: warmte Deel I par. 4) zijn de moleculen van een vaste stof t.g.v. de werking van ELECTRISCHE krachten quasi-elastisch met elkaar verbonden.



Bij wijze van idealisering nemen we aan, dat deze elektrische krachten werken als schroefveertjes, waarvan de krachtsconstante bepaald wordt door de soort van de stof.

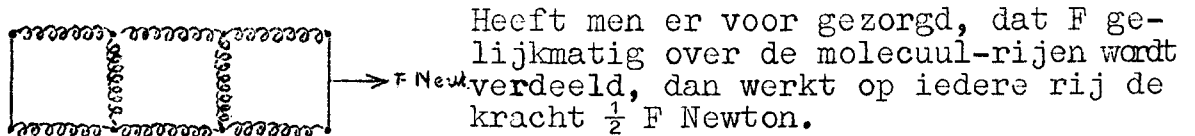
De in Warmte Deel I par. 4 behandelde grafiek krijgt dan dus nevenstaande vorm. Let op het rechte stuk.

a) We denken ons nu een ideaal elastische draad, die bestaat uit EEN enkele rij van moleculen die door volkomen gelijke schroefveertjes aan elkaar gekoppeld zijn. We vragen naar de lengtevermeerdering die zo'n draad krijgt als deze wordt uitgerekt.



- Conclusie:  $\Delta l$  is
- 1) recht evenredig met de uittrekkende kracht.
  - 2) recht evenredig met de lengte van de onbelaste draad.  $l_{onb}$ .
  - 3) afhankelijk van de soort van de stof.

b) We nemen een ideaal elastische draad, die bestaat uit b.v. twee rijen van aan elkaar gekoppelde moleculen.



- Conclusie: Wordt de uittrekkende kracht gelijkmatig over de aangrijpingsdoorsnede verdeeld, dan is  $\Delta l$
- 4) omgekeerd evenredig met het oppervlak van de (loodrechte) doorsnede van de onbelaste draad.

Opmerking: Wordt de uittrekkende kracht niet gelijkmatig over de aangrijpingsdoorsnede verdeeld, dan wordt de ene molecuulreeks meer uitgetrokken dan de andere met het gevolg, dat conclusie 4) vervalt. Bovendien zullen dan de "dwarsveertjes" een rol gaan spelen met het gevolg, dat de draad bij uitrekking dunner wordt.

Conclusie: Wordt een ideaal elastische draad, die in onbelaste toestand een lengte  $l_{onb}$  meter en een doorsnede  $O_{onb}$  m<sup>2</sup> heeft, door een kracht  $F$  Newton uitgerekt, zò dat deze kracht gelijkmatig over de aangrijpingsdoorsnede verdeeld wordt, dan is  $\Delta l =$

- 1) r.e. met  $F$
- 2) r.e. met  $l_{onb}$ .
- 3) afhankelijk van de soort van de stof.
- 4) c.e. met  $O_{onb}$ .

In formule:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_{onb}}{E \cdot O_{onb}} \text{ meter.}$$

$F$  in Newton,  $l_{onb}$  in meter,  $O_{onb}$  in m<sup>2</sup>

De factor  $E$  wordt bepaald door de soort van de stof.

$E$  heet de ELASTICITEITSMODULUS van DEZE STOF.

Definitie: De elasticiteitsmodulus is de factor die aangeeft hoe groot de uittrekkende kracht moet zijn om een draad, die in onbelaste toestand een doorsnede heeft van 1 m<sup>2</sup> tot de dubbele lengte uit te rekken.

$$\left( l_{onb} = \frac{F \cdot l_{onb}}{E \cdot 1} \longrightarrow |E| = |F| \right)$$

Opmerking: zie blz. 3

Opmerking: a) De dimensie van E is:

$$[E] = \left[ \frac{F \cdot l_{\text{onb}}}{\Delta l \cdot O_{\text{onb}}} \right] = \frac{N \times m}{m \times m^2} = \frac{N}{m^2}$$

- b) Hoe groter de elasticiteitsmodulus van een stof is, des te sterker zal deze stof zich verzetten tegen vormveranderingen en des te sterker zal deze stof er naar streven om haar oorspronkelijke vorm terug te krijgen.  
Daarom noemt men een stof met een grote E elastischer dan een stof met een kleine E.
- c) E hangt niet af van  $l_{\text{onb}}$ . De KRACHT die wij moeten aanwenden om een draad  $l_{\text{onb}}$  tot de dubbele lengte uit te rekken hangt dus niet af van  $l_{\text{onb}}$ .  
De ARBEID die we moeten verrichten om een draad tot de dubbele lengte uit te rekken is echter r.e. met  $l_{\text{onb}}$  (zie later:  $W = \frac{1}{2} E \cdot O_{\text{onb}} \cdot l_{\text{onb}}$  Joule)
- d) De formule  $\Delta l = \frac{F \cdot l_{\text{onb}}}{E \cdot O_{\text{onb}}}$  staat bekend als de formule van Hooke.  
(Robert Hooke. 1645 - 1703)
- e) E is een natuurconstante, die alleen bepaald wordt door het materiaal.

Vraag: Wat is fout in de volgende redenering:

$$E = \frac{F \cdot l_{\text{onb}}}{\Delta l \cdot O_{\text{onb}}}, \text{ dus } E \text{ is r.e. met } F, \text{ enz. enz. enz.}$$

Antw.: Men moet een natuurkundige vergelijking NATUURKUNDIG interpreteren.

Deze laatste vergelijking drukt uit, dat het rechter lid een natuurconstante is: Als we F groter maken, dan wordt  $\Delta l$  automatisch groter enz. (vergelijk:  $F = m \cdot a$ ;  $\frac{P \cdot V}{T} = R$  enz.)

## 2) De uitrekking van een werkelijke draad.

Proef:

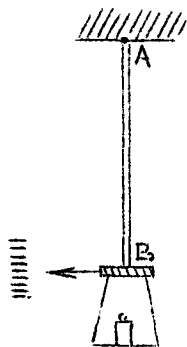


fig. I

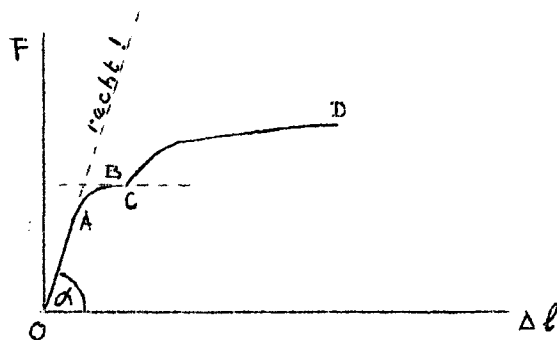


Fig. II

bij fig. I . Een homogene draad AB wordt in A onwrikbaar opgehangen. Aan het uiteinde B is een schaal zò aan de draad bevestigd, dat de rek-kracht F gelijkmatig over de aangrijpingsdoorsnede wordt verdeeld.

Het gewicht van het schaalteje met de wijzer is gelijk aan de kracht die nodig is om de draad te STREKKEN , zonder deze UIT te REKKEN.

Op de schaal plaatst men achtereenvolgens zwaardere gewichten en meet  $\Delta l$ .

bij fig. II. De grafiek brengt het resultaat van de proef in beeld. OA is recht  $\rightarrow F = (\text{tg } \alpha) \cdot \Delta l$

tg.  $\alpha$  blijkt 1) af te hangen van de soort v.d. stof  
2) r.e. te zijn met  $O_{\text{onb}}$   
3) o.e. te zijn met  $l_{\text{onb}}$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ af te hangen van de soort v.d. stof} \\ 2) \text{ r.e. te zijn met } O_{\text{onb}} \\ 3) \text{ o.e. te zijn met } l_{\text{onb}} \end{array} \right\} \text{tg. } \alpha = \frac{E O_{\text{onb}}}{l_{\text{onb}}}$$

$$\text{dus } F = \frac{E \cdot O_{\text{onb}}}{l_{\text{onb}}} \cdot \Delta l$$

of:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_{\text{onb}}}{E \cdot O_{\text{onb}}}$$

formule van Hooke

AB → De lengtevermeerdering wijkt af van de formule van Hooke.

BC → De draad "vloeit uit". De draad krijgt een "plastische" lengtevermeerdering. Zou men in C de belasting wegnemen dan bleef de draad ongeveer deze grotere lengte behouden.

CD → De draad krijgt een inkeping op haar zwakste plek.

D → De draad staat op het punt te breken.

Conclusie: Zolang de belasting kleiner blijft dan een bepaald be- drag neemt de lengtevermeerdering van een draad bij stij- gende belasting toe volgens de formule van Hooke:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_{\text{onb}}}{E \cdot O_{\text{onb}}}$$

Opmerking: a) Uit bovenstaande grafiek blijkt, dat de draad, die voor de uitrekingsproef gebruikt wordt, geen "vöörge schiedenis" mag hebben!

b) In het algemeen zal een draad bij uitrekking (ook voor zover deze de wet van Hooke volgt) dunner worden. Dit hangt samen met de ordering der corpuscula.



Let er dus op, dat in de formu- le  $O_{\text{onbelast}}$  staat.

c) Men kan bewijzen, dat bij uitrekking het soortelijk gewicht van de draad kleiner wordt!

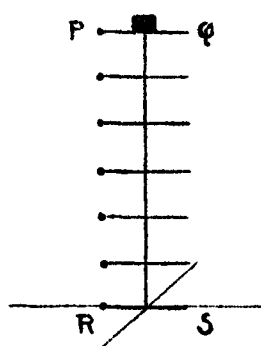
### Par. 3) De regel (of wet) van Hooke.

Andere vormveranderingen waarbij elastische krachten optreden zijn: Samendrukking, doorbuiging en wringing (torsie)

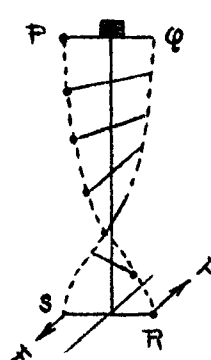
Bij deze vormveranderingen geldt de door Robert Hooke gevonden regel:

||| DE VORMVERANDERING VAN EEN ELASTISCH LICHAAM IS (mits de vorm- veranderende kracht niet te groot is) RECHTEVENREDIG MET DE VORM VERANDERENDE KRACHT.

### Par. 4) Nadere beschouwing van de torsie.



draad niet  
getordeerd



draad getordeerd  
RS gedraaid over  $180^\circ$

← torsie-hoek  $0^\circ$   
 $30^\circ$   
 $60^\circ$   
← torsie-hoek  $90^\circ$   
 $120^\circ$   
 $150^\circ$   
← torsie-hoek  $180^\circ$

De ervaring leert:

- I Iedere doorsnede van de draad krijgt een draaiing.  
De torsie hoeken zijn r.e. met de afstanden tot het vaste uiteinde.
- II Maakt men  $F$  2x zo groot, dan worden alle torsiehoeken twee maal zo groot.
- III  $F$  hetzelfde, maar  $RS$  twee maal zo lang, dan ook alle torsie hoeken 2 x zo groot.

Conclusie: De torsiehoek  $\alpha_{RS}$  is recht evenredig met het MOMENT VAN HET TORSIEKOPPEL.

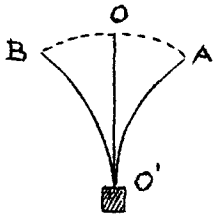
In formule:

$$\alpha_{RS} = C M_{\text{koppel}}$$

$M$  is het moment van het torsiekoppel =  $F \times RS$

Opmerking: Deze stelling zullen we nodig hebben bij de behandeling van de DRAAISPOEL-GALVANOMETER.

-----

Deel II HARMONISCHE TRILLINGEN.Par. 1) Inleiding: Het begrip trilling.1) Proef:

Een naald wordt in  $O'$  vastgeklemd. Men brengt haar in de stand  $O'A$ . In deze toestand treden er in de naald elastische krachten op die haar terug willen brengen in de vorm  $O'O$ . Laat men nu A los, dan krijgt A een naar O toegerichte versnelde beweging (met afnemende versnelling). In de vorm  $O'O$  zijn de elastische krachten weer nul, maar hebben de bewogen onderdelen van de naald een naar links gericht arbeidsvermogen van beweging, met het gevolg, dat de naald naar links doorbuigt. Bij deze doorbuiging treden er in de naald naar rechts gerichte elastische krachten op. Het uiteinde van de naald beweegt dus vertraagd naar links (met toenemende vertraging) tot het A.v.B. is uitgeput. Daarna worden de bewogende delen van de naald t.g.v. de elastische krachten weer naar rechts gedreven, enz. enz.

Conclusie: Tengevolge van de IN de naald optredende ELASTISCHE KRACHTEN voert de naald een PERIODIEKE heen en weergaande beweging uit om de stand  $OO'$ .

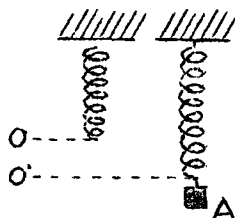
Zo'n periodieke beweging om een evenwichtsstand noemt men een TRILLING.

Definitie: EEN TRILLING IS EEN PERIODIEKE BEWEGING OM EEN EVEN - WICHTS-STAND.

Opmerking a) Het specifieke van een trilling is dus dat de beweging  
I PERIODIEK is

II Om een evenwichtsstand plaats heeft.

b) In bovenstaand voorbeeld hebben we te doen met een PERIODIEKE omzetting van AvP in AvB en omgekeerd.

2) Proef.

Een lichaam A (gewicht  $mg$  Newton) hangt aan een schroefveer. De veer is in rust.

Op A werken dus twee krachten:

I de zwaartekracht  $\downarrow = mg$  Newton.

II de veerkracht  $\uparrow = C \cdot OO'$  Newton.

Omdat er evenwicht is moet  $mg = C \cdot OO'$

Nu trekken we A een klein stukje naar beneden en laten A dan los.

Gevraagd: a) Bereken, dat A een trilling gaat uitvoeren.  
(NB. Bevindt A zich onder  $O'$  dan overheerst de veerkracht  $\uparrow$ , bevindt A zich boven  $O'$  dan overheerst de zwaartekracht  $\downarrow$ )

N.B.  $\rightarrow$  b) Wat valt er te zeggen van de RESULTERENDE kracht, die op ieder ogenblik op A werkt?

Antwoord:

$$F_t^{\text{res}} = + C \cdot OA - mg$$

$$\text{maar } mg = \text{veerkracht in } O' = C \cdot OO'$$

$$\text{dus: } F_t^{\text{res}} = + C \cdot OA - C \cdot OO'$$

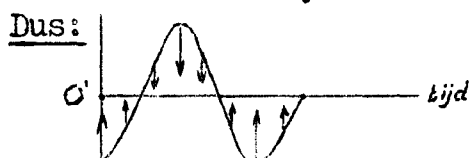
$$= C(OA - OO')$$

$$= C \cdot O'A$$

Concl: Als A trilt is de RESULTERENDE kracht:

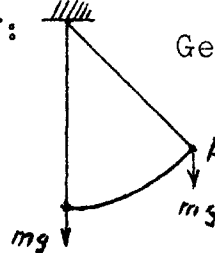
1) altijd naar  $O'$  toe gericht.

2) r.e. met de afstand  $O'A$ .



Nevenstaande figuur geeft de grafiek van  $O'A$  als functie van de tijd. De pijlen geven de grootte en richting van  $F_t^{\text{res}}$  op de verschillende ogen-

- Opmerking: a) De veerkracht is dus de oorzaak van de trilling.  
 b) Bij deze trilling heeft een periodieke omzetting plaats van AvP (t.o.v. O') in AvB en omgekeerd.

3) Proef:  Gevraagd: Verklaar, dat A een periodieke slingerbeweging gaat uitvoeren.

Opm: a) Hier is dus de zwaartekracht oorzaak van de periodieke beweging.  
 b) Ook hier AvP  $\rightleftharpoons$  AvB.

Par. 2) De Harmonische trilling.

1) De definitie:

N.B.

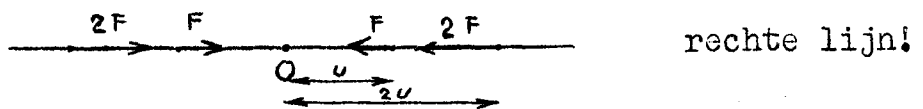
Een trilling in het algemeen is een periodieke beweging om een evenwichtsstand.

We gaan nu een bijzondere trilling bestuderen: de harmonische trilling.

Definitie: Een massapunt voert een harmonische trilling uit als het een heen en weergaande beweging uitvoert LANGS EEN RECHTE LIJN o.i. van een kracht die:

- 1<sup>e</sup> steeds naar èèn punt gericht is en
- 2<sup>e</sup> r.e.ismet de uitwijking uit dat punt.

Dus:

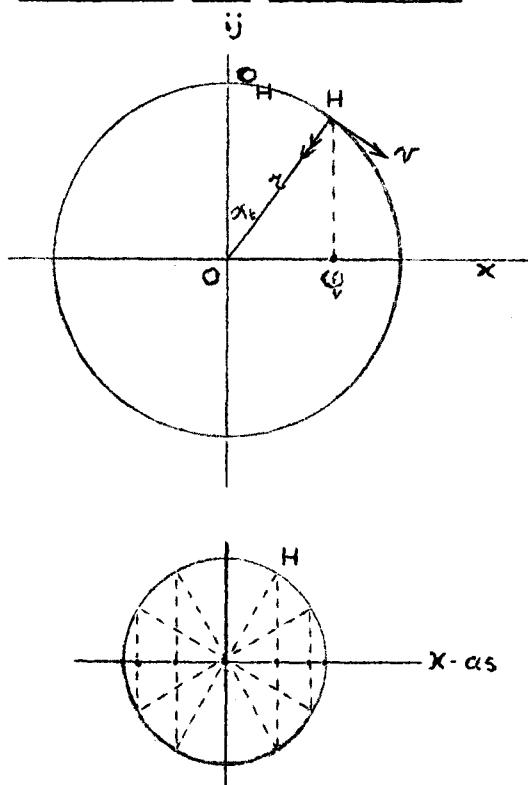


dus:

$$F_t = - C U_t$$

- Opmerking: a) Het - teken geeft aan, dat F altijd naar O toegerecht is, want  $\begin{cases} u + \rightarrow F - \\ u - \rightarrow F + \end{cases}$   
 b) De trilling van proef 2 (par.1) is dus een harmonische trilling.

N.B. 2) Probleem uit mechanica.



Probleem:

Een wiskundig punt H doorloopt de omtrek van een cirkel eenparig.  
 Omlooptijd T sec.

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r \text{ m/sec.}$$

$$w = \frac{2\pi}{T} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\alpha_t = \frac{2\pi}{T} \cdot t \text{ rad.}$$

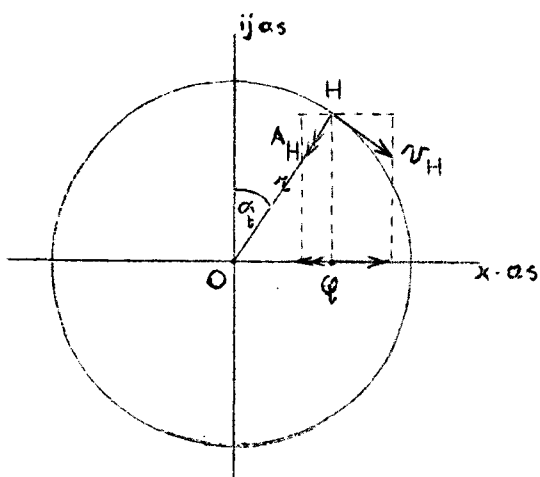
We beschouwen nu een massapunt Q (m kg\*) dat beweegt LANGS DE X-AS, zò dat Q zich op ieder ogenblik bevindt in de projectie van H op de x-as.

Q voert in ieder geval een trilling uit langs de x-as.

We gaan deze trilling bestuderen.

Gevraagd: zie blz. 8.

Gevraagd: De baancoördinaat, de snelheid en de versnelling van Q als functie van de tijd.



$$x_t^Q = r \sin. \frac{2\pi'}{T} t \text{ meter.}$$

$$v_t^Q = \frac{2\pi'}{T} r \cos. \frac{2\pi'}{T} t \text{ m/sec.}$$

Omdat de baan recht is, vinden we de versnelling van Q door de snelheidsfunctie te differentiëren, dus:

$$A_t^Q = - \frac{4\pi'^2}{T^2} r \sin \frac{2\pi'}{T} t \text{ m/sec}^2$$

Opmerkingen:

$$a) v_t^Q = \frac{2\pi'}{T} r \cos. \frac{2\pi'}{T} t = v_H \cos. \frac{2\pi'}{T} t = v_H \cos. \alpha_t$$

$v_t^Q$  is dus gelijk aan de ALGEBR. PROJECTIE OP DE X-as VAN  $v_H$  OP DIT OGENBLIK.

$$b) A_t^Q = - \frac{4\pi'^2}{T^2} r \cdot \sin \frac{2\pi'}{T} t = - \frac{4\pi'^2 r^2}{T^2} \sin \frac{2\pi'}{T} t =$$

$$= - \frac{v_H^2}{r} \sin \frac{2\pi'}{T} t = - A_H \sin. \alpha_t$$

$A_t^Q$  is dus gelijk aan de ALGEBR. PROJECTIE OP DE X-as VAN  $A_H$  OP DIT OGENBLIK.

Gevraagd: Wat is het bijzondere van de versnelling van Q op ieder ogenblik?

Antwoord:  $A_t^Q = - \frac{4\pi'^2}{T^2} r \sin. \frac{2\pi'}{T} t = - \frac{4\pi'^2}{T^2} \cdot (r \sin. \frac{2\pi'}{T} t) = - \frac{4\pi'^2}{T^2} \cdot x_t^Q$

dus:

$$A_t^Q = - \frac{4\pi'^2}{T^2} \cdot x_t^Q$$

Conclusie: De versnelling van het punt Q is dus op ieder ogenblik:

- ||| 1<sup>e</sup>) steeds naar het punt O toe gericht.
- ||| 2<sup>e</sup>) recht evenredig met de uitwijking uit O.

Gevraagd: Wat valt er te zeggen van de KRACHT, die op Q moet werken?

Antwoord:

$$F = m \cdot A$$

dus:  $F_t = - \frac{4\pi'^2}{T^2} \cdot m \cdot x_t^Q$  Newton.

Conclusie: Q beweegt langs de X-as onder invloed van een VERANDERLIJKE KRACHT, die:

- 1<sup>e</sup>) steeds naar het punt O toe gericht is,
- 2<sup>e</sup>) recht evenredig is met de uitwijking uit O.

||| m.a.w. HET MASSA PUNT Q VOERT EEN HARMONISCHE TRILLING UIT LANGS DE X-AS MET O TOT OORSPRONG.



3) Nadere beschouwing.

I Het punt Q, dat zich op ieder ogenblik in de projectie van H op de X - as bevindt, beweegt langs de x-as volgens de bewegingsvergelijking:

$$X_t^Q = r \sin. \frac{2\pi}{T} t$$

Uit het bovenstaande blijkt, dat deze periodieke beweging een harmonische trilling is.

||| Conclusie: Beweegt een massapunt langs een rechte lijn zò dat de baancoörd. t.o.v. een punt O van deze lijn een enkelvoudige sinusfunctie is van de tijd, dan voert dit massapunt een harmonische trilling uit om dat punt O.

II Het omgekeerde is ook waar. Als een massapunt een harmonische trilling uitvoert, beweegt het onder invloed van een veranderlijke kracht, met vergelijking:

$$F_t = -C \cdot X_t$$



Maar  $F_t = m \cdot A_t = m \cdot \frac{d^2 X}{dt^2}$

$$\text{Dus: } m \frac{d^2 X}{dt^2} = -CX$$

$$\text{of } m \frac{d^2 X}{dt^2} + CX = 0$$

Zo'n vergelijking noemt men een differentiaalvergelijking. De hogere wiskunde leert hoe men X uit deze vergelijking kan vinden als functie van de tijd.

Deze functie is:

$$X_t = r \sin. \frac{2\pi}{T} t \quad \text{waarbij } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$$

Contrôle:

$$X_t = r \sin. \frac{2\pi}{T} t \rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{2\pi}{T} r \cos. \frac{2\pi}{T} t \rightarrow \frac{d^2 X}{dt^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} r \sin. \frac{2\pi}{T} t$$

dus:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = - \frac{4\pi^2 m}{T^2} r \sin. \frac{2\pi}{T} t$$

$$C \cdot X = C r \sin. \frac{2\pi}{T} t$$

---


$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + C \cdot X = \left( - \frac{4\pi^2 m}{T^2} + C \right) r \sin. \frac{2\pi}{T} t \quad \text{als nu } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}, \text{ dan volgt}$$

$$= \left( - \frac{4\pi^2 m}{\frac{4\pi^2 m}{C}} + C \right) r \sin. \frac{2\pi}{T} t$$

$$= (-C + C) r \sin. \frac{2\pi}{T} t = 0 \quad \text{klopt!}$$

Opmerking: a) De hogere wiskunde bewijst bovendien, dat deze differentiaal vergelijking geen andere oplossing kan hebben.

b) De grootte van r doet met betrekking tot  $F_t = -CX_t$  blijkbaar niets ter zake!

Conclusie: Als een massapunt een harmonische trilling uitvoert, is de uitwijking een enkelvoudige sinusfunctie van de tijd.

III zie blz. 10

III Uit I en II volgt:

Een massapunt voert DAN en SLECHTS DAN een harmonische trilling uit, als de uitwijking een enkelvoudige sinusfunctie is van de tijd.

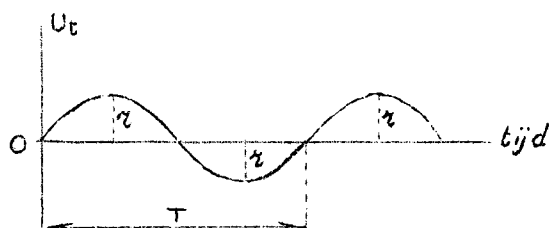
Notatie: De uitwijking uit de evenwichtsstand wordt aangegeven door  $U_t^Q$ .

N.B. → De formule voor de harmonische trilling luidt dus:

$$U_t^Q = r \sin \frac{2\pi}{T} t \text{ meter.}$$

Hierin is  $r$  de maximale uitwijking  
en  $T$  de trillingstijd. Dit is de duur van  
een volledige trilling.

N.B. → De grafiek van de uitwijking als functie van de tijd:



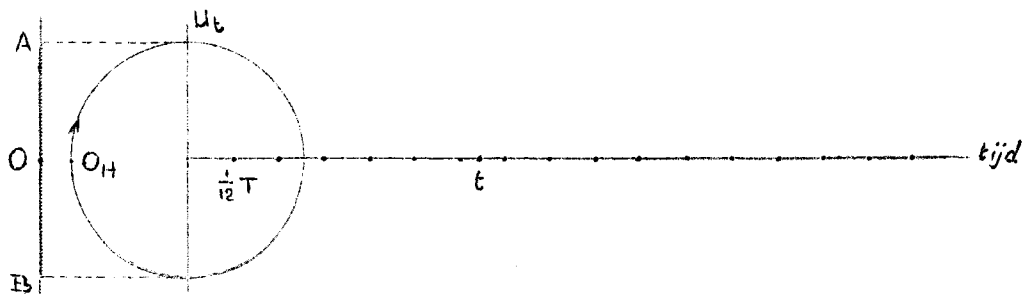
N.B. DEZE SINUSFUNCTIE IS HET CRITERIUM VAN DE HARMONISCHE TRILLING.

Opgave: Bewijs door een proef, dat de trilling van een STEMVORK in de eerste benadering een harmonische trilling is.

IV Als een massapunt een harmonische trilling uitvoert, kan men deze beweging WISKUNDIG beschrijven als de PROJECTIE van een eenparige cirkelvormige beweging op de drager van de trilling. Het punt, dat de eenparige  $\odot$  uitvoert noemt men het HULPPUNT H.

N.B. De UITWIJING van  $Q$  is de PROJECTIE van de VOERSTRAAL op dit ogenblik.  
De SNELHEID van  $Q$  is de projectie van de SNELHEID van H op dit ogenblik.  
De VERSNELLING van  $Q$  is de projectie van de VERSNELLING van H op dit ogenblik.

Opgave:

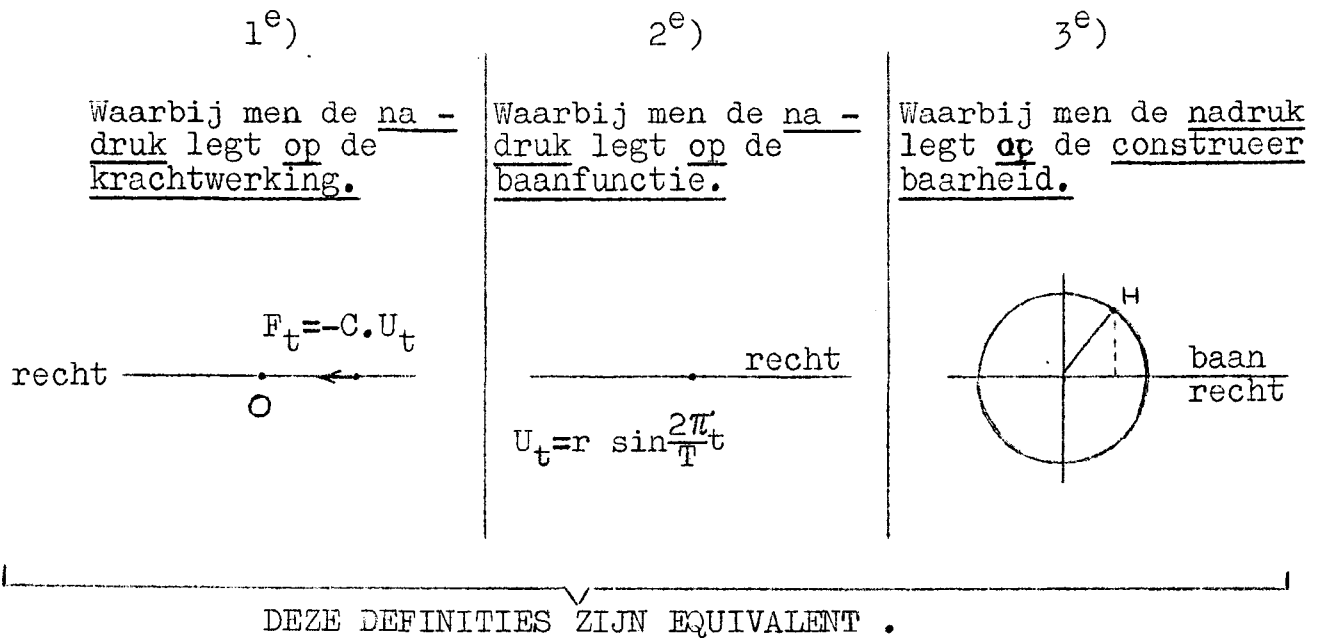


- Gevraagd:
- 1) Construeer de grafiek van de uitwijking als functie van de tijd.
  - 2) Leid uit deze grafiek af, dat het massapunt de oorsprong steeds met dezelfde snelheid passeert. Bepaal deze snelheid.
  - 3) Hoe groot is de snelheid van het hulppunt.
  - 4) Construeer de versnelling van het hulppunt.
  - 5) Construeer de snelheid en de versnelling van  $Q$  op het willekeurig aangewezen ogenblik  $t$ .

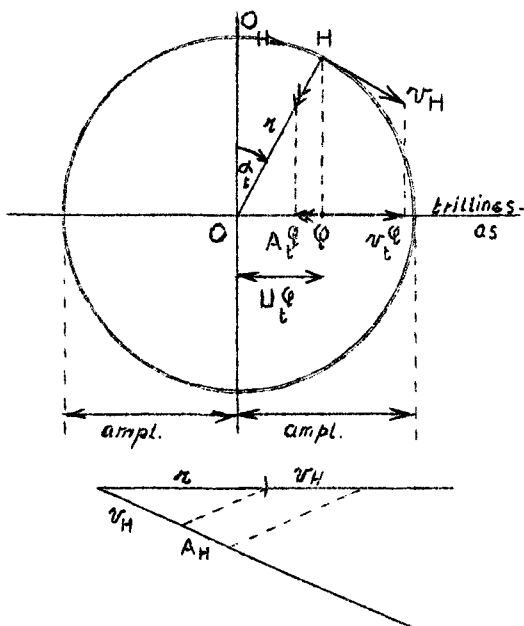
V Men kan de harmonische trilling dus op DRIE MANIEREN definiëren.

zie blz. 11

V Men kan de harmonische trilling dus op DRIE MANIEREN definiëren:



4) Begrippen en definities.



I De UITWIJKING OP EEN BEPAALD OGENBLIK is de baancoördinaat op dat ogenblik = OQ

II De FASE OP EEN BEPAALD OGENBLIK  
 Onder de fase (Gr.-Lat. phasis = verschijning) verstaat men de waarde van een grootheid, die het STADIUM aangeeft, waarin een PERIODIEKE beweging op een bepaald ogenblik verkeert.

Uit de constructie blijkt, dat het STADIUM van het massapunt Q op een bepaald ogenblik ( $U_t^Q, V_t^Q, A_t^Q$ ) vast staat als de plaats van het hulp-punt H op dat ogenblik gegeven is.

Onder de Fase op een bepaald ogenblik verstaat men dus de waarde van de grootheid, die de plaats van het hulp-punt op de hulpcirkel op dat ogenblik bepaalt.

De fase wordt in de praktijk verschillend gedefiniëerd:

a) Als een hoek, gemeten in radialen: De FASE op een bepaald ogenblik is de hoek, die de voerstraal van het hulp-punt op dat ogenblik maakt met de nul-stand (O-OH), gemeten in de richting van de beweging van het hulp-punt.

b.v. fase  $\frac{\pi}{6}$  rad,  $\pi$  rad,  $\frac{5}{8} \pi$  rad,  $2 \pi$  rad.

b) Als een hoek, gemeten in graden: b.v.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ,$

c) Als  $\phi = \frac{t}{T}$

De FASE op een bepaald ogenblik is het GEDEELTE VAN DE TRILLINGSTIJD, dat op het beschouwde ogenblik verstreken is, sinds het hulp-punt zijn nul-punt (OH) passeerde.

b.v.  $\phi = \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, 1.$

Opmerking: De definities a, b en c zijn equivalent.

III De AMPLITUDO. (=rikkwijdte, armslag)

Onder de AMPLITUDO verstaat men de MAXIMALE uitwijking van het harmonisch trillende punt (= straal van de hulpcircel.)

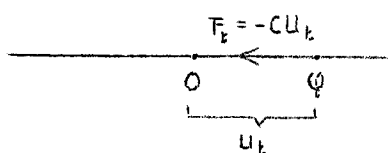
IV De TRILLINGSTIJD. Dit is de duur van èèn volledige trilling (= de omlooptijd van het hulppunt.)

V De FREQUENTIE. Dit is het AANTAL TRILLINGEN PER SECONDE. De frequentie wordt aangegeven door de letter  $f$ .

Dus:

$$f = \frac{1}{T} \text{ Hertz}$$

N.B. 5) De formule van de trillingstijd van een harmonisch trillend punt.



Een massapunt voert dan en slechts dan een harmonische trilling uit, als het langs een rechte lijn beweegt volgens de bewegingsvergelijking:

$$U_t = r \sin \frac{2\pi}{T} t \text{ meter.}$$

Door twee maal te differentiëren vinden we:

$$A_t = - \frac{4\pi^2}{T^2} r \sin \frac{2\pi}{T} t = - \frac{4\pi^2}{T^2} U_t \text{ m/sec}^2$$

Op ieder ogenblik werkt dus op het massapunt een kracht, die volgens  $F = m \cdot a$  gelijk is aan:

$$F_t = - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot U_t \text{ Newton.}$$

Volgens de definitie van de harmonische trilling moet:  $F_t = - C \cdot U_t$

Hierin is  $C$  de krachtsconstante.

$$C = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

dus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \text{ sec.}$$

Opmerking: Bovenstaande afleiding is slechts "populair weten - schappelijk". De wetenschappelijke afleiding volgt uit de oplossing van de in Par. 2 punt 3, II vermelde differentiaalvergelijking.

Bij de contrôle zagen we, dat  $U_t = r \sin \frac{2\pi}{T} t$  de oplossing van de differentiaalvergelijking  $F = - C U_t$  is, MITS  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$

Conclusie: De trillingstijd van een harmonische trilling is:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \text{ sec.}$$

$T$  is de trillingstijd in seconden.  
 $m$  is de massa van het trillend punt in  $\text{kg}^*$   
 $C$  is de krachtsconstante (natuurconstante bepaald door de elastische binding van  $Q$  met  $O$ ) in  $\frac{\text{N}}{\text{m}}$

Opm.: a) De trillingstijd wordt alleen bepaald door de MASSA van het trillende punt en de KRACHTSCONSTANTE van de elastische binding met de oorsprong.

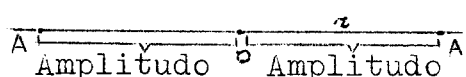
b) De trillingstijd is ONAFHANKELIJK VAN DE AMPLITUDO

c) Heeft het rechter-lid werkelijk de dimensie van seconde?

Antw:

$$\left[ \sqrt{\frac{m}{C}} \right] = \sqrt{\frac{\text{kg}^*}{\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\text{N}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}^2}}} = \sqrt{\text{sec}^2} = \text{sec.}$$

N.B. 6) De trillingsenergie van een harmonisch trillend punt.



Trilt een massapunt harmonisch, dan heeft er een voortdurende omzetting plaats van  $AvB \rightleftharpoons AvP$ .

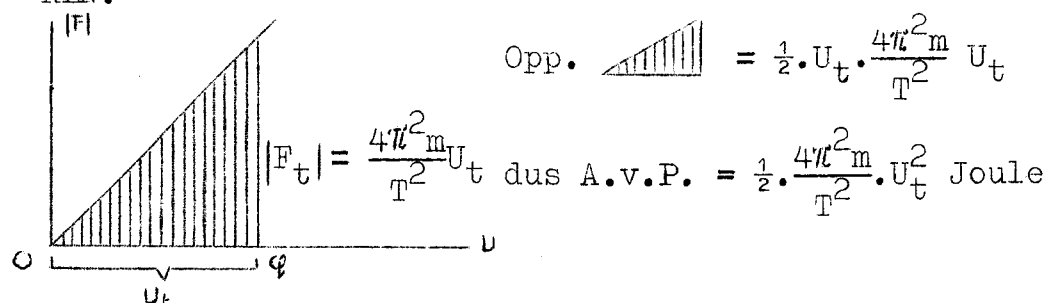
In O is het  $AvB$  maximaal en het  $AvP = 0$

In A is het  $AvB = 0$  en het  $AvP$  maximaal.

Stelling: Bij een harmonische trilling blijft de **TOTALE MECHANISCHE ENERGIE** (d.i.  $AvP + AvB$ ) **CONSTANT**. De totale mechanische energie heeft dus op ieder ogenblik dezelfde waarde.

Bewijs: A horizontal line with points A, O, and A. A force vector  $F_t$  points left from O. A displacement vector  $U_t$  points right from O.

AvP.: Het  $AvP$  bij de uitwijking  $U_t$  is de arbeid, die WIJ vanwege de veerkracht moeten verrichten, om het massapunt deze uitwijking te geven. Omdat de veerkracht r.e. is met de baancoördinaat, **DUS NIET CONSTANT IS**, moeten we deze arbeid uitrekenen **DOOR INTEGREREN**.



AvB.:  $U_t = r \sin \frac{2\pi}{T} t \rightarrow V_t = \frac{2\pi}{T} r \cos \frac{2\pi}{T} t$

dus:  $A.v.B. = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t$  Joule.

A.v.P. + A.v.B.:

$$AvP = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} U_t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t$$

$$AvB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t$$

---


$$AvP + AvB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 (\sin^2 \frac{2\pi}{T} t + \cos^2 \frac{2\pi}{T} t)$$

Dus:  $U_{\text{totaal}} = AvP + AvB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot r^2$  Joule (I)

Het rechter lid van deze vergelijking is onafhankelijk van de tijd, dus heeft het linker lid op ieder ogenblik dezelfde waarde.

Conclusie: De totale mechanische energie ( $AvP + AvB$ ) van een harmonisch trillend punt blijft tijdens de trilling constant.

We gaan formule I omwerken:

a)  $U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 \cdot m = \frac{1}{2} m V_H^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$  (II)

$V_0$  is de snelheid van het hulppunt en ook de snelheid waarmee het massapunt de oorsprong passeert.

b)

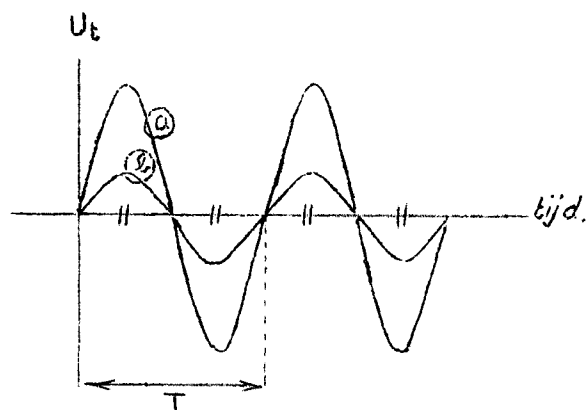
$$b) U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{4\pi^2 \frac{m}{C}} \cdot r^2 = \frac{1}{2} C \cdot r^2 \quad (\text{III})$$

Conclusie:

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 = \frac{1}{2} mV_0^2 = \frac{1}{2} C \cdot r^2 \text{ Joule.}$$

Opmerkingen:

- Uit III volgt, dat de trillingsenergie r.e. is met het KWA - DRAAT VAN DE AMPLITUDO.
- Het is opmerkelijk (III) dat de totale energie ONAFHANKELIJK is van de MASSA van het trillende punt en ONAFHANKELIJK is van de TRILLINGSTIJD.
- Bij een bepaald harmonisch trillend systeem (d.w.z. m en C bepaald) is de trillingstijd bepaald. Geven we het harmonisch trillende punt meer energie, dan BLIJFT DE TRILLINGSTIJD CONSTANT, maar wordt alleen de AMPLITUDO groter!



Ampl. van a = 3 x ampl. b

$$U_a = 9 \times U_b$$

maar:

$$T_a = T_b$$

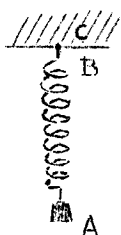
- Dat de totale mechanische energie van een harmonisch trillend punt constant blijft volgt ook uit de Wet van Helmholtz.

## 7) Demping.

HOE LANG blijft een massapunt, dat eenmaal in harmonische trilling is gebracht doortrillen?

De in punt 6) afgeleide wet van behoud van mechanische energie van een harmonisch trillend punt, laat maar èèn antwoord toe: EEUWIG!

Van de andere kant leert ons de proef met de verticaal trillende belaste schroefveer (waarvan we gezegd hebben, dat de trilling harmonisch is), dat de amplitudo geleidelijk kleiner wordt en dat de veer na een eindige tijdsduur weer tot rust komt!



Toen we de vraag beantwoordden (zie Par.1, punt 2) hoe groot de resulterende kracht is, die op ieder ogenblik op A werkt, hebben we stilzwijgend verondersteld, dat de veer in het VACUÛM was opgehangen, zodat we de wrijving met de lucht en de arbeid, die bij de trilling verricht werd om de lucht te verplaatsen, buiten beschouwing lieten. Maar al zou deze trilling in het vacuüm plaats hebben, dan zou er nog trillingsenergie, t.g.v. INWENDIGE WRIJVING tussen de delen van het bewe-

gende metaal van de veer, omgezet worden in warmte, waardoor de veer in temperatuur stijgt.

Bovendien zal in het ophangpunt B altijd trillingsenergie worden overgedragen aan het lichaam C, dat immers ook is opgebouwd uit quasi-elastisch gebonden moleculen.

Conclusie: Er zijn meerdere (bij de theorie buiten beschouwing gelaten) oorzaken aan te wijzen waardoor de ENERGIE van het trillende "massapunt" afneemt.

Welnu: Het GEHEEL van deze oorzaken noemt men de DEMPING.

Definitie: Onder de DEMPING verstaat men het GEHEEL van de oorzaken, waardoor de ENERGIE van een trilling AFNEEMT (en in een andere energievorm of andere energievormen wordt omgezet).

Vraag: Kan een trilling, waarbij demping optreedt, harmonisch zijn?

Antw.: Een harmonische trilling is een periodieke beweging langs een rechte lijn onder invloed van EEN KRACHT, die  
 1<sup>e</sup>) steeds naar een vast punt van die lijn gericht is en  
 2<sup>e</sup>) r.e. is met de uitwijking uit dat punt.

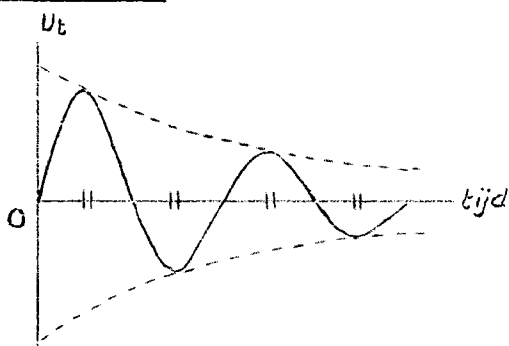
Welnu: De demping heeft altijd een energie-rovende, dus remmende werking.

Bij de uitwijking  $U_t$  zal de demping met de elastische kracht  $F_t = -CU_t$  meewerken, als de snelheid van 0 af gericht is, en de elastische kracht tegenwerken, als de snelheid naar 0 toe gericht is. De resultante van ALLE op het massapunt Q werkende krachten heeft bij dezelfde uitwijking, op de "heenweg" een andere waarde dan op de "terug weg". De resultante van ALLE op het massapunt werkende krachten kan dus onmogelijk recht evenredig zijn met de uitwijking uit de oorsprong.

Conclusie: Een gedempte trilling kan nooit harmonisch zijn.

Opgave: Teken de grafiek van de uitwijking als functie van de tijd bij een gedempte trilling, die zonder demping harmonisch zou zijn.

Oplossing:

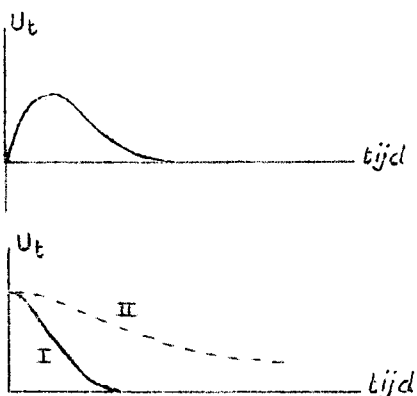


Als de demping niet willekeurig is, maar wiskundig samenhangt met de beweging van het massapunt, en niet te sterk is, zal het massapunt een trilling uitvoeren waarbij het de oorsprong met gelijke tussenpozen passeert en waarbij de amplitudo geleidelijk afneemt.

De wiskundige behandeling van de gedempte trilling ligt op universitair niveau. Voor de volledigheid vermelden we dat:

1<sup>e</sup>) DE TRILLINGSTIJD VAN DE GEDEMPTE TRILLING GROTER IS DAN DE TRILLINGSTIJD VAN DE ONGEDEMPTE TRILLING.

2<sup>e</sup>) DE TRILLINGSTIJD GROTER IS NAARMATE DE Demping STERKER IS.



Bij een bepaalde sterkte van de demping VERLIEST DE TRILLING HAAR PERIODIEK KARAKTER: De "trilling" is dan al na een "halve trilling" uitgedoofd. Deze demping noemt men de "kritische demping".

Geeft men in dit geval het massapunt een uitwijking, en laat men het dan los, dan gaat het langzaam naar zijn evenwichtsstand en blijft daar in rust. (I)

Was de demping sterker dan de kritische demping, dan zou het massapunt, nadat het werd losgelaten, naar zijn evenwichtsstand "KRUIPEN" (II) Geval I zal later ter sprake komen bij de behandeling van de DRAAISPOEL GALVANOMETER.

Vraag: Waaraan dankt de lopende geluidsgolf, die van een trillende stemvork uitgaat haar energie?

Vraag: Bij een gedempte trilling neemt de mechanische energie af. In welke vormen vindt men de verloren mechanische energie terug bij een trillende stemvork, die op een klankkast staat?

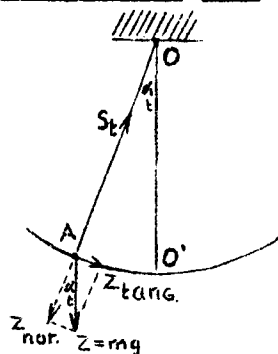
Vraag: Welke fout schuilt in de volgende redenering:

Uit  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$  blijkt, dat de trillingstijd niet afhangt van de trillingsenergie.

Welnu, de demping vermindert de trillingsenergie.

Dus heeft de demping geen invloed op de trillingstijd.

8) Toepassing van de harmonische trilling: DE MATHEMATISCHE SLINGER.



We beschouwen een massapunt A ( $m \text{ kg}^*$ ), dat opgehangen is aan een ideaal (onrekbaar - volkomen buigbaar - gewichtsloos) koord. Het koord is in O onwrikbaar aan een volkomen vast lichaam bevestigd. We brengen A aan het slingeren. Omdat het koord volkomen buigbaar is heeft de ophanging in O geen invloed op deze slingering. We beschouwen nu de situatie op een willekeurig ogenblik.

Het koord maakt dan een hoek  $\alpha_t$  met de nulstand  $OO'$

Vraag: Welke krachten werken er nu op A?

Antw.: 1<sup>o</sup>) De zwaartekracht  $Z = mg$  Newton.

2<sup>o</sup>) De spanning  $S_t$  in het koord.

Vraag: Wat valt er over de spanning  $S_t$  in het koord te zeggen?

Antw.: We ontbinden  $Z$  in twee componenten:

$Z_{\text{tang}}$ , raakt in A aan de cirkelboog.

$Z_{\text{normaal}}$ , ligt in het verlengde van OA, wil het koord uitrekken.

De spanning  $S_t$  in het koord heeft nu TWEE functies:

1<sup>o</sup>) Ze moet  $Z_{\text{normaal}}$  opheffen.

2<sup>o</sup>) Ze moet de CENTRIPETALE KRACHT leveren, die op dit ogenblik nodig is om A de cirkelbaan te doen beschrijven.

Dus:  $S_t = mg \cos \alpha + \frac{mv_t^2}{r}$  Newton

$S_t$  is maximaal in  $O'$

$S_t$  is minimaal in de uiterste punten =  $mg \cos \alpha_{\text{max}}$ .

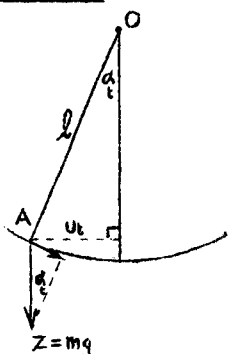
Deze spanning in het koord speelt verder geen rol meer in deze beschouwing; het gaat ons verder alleen om  $Z_{\text{tang}}$ .

Vraag: Hoe groot is  $Z_{\text{tang}}$  op het ogenblik  $t$ ?

Antw.:

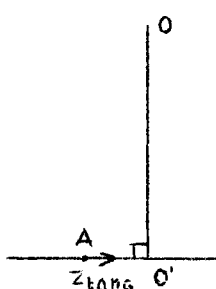
$$Z_t^{\text{tang}} = mg \sin \alpha_t = mg \cdot \frac{U_t}{l} = \frac{mg}{l} \cdot U_t$$

$$\text{dus: } Z_t^{\text{tang}} = \frac{mg}{l} \cdot U_t$$



Zou het massapunt A een rechte lijn beschrijven onder invloed van deze tangentiële kracht, dan was de beweging van A een harmonische trilling!

WE NEMEN NU AAN DAT  $\alpha_{\text{max}}$  INFINITESIMAAL KLEIN IS.



In dat geval kunnen we aannemen, dat A een rechte lijn beschrijft  $\perp OO'$ , onder invloed van een kracht, die steeds naar  $O'$  toe gericht is en r.e. is met de uitwijking uit  $O'$ . m.a.w. A voert dan een harmonische trilling uit.

Hoe groot is de krachtsconstante van deze harmonische trilling?

Antw.:  $Z_{\text{tang}} = \frac{mg}{l} \cdot U_t$  dus:  $C = \frac{mg}{l} \frac{N}{m}$



Antw.:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

17.

dus:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ sec.}$$

vraag: Welk praktisch nut heeft deze formule?

antw.: In deze formule komen drie grootheden voor: T, l en g. Zijn twee van deze grootheden bekend, dan kan men de derde grootheid berekenen.

Welnu: T kan men meten, door het aantal slingeringen in b.v. 10 minuten te tellen → aantal slingeringen per sec. =  $f \rightarrow f = \frac{1}{T} \rightarrow T$ . l kan men meten.

||| Concl: MET BEHULP VAN DE MATHEMATISCHE SLINGER KAN MEN DE VALVERSNELLING g OP EEN GEGEVEN PLAATS TER AARDE BEPALEN.

Examenvraag: Bespreek een proef ter bepaling van de valversnelling op een willekeurige plaats ter aarde. Verklaar het verschil in uitkomst als men deze proef doet op de noordpool en de evenaar.

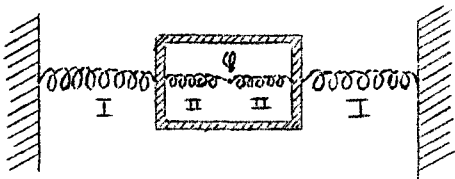
Opmerking: De trillingstijd T van een mathematische slinger is ONAFHANKELIJK van de MASSA van het slingerend lichaam.

Par. 3) Het samenstellen van harmonische trillingen.

N.B. Uit de mechanica weten we, dat een massapunt gelijktijdig kan deelnemen aan meerdere bewegingen, die onderling geheel onafhankelijk zijn. Derhalve kan een massapunt ook gelijktijdig deelnemen aan twee harmonische trillingen, die onderling onafhankelijk van elkaar zijn.

We onderscheiden twee mogelijkheden:

I De trillingsassen vallen samen.

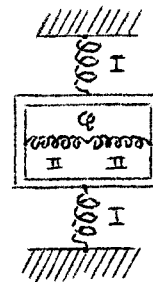


De trillingen I en II staan geheel los van elkaar. De resulterende uitwijking van Q = uitwijking door I + uitwijking door II.

Dus: 
$$U_t^{res} = U_t^I + U_t^{II}$$

N.B. de algebraïsche som.

II De trillingsassen staan loodrecht op elkaar.

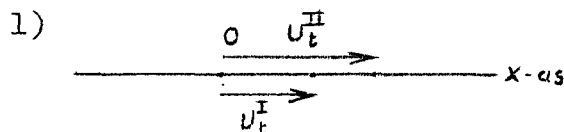


$$\vec{U}_t^{res} = \vec{U}_t^I + \vec{U}_t^{II}$$

N.B. de vectorsom.

We gaan deze gevallen afzonderlijk onderzoeken.

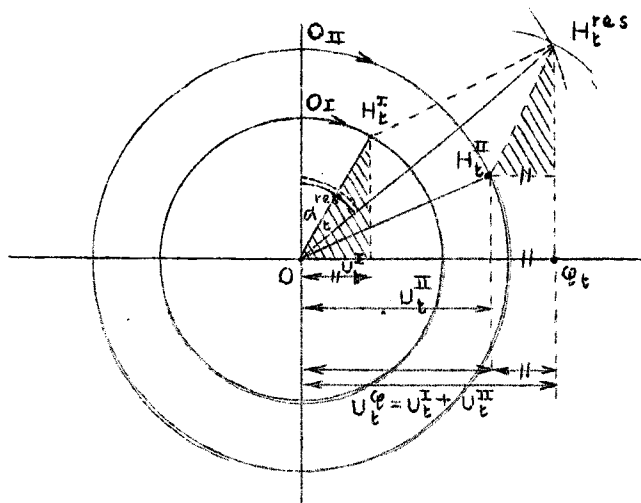
ad I: Een massapunt trilt o.i. van twee harmonische trillingen met DEZELFDE TRILLINGSAS.



Het massapunt Q neemt op de X-as deel aan twee los van elkaar staande harmonische trillingen met dezelfde O.

We maken nu gebruik van de wetenschap, dat we iedere harmonische trilling kunnen beschouwen als de projectie van een eenparige cirkelvormige beweging.

WE VULLEN DE FIGUUR MEETKUNDIG AAN MET VOOR IEDERE TRILLING EEN HULPCIRKEL EN EEN HULPPUNT.



$$U_t^I = r_I \sin \frac{2\pi}{T_I} t$$

$$U_t^{II} = r_{II} \sin \left( \frac{2\pi}{T_{II}} t + \alpha_0 \right)$$

( $\alpha_0$  geeft aan, dat de trillingen ten tijde  $t = 0$  een fase-verschil kunnen hebben)

De resulterende uitwijking van Q op dit ogenblik is de ALGEBRAISCHE SOM van  $U_t^I$  en  $U_t^{II}$

$$\text{dus: } U_t^Q = U_t^I + U_t^{II}$$

Vraag: Welke meetkundige bijzonderheid valt er te vermelden over de resulterende uitwijking van het massapunt Q op dit ogenblik?

Antw.: We construeren het "resulterende hulppunt"  $H_t^{res}$  op dit ogenblik (d.i. het vierde hoekpunt van het parr.  $OH_t^I, OH_t^{II}$ )

Met behulp van congruentie van driehoeken is nu gemakkelijk te bewijzen, DAT Q ZICH OP IEDER OGENBLIK IN DE PROJECTIE VAN  $H_t^{res}$  OP DE TRILLINGSAS BEVINDT.

N.B. 2) Vraag: Onder welke voorwaarde (of misschien voorwaarden) voert het massapunt Q een harmonische trilling uit?

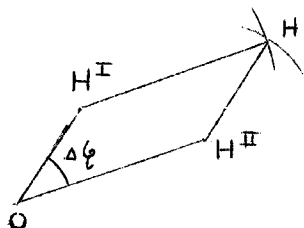
Antw.: Opdat Q een harmonische trilling zal uitvoeren is NODIG EN VOLDOENDE, dat  $H_t^{res}$  een EENPARIGE CIRKELVORMIGE BEWEGING uitvoert.

Hiervoor is nodig en voldoende dat:

- 1<sup>o</sup>) De voerstraal  $OH^{res}$  constant blijft in grootte
- 2<sup>o</sup>) De fasehoek  $\alpha_t^{res}$  een LINEAIRE functie is van t.

Aan deze twee voorwaarden is voldaan als het parr.

$OH^I, H^{II}, H^{res}$  dezelfde vorm behoudt en eenparig om het punt O draait.



Hiervoor is nodig en voldoende, dat  $\angle H^I O H^{II}$  ( $= \Delta \varphi$ ) constant blijft.

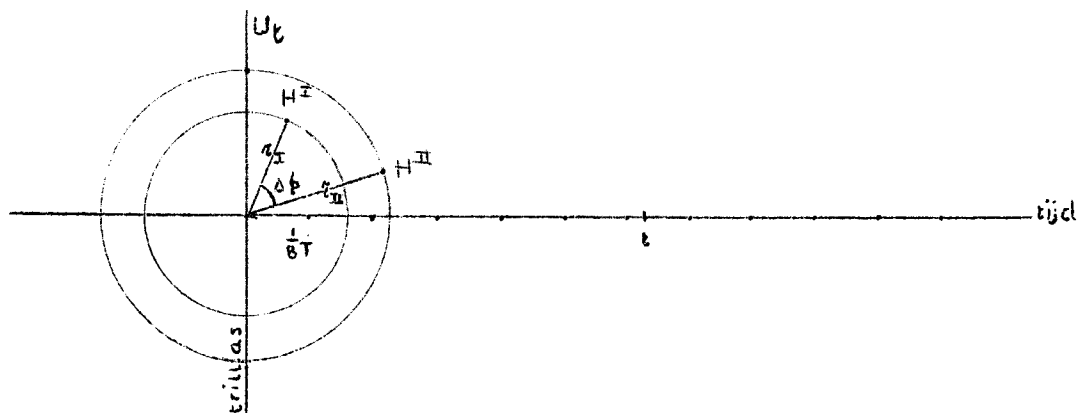
Welnu: Deze hoek blijft constant ALS  $H^I$  EN  $H^{II}$  DEZELFDE OMLOOPSTIJD HEBBEN

Conclusie: Opdat het massapunt Q een harmonische trilling zal uitvoeren heeft slechts aan EEN voorwaarde voldaan te worden n.l. DE SAMENSTELLENDEN HARMONISCHE TRILLINGEN MOETEN DEZELFDE TRILLINGSTIJD HEBBEN. (dus ook dezelfde frequentie  $f = \frac{1}{T}$ )

Eindconclusie: Neemt een massapunt Q deel aan twee (of meer) harmonische trillingen, DIE DEZELFDE TRILLINGSAS EN HETZELFDE NULPUNT HEBBEN, dan is de resulterende beweging DAN EN SLECHTS DAN een harmonische trilling als de samenstellende harmonische trillingen DEZELFDE TRILLINGSTIJD EN DUS OOK DEZELFDE FREQUENTIE hebben.

3) Opgave:

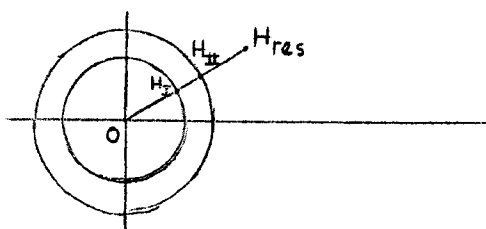
zie blz. 19

3) Opgave:

- Gevraagd: a) Construeer de grafiek van de uitwijking als functie van de tijd, als gegeven is, dat  $T_I = T_{II}$  en  $\Delta\phi = 45^\circ$   
 b) Bepaal uit deze grafiek de snelheid waarmee Q de oorsprong passeert.  
 c) Stel een vergelijking op waaruit deze snelheid kan berekend worden.  
 d) Construeer de snelheid en de versnelling van Q op het willekeurig aangegeven ogenblik t.

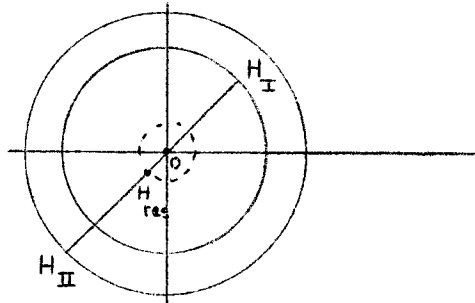
4) Bijzondere gevallen  $T_I = T_{II}$ 

- a)
- $H_I$
- en
- $H_{II}$
- hebben
- dezelfde fase
- .



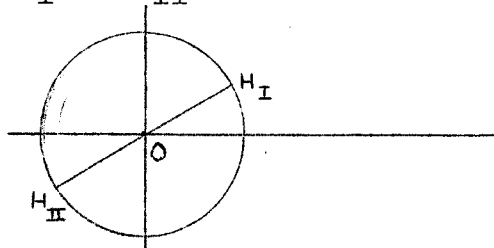
$$r_{res} = r_I + r_{II}$$

- b)
- $H_I$
- en
- $H_{II}$
- hebben
- tegengestelde fase
- (fase-verschil
- $180^\circ$
- )



$$r_{res} = |r_I - r_{II}|$$

- c)
- $H_I$
- en
- $H_{II}$
- hebben
- tegengestelde fase en gelijke voerstraal r



$$r_{res} = 0$$

d.w.z. het massapunt Q blijft t.o.  
v. het coördinatenstelsel in O dus  
 in rust.

Men zegt: "de trillingen DOVEN  
 ELKAAR UIT"

N.B. 5) Theorema:

Geg:  $T_I = T_{II}$  en  $r_I = r_{II} = R$ . De trillingen hebben een faseverschil  $\Delta\phi$  graden.

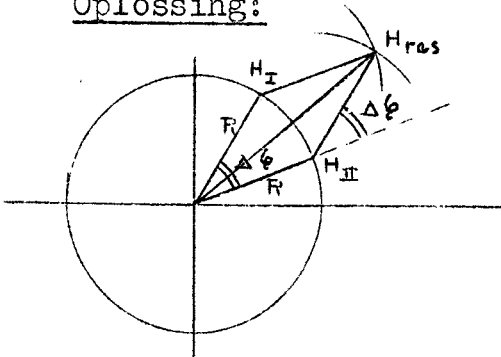
Gevraagd: Bij welke waarden van  $\Delta\phi$  zullen de trillingen elkaar VERSTERKEN, d.w.z.  $r_{res} > R$ . en

Bij welke waarden van  $\Delta\phi$  zullen de trillingen elkaar VERZWAKKEN, d.w.z.  $r_{res} < R$

Oplossing:

zie blz. 20

Oplossing:



Cosinusregel:

$$r_{res}^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos \Delta \phi = 2R^2 + 2R^2 \cos \Delta \phi$$

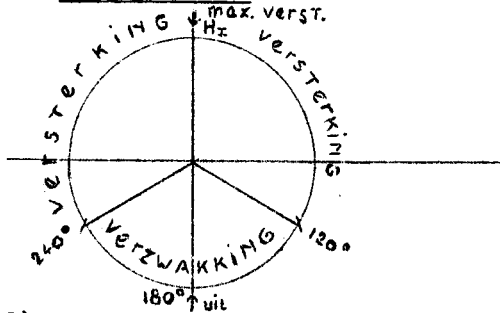
verzwakken  $\rightarrow r_{res} < R$

dus:  $2R^2 + 2R^2 \cos \Delta \phi < R^2$

dus:  $\cos \Delta \phi < -\frac{1}{2}$

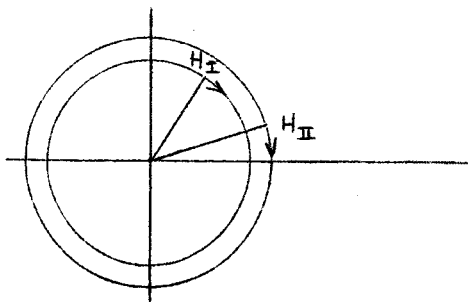
dus verzwakking als  $120^\circ < \Delta \phi < 240^\circ$

Conclusie:



Ligt het fase-verschil tussen  $120^\circ$  en  $240^\circ$ , dan zullen de trillingen elkaar verzwakken; is  $\Delta \phi = 180^\circ$ , dan zullen de trillingen elkaar uitdoven. Is  $\Delta \phi = 120^\circ$  of  $\Delta \phi = 240^\circ$  dan is  $r_{res} = R$ . Bij ieder ander fase-verschil zullen de trillingen elkaar versterken; is  $\Delta \phi = 0^\circ$ , dan zullen de trillingen elkaar maximaal versterken.

6) Wat doet het massapunt Q als  $T_I \neq T_{II}$ ?

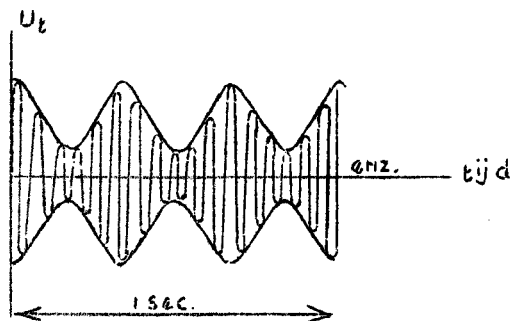


Stel  $f_{HI} = f$  Hertz en  $f_{HII} = f + 3$  Hertz

Dan zijn  $H_I$  en  $H_{II}$  drie keer per sec. in conjunctie en drie keer per sec. in oppositie.

De trillingen zullen elkaar dus 3 x per seconde maximaal versterken en 3 x per sec. maximaal verzwakken.

De grafiek van de uitwijking van Q als functie van de tijd wordt dan:



We komen hier op terug bij het verschijnsel van de ZWEVINGEN.

7) Ter oriëntatie: We zijn bezig met " het samenstellen van trillingen." We hadden twee mogelijkheden onderscheiden:

I dat de trillingsassen samenvallen.

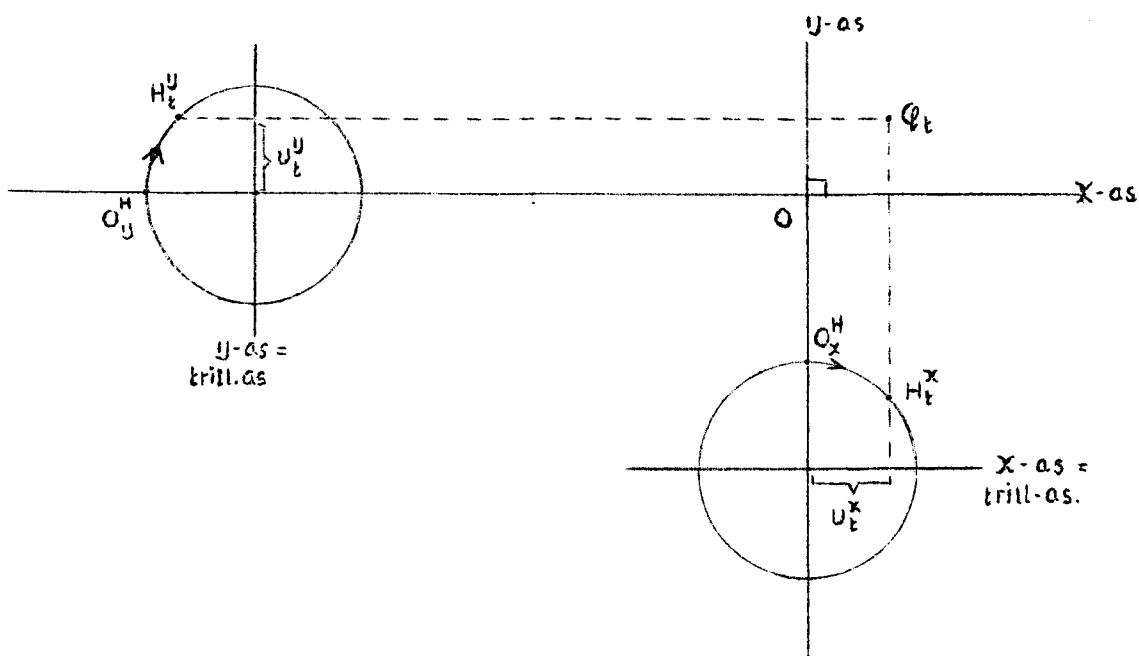
II dat de trillingsassen loodrecht op elkaar staan.

In ad I punt 1,2,3,4,5,6 hebben we de eerste mogelijkheid afgehandeld.

ad II. Een massapunt trilt onder invloed van twee harmonische trillingen (met dezelfde  $\omega$ ) waarvan de trillingsassen loodrecht op elkaar staan.

1) De algemene constructie van de baan van het massapunt Q

Het is duidelijk, dat de baan van het massapunt Q IN HET PLATTE VLAK DOOR DE TRILLINGSASSEN ligt. We zullen dit vlak het XOY vlak noemen en nemen dit tot vlak van tekening.



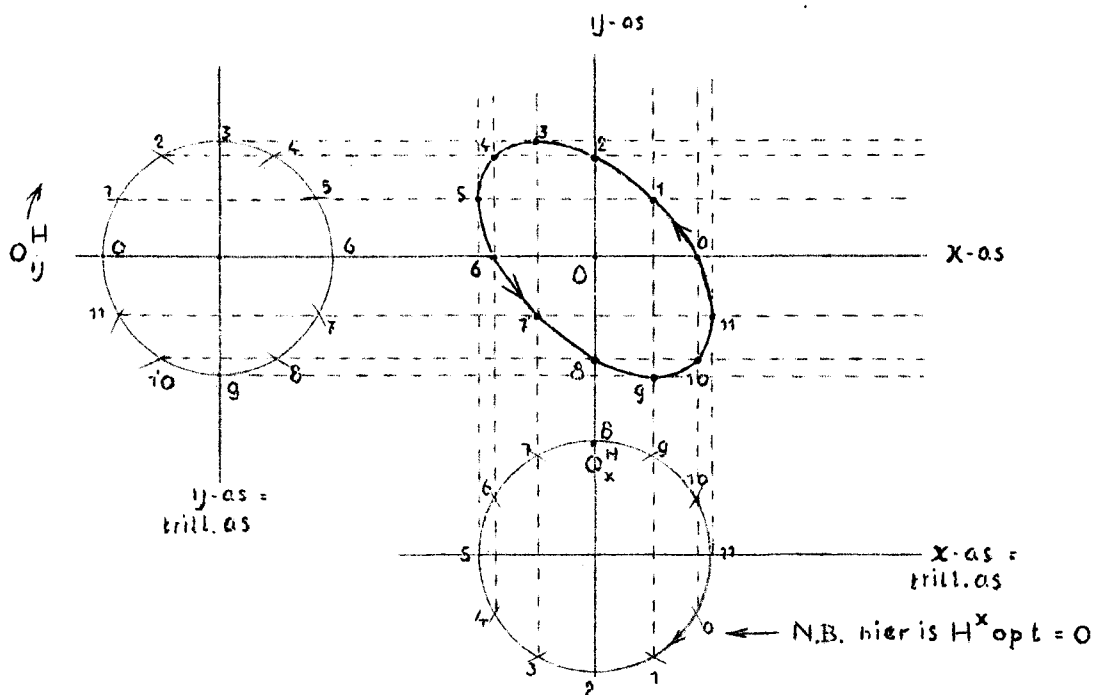
Het massapunt  $Q$  bevindt zich in het  $XOY$ -vlak op ieder ogenblik in het vierde hoekpunt van het parallellogram van wegen. De baan van het massapunt  $Q$  wordt nu "punt voor punt" geconstrueerd volgens het volgende "recept":

- Geef  $O_x^H$  en  $O_y^H$  duidelijk aan op de hulpcirkels en geef ook de richtingen aan waarin de hulppunten  $H_x$  en  $H_y$  zich over de resp. hulpcirkels bewegen.
  - Geef (b.v. door nummering) aan waar  $H_x$  en  $H_y$  zich op overeenkomstige ogenblikken bevinden.
  - Bepaal de plaats van  $Q$  in het  $XOY$ -vlak op deze (genummerde) ogenblikken.
  - Verbind de gevonden punten  $Q_t$
  - Geef met pijlen aan in welke richting  $Q$  deze baan doorloopt.
- 2) Opgaven.

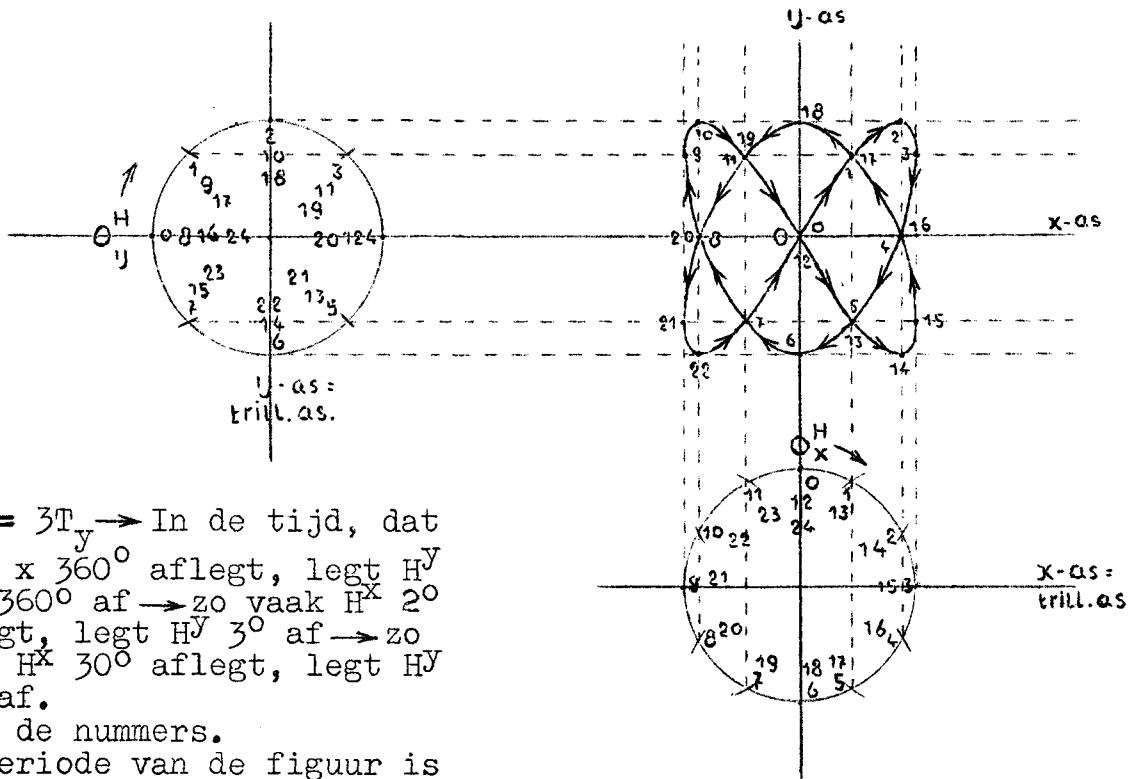
a) Gegeven:  $T_x = T_y$ ; trilling in  $x$  richting is  $120^\circ$  in fase voor op trilling in  $y$ -richting;  $r_x = r_y$

Gevraagd: Construeer de baan van  $Q$  in het  $XOY$ -vlak.

Constructie:



b) Gegeven:  $2T_x = 3T_y$  ; ten tijde  $t = 0$  hebben beide trillingen de fase nul;  $r_x = r_y$



$2T_x = 3T_y \rightarrow$  In de tijd, dat  $H^x$   $2 \times 360^\circ$  aflegt, legt  $H^y$   $3 \times 360^\circ$  af  $\rightarrow$  zo vaak  $H^x$   $2^\circ$  aflegt, legt  $H^y$   $3^\circ$  af  $\rightarrow$  zo vaak  $H^x$   $30^\circ$  aflegt, legt  $H^y$   $45^\circ$  af.  
 Volg de nummers.  
 De periode van de figuur is  $T = 2T_x = 3T_y$

- c)  $T_x = T_y$  ;  $\Delta\phi = 240^\circ$  ;  $r_x = r_y$  (vergelijk de bewegingsrichting van Q met Y)
- d)  $T_x = 2T_y$  ; op  $t = 0$  hebben beide trillingen de fase nul;  $r_x = r_y$
- e)  $T_x = 2T_y$  ; op  $t = 0$  is de trilling in de X-richting  $45^\circ$  in fase vóór op de trilling in de Y-richting;  $r_x = r_y$

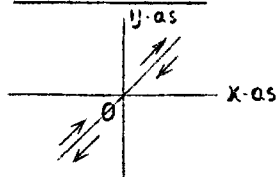
3) Mogelijke gevallen:

A)  $T_x = T_y$  . De trillingen in de x en y richtingen hebben dezelfde trillingstijd, dus ook dezelfde frequentie. ( $f = \frac{1}{T}$ )

$\rightarrow$  a) De trillingen hebben op ieder ogenblik DEZELFDE FASE.

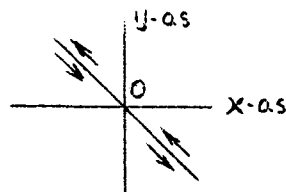
$$\left. \begin{aligned} X_t &= r_x \sin \frac{2\pi t}{T} \\ Y_t &= r_y \sin \frac{2\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y_t &= \frac{r_y}{r_x} \cdot X_t \rightarrow Y = \frac{r_y}{r_x} \cdot X \\ U_t^Q &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \end{aligned}$$

Conclusie:



- 1) De baan van Q in het XOY-vlak is een RECHTE LIJN met positieve richtingscoëfficiënt.
- 2) Q voert langs deze lijn een HARMONISCHE trilling uit.

$\rightarrow$  b) De trillingen hebben een faseverschil  $180^\circ (= \pi \text{ rad})$



- 1) De baan van Q in het XOY-vlak is een RECHTE LIJN met negatieve richtingscoëfficiënt.
- 2) Q voert langs deze lijn een HARMONISCHE trilling uit.

$\rightarrow$  c) De trillingen hebben een fase-verschil  $\Delta\phi$   
 Q beschrijft in het XOY-vlak een ELLIPS met O tot middelpunt.

Q zal een CIRKEL beschrijven als:  $\Delta\phi = 90^\circ$  EN  
 $r_x = r_y = r$

Immers dan is:

$$\left. \begin{aligned} X_t &= r \sin \frac{2\pi}{T} t \\ Y_t &= r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \pm \frac{\pi}{2} \right) = r \cos \frac{2\pi}{T} t \end{aligned} \right\} X^2 + Y^2 = r^2$$

- B)  $T_x \neq T_y$  In dit geval beschrijft Q in het XOY-vlak een zich PERIODIEK HERHALENDE FIGUUR.

NB De baan van Q gaat dan en slechts dan door 0 als er èèn of meerdere tijdstippen zijn waarop:

ôf BEIDE trillingen de fase NUL hebben,

ôf de ene trilling de fase nul en de andere de fase 180° heeft.

- 4) De figuren die aldus ontstaan, heten de FIGUREN VAN LISSAJOUS. (Jules Antoine Lissajous. 1822 - 1880)

Men herkent deze figuren aan hun PERIODICITEIT.

- 5) Opmerkingen.

a) Uit de gevallen  $A_a$  en  $A_b$  van punt 3) blijkt, dat men een harmonische trilling<sup>a</sup> ook kan ontbinden in twee met de gegeven trilling in een zelfde plat vlak gelegen harmonische trillingen waarvan de trillingsassen loodrecht op elkaar staan.

b) Bij het samenstellen van twee harmonische trillingen met hetzelfde nulpunt maar niet samenvallende trillingsassen, hebben we alleen het geval onderzocht, dat deze trillingsassen loodrecht op elkaar staan.

Het is echter ook mogelijk, dat deze trillingsassen een willekeurige hoek met elkaar maken.

Hebben de trillingen dan dezelfde trillingstijd, dan kan men het probleem, door èèn der trillingen te ontbinden, terug brengen tot het geval dat de trillingsassen loodrecht op elkaar staan.

Hebben de trillingen niet dezelfde trillingstijd, dan is het probleem niet tot het bovenstaande te herleiden. Ook dan beschrijft Q, in het vlak door de trillingsassen, een zich periodiek herhalende figuur. De "symmetrie assen" van deze figuur van Lissajous staan dan niet loodrecht op elkaar.

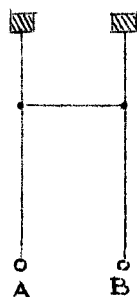
We laten dit probleem verder rusten.

- 6) Het omgekeerde is ook waar: Beschrijft een massapunt in een plat vlak een zich periodiek herhalende figuur, dan is deze beweging altijd te ontbinden in twee in dat vlak gelegen harmonische trillingen.

-----

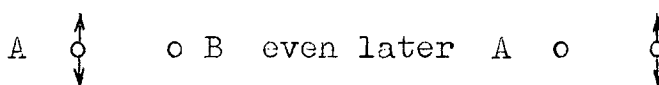
HOOFDSTUK IIG O L V E N.Deel I LOPENDE GOLVEN in een rij van GEKOPPELDE MASSA-PUNTEN.Par. 1) Proeven ter inleiding.

S 1) Proef met gekoppelde slingers.

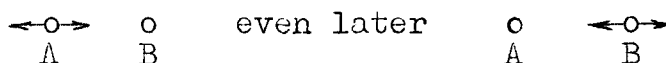
e  
r  
i  
e  
A

De proef leert:

- a) VIA DE KOPPELING wordt TRILLINGSENERGIE van A doorgegeven aan B.
- b) Trilt A TRANSVERSAAL ( $\perp$  vlak van de slingers), dan gaat B ook TRANSVERSAAL trillen, dus:



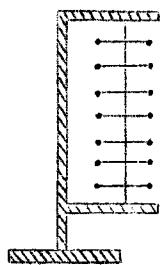
Trilt A LONGITUDINAAL (IN het vlak van de slingers), dan gaat B ook LONGITUDINAAL trillen, dus:



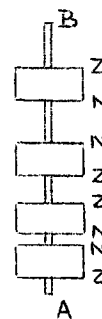
- c) De SNELHEID waarmee de trillingsENERGIE wordt doorgegeven hangt af van de sterkte van de binding (koppeling) tussen de slingers, MAAR IS VOOR LONGITUDINALE TRILLINGEN GROTER DAN VOOR TRANSVERSALE TRILLINGEN.

2) Proef met torsiedraad.

3) Proef met "zwevende" magneten.

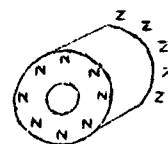


VIA DE TORSIE KOPPELING  
WORDT trillings ENERGIE  
doorgegeven.



VIA DE MAGNETISCHE KOPPELING  
wordt trillings ENERGIE door-  
gegeven.

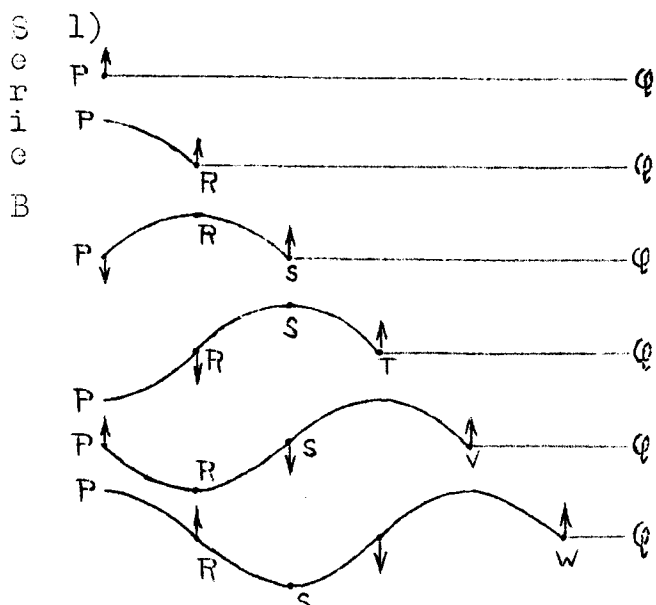
AB is een staaf  
van een niet mag-  
netiseerbare stof



4) Conclusie: Door middel van een koppeling kan TRILLINGSENERGIE zich voortplanten langs een rij van massapunten.

N.B. NIET DE PUNTEN planten zich voort, maar de TRILLINGSENERGIE VAN DE PUNTEN.

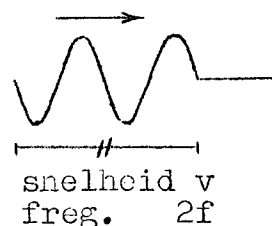
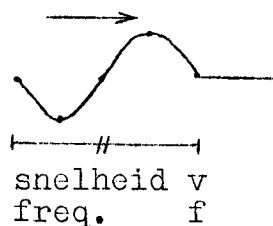


Elastische draad.

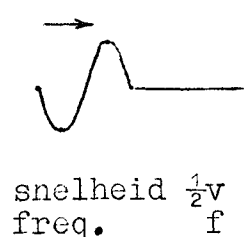
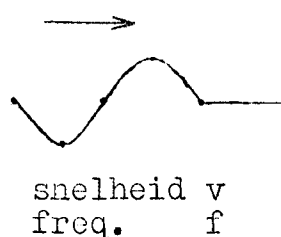
PQ is een elastische, goed buigbare, draad. We brengen het uiteinde P in transversale harmonische trilling en zorgen er voor, dat P dezelfde harmonische trilling blijft uitvoeren.

De proef leert, dat de trilling zich vanuit P LANGS DE PUNTEN VAN DE DRAAD VOORTPLANT d.w.z.  $\frac{1}{4}T$  nadat P begonnen is te trillen, begint het punt R dezelfde trilling uit te voeren als het punt P, en weer  $\frac{1}{4}T$  later het punt S enz. Het geheel geeft de indruk, dat een sinuslijn eenparig opschuift in de richting  $P \rightarrow Q$ .

- 2) We herhalen de proef met dezelfde draad, maar zorgen er voor, dat de FREQUENTIE van de harmonische trilling van P b.v. GROTER is. Het blijkt dan, dat de trilling zich met DEZELFDE SNELHEID als bij de eerste proef voortplant van P naar Q, MAAR DAT DE SINUSGOLF DAN KORTER IS.



- 3) We herhalen de proef met een elastische, goed buigbare, draad van een ANDERE STOF. Het blijkt, dat de snelheid waarmee de trilling zich van P naar Q voortplant dan ANDERS is.



- 4) Conclusie: I Brengt men een uiteinde van een elastische, goed buigbare draad in transversale harmonische trilling, dan plant deze trilling zich langs de draad voort naar het andere uiteinde. Het geheel maakt de indruk alsof een sinus lijn eenparig opschuift.
- II De snelheid, waarmee de trilling zich langs de draad voortplant, is ONAFHANKELIJK van de frequentie van de trilling.
- III Deze snelheid hangt alleen af van de stof waaruit de draad bestaat.

- 5) Opmerking. In werkelijkheid treedt er ook nog DEMPING op, die veroorzaakt wordt door de wrijving met de lucht, de arbeid die nodig is om de lucht te verplaatsen en het energieverbruik IN het materiaal van de draad. Deze demping hebben we in bovenstaande figuren buiten beschouwing gelaten. Bovendien zullen de punten van de draad (ook al is deze zeer rekbaar) geen rechte, maar flauw gebogen banen beschrijven. Ook dit lieten we buiten beschouwing.

Par. 2) EEN RIJ VAN IDEEAAL GEKOPPELDE MASSAPUNTEN.

N.B. 1) Tussen de proeven van serie  $A_{1,2}$  en serie B bestaat een wezenlijk verschil.

Bij serie  $A_{1,2}$  waren de massapunten wel gekoppeld, maar had ieder massapunt bovendien een EIGEN TRILLINGSMECHANISME: de koppelende krachten oefenden alleen maar een DWANG uit OP de EIGEN TRILLING van de massapunten.

Bij serie B hadden de gekoppelde massadelen van de draad GEEN EIGEN TRILLINGSMECHANISME, maar werd de trilling UITSLUITEND veroorzaakt en in stand gehouden DOOR DE KOPPELENDE KRACHTEN: De massadelen van de draad konden dus alleen maar GEDWONGEN TRILLEN.

2) De proeven van serie A) spelen voor ons doel verder geen rol meer. Ze dienden slechts om ons er van te overtuigen, dat VIA EEN KOPPELING TRILLINGSENERGIE KAN WORDEN DOORGEGEVEN.

De proeven van serie B) zijn voor ons doel echter van wezenlijk belang. We zullen n.l. de voortplanting van trillingsenergie in vaste stoffen, vloeistoffen en gassen gaan bestuderen. Het zal blijken, dat we daarbij altijd te doen hebben met GEDWONGEN TRILLINGEN.

In deel I van dit hoofdstuk zullen we ons alleen bezig houden met de gevallen, waarin de trillingsenergie slechts in èèn richting wordt doorgegeven, dus met èèn dimensionale problemen. De ruimtelijke problemen zullen in deel III behandeld worden.

3) Om de bestudering van de "èèn dimensionale energie doorgave" WISKUNDIG binnen ons bereik te brengen, GAAN WE DE WERKELIJKHEID IDEALISEREN.

Daartoe veronderstellen we, dat we altijd te doen hebben met EEN RIJ VAN GEKOPPELDE MASSAPUNTEN, waarvan we BIJ WIJZE VAN AXIOMA aannemen, DAT DE KOPPELING ZODANIG IS, DAT:

I de gekoppelde massapunten iedere denkbaar-mogelijke harmonische trilling kunnen uitvoeren, zowel transversaal als longitudinaal, echter met dien verstande, dat de trillingsassen van ALLE massapunten van de rij:

- òf evenwijdig lopen, rij (de massapunten trillen dan transversaal)
- òf samenvallen langs de rij (de massapunten trillen dan longitudinaal)

De trillingen van de massapunten van de rij zijn dus altijd GELIJK GEPOLARISEERD.

II Als het beginpunt van de rij harmonisch trilt, alle andere massapunten alleen maar harmonisch kunnen trillen.

III de gekoppelde massapunten alleen maar met onderling gelijke frequentie kunnen trillen.

IV alle trillende massapunten, vanaf het eerste ogenblik van hun trilling, onderling gelijke en constante trillingsenergie hebben.

4) Zo'n rij zullen we "EEN RIJ VAN IDEEAAL GEKOPPELDE MASSAPUNTEN" noemen.

Hebben we de energiedoorgave in een vaste stof of een vloeistof op het oog, dan zullen we bovendien veronderstellen, dat de afstand tussen twee opvolgende massapunten van de rij infinitesimaal klein is. Voor de theorie is dit slechts een bijkomstigheid.

5) Aan de hand van zo'n rij van ideaal gekoppelde massapunten zullen we de verschijnselen bestuderen die samenhangen met de doorgave van trillingsenergie in draden, schroefveren, staven, gaskolommen enz.

Bij deze bestudering zijn de dempingsverschijnselen dus al bij voorbaat uitgesloten, evenals de krommingen in de banen bij transversale trillingen.

De conclusies van onze theorie geven ons dus slechts een geïdealiseerd beeld van de werkelijkheid. (Analoog aan de gaswetten, die alleen gelden voor ideale gassen).

Par. 3) Golfbeweging in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

1) A B C D E enz. oneindig lang.

A, B, C, D, E enz. zijn de massapunten van een oneindig lange rij van ideaal gekoppelde massapunten.

A is verbonden met een trillingsbron, die A in harmonische trilling brengt en houdt.

$$f_A = f_{\text{bron}}$$

Tengevolge van de koppeling tussen A en B, wordt B GEDWONGEN om harmonisch te gaan trillen met dezelfde polarisatie-as, dezelfde frequentie en dezelfde trillings-energie als A.

De koppeling DWINGT A om de voor deze trilling van B benodigde energie aan B af te staan. OM A in harmonische trilling te houden, moet de bron de door A afgestane energie aanvullen.

Ten gevolge van de koppeling tussen B en C, wordt C GEDWONGEN om harmonisch te gaan trillen met dezelfde polarisatie-as dezelfde frequentie en dezelfde trillingsenergie als B, dus ook als A.

De voor de trilling van C benodigde energie wordt door werking van de koppeling onttrokken aan B; de aan B onttrokken energie wordt door de werking van de koppeling aangevuld uit de trillings-energie van A; de aan A onttrokken trillingsenergie wordt aangevuld door de BRON.

Ten gevolge van de koppeling tussen C en D, wordt D gedwongen om harmonisch te gaan trillen met dezelfde polarisatie-as, dezelfde frequentie en dezelfde trillingsenergie als C, dus ook als B en A. enz.

Conclusie: Het trillen van de bron heeft tot gevolg, dat de massapunten van de rij door de werking van de koppeling ACHTEREENVOLGENS GEDWONGEN worden om harmonische trillingen TE GAAN uitvoeren met onderling gelijke (door de bron bepaalde) polarisatieassen, frequenties en trillingsenergieën, m.a.w. DAT ZICH IN DE RIJ EEN HARMONISCHE TRILLING VOORTPLANT.

Het feit dat de bron BLIJFT TRILLEN, heeft BOVENDIEN tot gevolg, dat de reeds in trilling gebrachte massapunten, door de werking van de koppeling GEDWONGEN worden, OM HUN EENMAAL BEGONNEN HARMONISCHE TRILLING TE BLIJVEN UITVOEREN.

N.B. In de rij heeft men dus te doen met TWEE gebeurtenissen:

- 1<sup>o</sup>) dat de reeks van trillende massapunten steeds langer wordt
- 2<sup>o</sup>) dat de reeds trillende massapunten hun eenmaal begonnen trilling blijven uitvoeren.

Deze twee gebeurtenissen vat men samen, door te zeggen, DAT DE BRON TIJDENS HAAR TRILLING EEN LOPENDE GOLF IN DE RIJ STUURT.

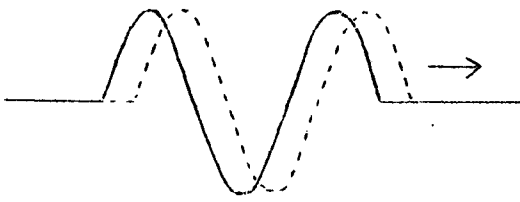
De figuur van par. 1), B<sub>1</sub>, geeft ons een beeld van het ontstaan van een LOPENDE GOLF in een draad van ideaal gekoppelde massapunten: Door in de verschillende "foto's" op de punten P, R, S, T, V en W te letten, ziet men, dat de reeks van trillende massapunten gaandeweg langer wordt; door in de verschillende "foto's" op één massapunt te letten (b.v. R) ziet men, dat ieder massapunt de eenmaal begonnen harmonische trilling BLIJFT uitvoeren.

2) In het bovenstaande werd verondersteld, dat de bron BLIJFT trillen. We vragen nu:

Wat gebeurt er in de rij als de bron op een gegeven ogenblik haar trilling staakt?

Antwoord. Uit bovenstaande beschouwing blijkt, dat de bron voortdurend trillingsenergie moet leveren om de massapunten A, B, C enz. in harmonische trilling te houden. Doet de bron dit niet, maar staakt zij haar trilling, dan plant zich slechts de tijdens de trilling van de bron geleverde energiehoeveelheid in de rij voort: Tijdens het passeren van deze trillingsenergie voeren de massapunten de eenmaal begonnen harmonische trilling uit; na het passeren van deze trillingsenergie zijn de massapunten weer in rust.

In dit geval spreekt men van een LOPENDE GOLF-PORTIE.



Nevenstaande figuur stelt een trans-  
versale LOPENDE GOLFPORIE voor in  
een draad van ideaal gekoppelde mas-  
sapunten.

— geeft de situatie op een gege-  
ven ogenblik.  
----- geeft de situatie even later.

- 3) Een LOPENDE GOLFPORIE is een bijzonder geval van een LOPENDE GOLF.

Vraag: Wat verstaat men onder een LOPENDE GOLF?

Antw.:

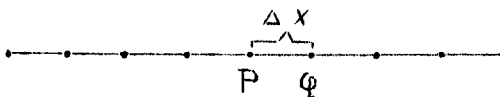
Definitie: Onder een lopende golf verstaat men het verschijnsel, waarbij zich in een rij van gekoppelde massapunten een harmonische trilling voortplant, terwijl de reeds trillende punten (in het tijdsinterval dat hun trilling duurt) hun eenmaal begonnen trilling blijven uitvoeren.

- 4) Opmerking.

De massapunten van de rij zijn in hun trilling DESPOTISCH ONDERWORPEN aan de trilling van de BRON: de polarisatieas, de frequentie en de trillingsenergie worden bepaald door de BRON en door de bron alleen! Het enige EIGENE van de rij der ideaal gekoppelde massapunten is de SNELHEID WAARMEE DE TRILLING ZICH IN DE RIJ VOORTPLANT.

Vraag: Wat verstaat men, precies gezegd, onder de SNELHEID waarmee de trilling zich in de rij der ideaal gekoppelde massapunten voortplant?

Antw.:



P en Q zijn twee op elkaar volgende massapunten van de rij. Hun afstand is  $\Delta X$  meter.

Stel, dat de van links komende trilling zich op een gegeven ogenblik heeft voortgeplant tot P, dan wil dit

zeggen, dat P op dat ogenblik met zijn EERSTE trilling BEGINT. Het duurt nu een tijdsinterval  $\Delta t$  sec. voordat de koppeling (indirect) aan de bron zoveel energie heeft onttrokken, dat Q met zijn EERSTE trilling kan BEGINNEN.

De trilling plant zich dan van P naar Q voort met de snelheid

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ m/sec.}$$

Als de rij homogeen is (zie beneden), zijn  $\Delta x$  en  $\Delta t$  voor ieder paar van op elkaar volgende massapunten gelijk. De snelheid waarmee de trilling zich in de rij voortplant is dan:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ m/sec.}$$

- 5) Nadere beschouwing van de lopende golf.

I De trilling plant zich EENPARIG in de rij voort, MITS de rij HOMOGEEN is, d.w.z. mits de koppeling overal dezelfde is en de massapunten dezelfde massa hebben.

Dit zullen we altijd stilzwijgend veronderstellen, tenzij het tegendeel wordt vermeld.

II Als de rij HOMOGEEN is, hebben de trillingen van de massapunten van de rij DEZELFDE AMPLITUDO.

Bewijs: De trillingsenergie van een harmonisch trillend punt is in formule gelijk aan:

$$U = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \text{ Joule.}$$

Welnu, in een homogene rij hebben alle massapunten:

dezelfde  $U \rightarrow$  axioma, dezelfde  $T \rightarrow$  axioma,  
dezelfde  $m \rightarrow$  omdat de rij homogeen is.

Dus hebben de trillingen van de massapunten dan ook DEZELFDE AMPLITUDO.

- Opmerking: a) Als de rij NIET HOMOGEEN is hebben alle trillende massapunten wel dezelfde trillingsenergie en dezelfde frequentie ( $f = \frac{1}{T}$ ), maar niet dezelfde massa, dus ook NIET DEZELFDE AMPLITUDO.
- b) De massapunten bereiken d e uit bovenstaande formule volgende amplitudo direct, BIJ HUN EERSTE TRILLING.

III Als de rij HOMOGEEN is, gelden voor de lopende golf dus de volgende bijzonderheden:

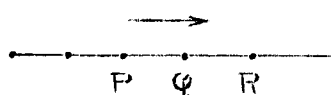
- 1°) De harmonische trilling plant zich EENPARIG voort
- 2°) Alle trillende massapunten voeren DEZELFDE harmonische trilling uit; de trillingen zijn gelijk gepolariseerd, hebben dezelfde frequentie en dezelfde amplitudo.

Zoals gezegd zullen we in de toekomst altijd stilzwijgend veronderstellen, dat de rij homogeen is.

N.B. IV HOOFDEIGENCHAP van de lopende golven in een (homogene) rij van ideaal gekoppelde massapunten.

Tussen de trillingstoestanden van twee op elkaar volgende massapunten van de rij bestaat op ieder ogenblik HETZELFDE FASEVERSCHIL.

Bewijs.



P en Q voeren dezelfde harmonische trilling uit. Q is echter  $\frac{PQ}{v}$  seconde LATER dan P met zijn EERSTE trilling BEGONNEN. Dus is Q op ieder ogenblik eenzelfde bedrag in fase achter op P.

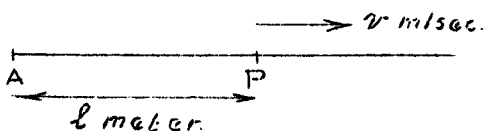
Omdat de harmonische trilling zich EENPARIG voortplant, is R op ieder ogenblik DITZELFDE bedrag in fase achter op Q. enz.

Opmerking: a) Met nadruk adviseren we de lezer, om deze eigenschap goed in zich op te nemen, want ze beheerst de hele theorie van de lopende golven.

b) In de fig. par. 1, B<sub>1</sub>, is:

- R op ieder ogenblik 90° in fase achter op P  
 S op ieder ogenblik 90° in fase achter op R  
 T op ieder ogenblik 90° in fase achter op S  
 enz.

6) Opgave.



Geg.:  $U_t^A = r \sin \frac{2\pi}{T} t$

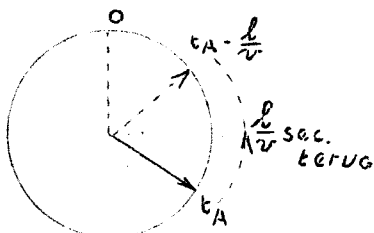
De trilling plant zich voort met de snelheid v m/sec.

P is een massapunt van de rij op afstand l meter van A.

Gevr: De uitwijking van P als functie van t<sub>A</sub>

Opl.: Daar de trilling zich EENPARIG voortplant met snelheid v m/sec., is P  $\frac{l}{v}$  seconden LATER dan A met trillen BEGONNEN.

P HEEFT DUS OP IEDER OGENBLIK DE FASE, DIE A HAD OP HET TIJDSTIP  $\frac{l}{v}$  seconden VROEGER.



Klok van A

Op het ogenblik, dat de klok van A het tijdstip t<sub>A</sub> aanwijst, heeft P dus de fase, die A HAD op het tijdstip t<sub>A</sub> -  $\frac{l}{v}$ . Dus op het tijdstip t<sub>A</sub> is:

$U_{t_A}^A = r \sin \frac{2\pi}{T} t_A$

en

$$\begin{aligned} \text{en } U_{t_A}^P &= r \sin \frac{2\pi}{T} \left( t_A - \frac{l}{v} \right) \\ &= r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \cdot \frac{l}{vT} \right) \end{aligned}$$

Conclusie: De uitwijking van P als functie van  $t_A$  is:

$$U_t^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - 2\pi \cdot \frac{l}{vT} \right)$$

Deze formule drukt uit, dat ieder punt van de draad een harmonische trilling beschrijft met dezelfde amplitudo  $r$  en dezelfde trillingstijd  $T$ , maar dat de fase van een punt P, dat  $l$  meter verder ligt dan A, op ieder ogenblik het constante bedrag van  $2\pi \cdot \frac{l}{vT}$  radialen achter is op de fase van A.

par. 4) Het begrip GOLFLENGTE.

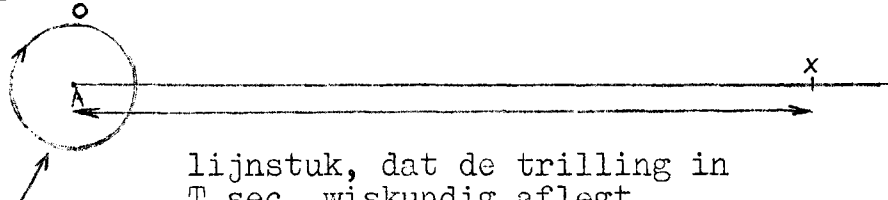
De trilling plant zich eenparig voort langs de rij der ideaal gekoppelde massapunten.

De snelheid is  $v$  m/sec. In de duur van èn trillingstijd der massapunten,  $T$  sec, heeft de trilling zich wiskundig voortgeplant over een lijnstuk  $v \times T$  meter.

De lengte van dit lijnstuk noemt men de GOLFLENGTE.

Definitie:

Onder de golflengte verstaat men de lengte van het lijn-stuk waarover de trilling zich (wiskundig) in èn trillingstijd voortplant.



omloopstijd van het hulp punt van A is  $T$  sec.

lijnstuk, dat de trilling in  $T$  sec. wiskundig aflegt. De lengte van dit lijnstuk noemt men de GOLFLENGTE.

De golflengte wordt aangegeven door de letter  $\lambda$

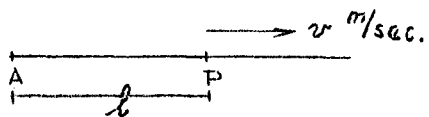
In FORMULE:

$$\lambda = v \cdot T \text{ meter.}$$

Opmerking: a) Het is niet zeker, dat zich in het punt X van bovenstaande figuur een massapunt van de rij bevindt. Daarom staat in de definitie de toevoeging WISKUNDIG. Het begrip golflengte is dus een wiskundig begrip.

b) In de figuur par.1,  $B_1$  is PV de golflengte ( $= RW$ ) De golflengte is dus blijkbaar de afstand tussen de uiteinden van èn sinusgolf. Uit fig. § 3 blijkt, dat bij een puntenrij de golflengte gelijk is aan de afstand tussen de uiteinden van èn sinusgolf, die de meetkundige plaats is van de trillende massapunten.

Par. 5) Het faseverschil tussen twee punten van de rij.



De in par. 3 gevonden formule voor de uitwijking van het massapunt P als functie van  $t_A$ , kunnen we nu verder uitwerken.

$$U_t^A = r \sin \frac{2\pi}{T} t_A$$

$$U_t^P = r \sin \frac{2\pi}{T} \left( t_A - \frac{l}{v} \right) = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \cdot \frac{l}{vT} \right) = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \cdot \frac{l}{\lambda} \right)$$

DUS:

$$U_{tA}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

$2\pi \cdot \frac{1}{\lambda}$  is dan het faseverschil tussen P en A, uitgedrukt in radialen.

Conclusie: ZOVAAK DE GOLFLENGTE BEGREPEN IS OP DE AFSTAND AP, ZOVAAK IS HET MASSAPUNT P  $2\pi$  RADIALEN IN FASE ACHTER OP HET MASSAPUNT A.

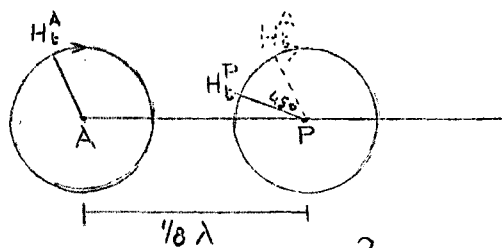
- 2) In het bovenstaande was A het beginpunt van de rij. De bewijsvoering blijft echter onveranderd als A een WILLEKEURIG MASSAPUNT van de rij is. We komen dus tot de

ALGEMENE CONCLUSIE: ZOVAAK DE GOLFLENGTE BEGREPEN IS OP DE AFSTAND TUSSEN DE NULPUNTEN VAN TWEE MASSAPUNTEN VAN DE RIJ, ZO VAAK HEBBEN DEZE MASSAPUNTEN HET CONSTATE FASE VERSCHIL VAN  $2\pi$  RADIALEN.

- 3) Voorbeelden.

a)  $AP = \frac{1}{8} \lambda$

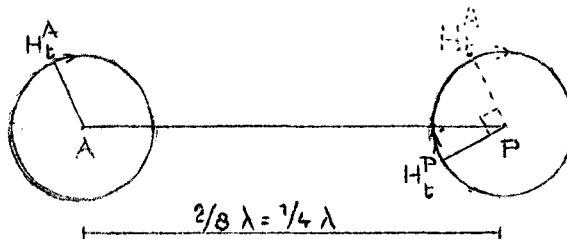
Dan is  $\Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{1}{4} \pi \text{ rad.} = 45^\circ$



De hulppunten  $H^A$  en  $H^P$  bewegen in dezelfde richting langs de hulp cirkels. Hoek  $H^A P H^P$  is op ieder ogenblik  $45^\circ$ .

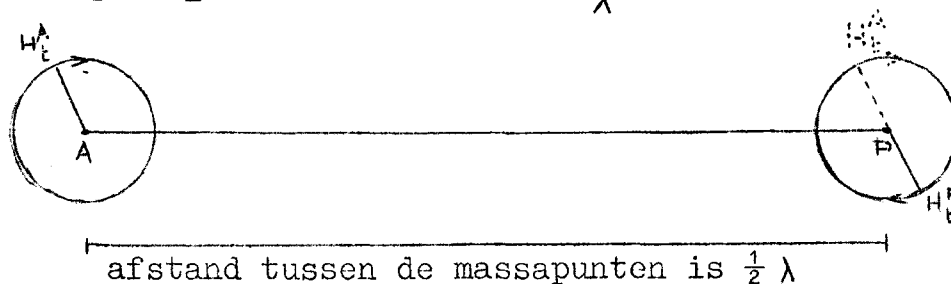
b)  $AP = \frac{2}{8} \lambda$

Dan is  $\Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{2}{8} \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \pi \text{ rad.} = 90^\circ$



c)  $AP = \frac{3}{8} \lambda$  Dan is  $\Delta\phi = 135^\circ$

N.B. d)  $AP = \frac{4}{8} \lambda = \frac{1}{2} \lambda$  Dan is  $\Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda} = \pi \text{ rad.} = 180^\circ$



N.B. MASSAPUNTEN DIE EEN HALVE GOLFLENGTE VAN ELKAAR LIGGEN, HEBBEN OP IEDER OGENBLIK

TEGENGESTELDE FASE.

e)  $AP = \frac{5}{8} \lambda \rightarrow \Delta\phi = 225^\circ$

f)  $AP = \frac{6}{8} \lambda \rightarrow \Delta\phi = 270^\circ$

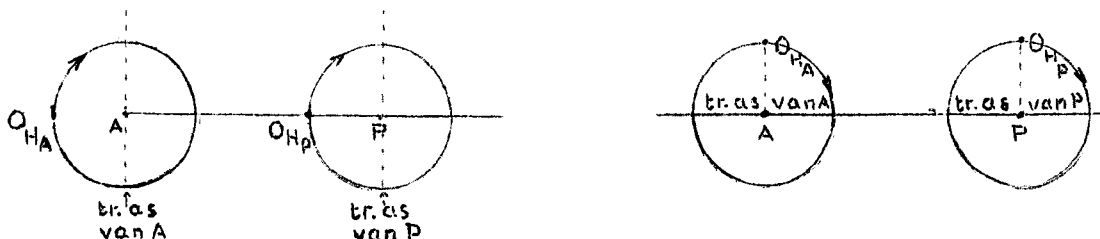
g)  $AP = \frac{7}{8} \lambda \rightarrow \Delta\phi = 315^\circ$

h)  $AP = \frac{8}{8} \lambda = \lambda \rightarrow \Delta\phi = 360^\circ \rightarrow$  MASSAPUNTEN DIE EEN GOLFLENGTE VAN ELKAAR LIGGEN HEBBEN OP IEDER OGENBLIK DEZELFDE FASE.

Opmerking: In bovenstaande constructies zijn op de hulpcirkels de nulpunten van de hulppunten niet aangegeven. Het deed bij deze constructies niets ter zake of de massapunten A en P transversaal of longitudinaal trilden.

Bij transv. trilling.

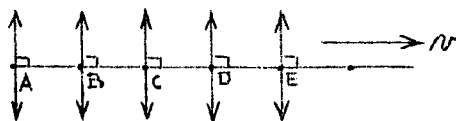
Bij long. trilling.



Par. 6) Indeling van de lopende golven.

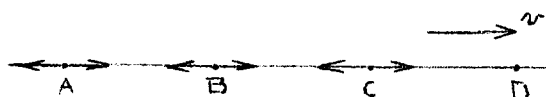
De lopende golven worden onderverdeeld in:

I De TRANSVERSALE LOPENDE GOLVEN.



De trillingsassen van de massapunten van de rij lopen onderling evenwijdig en staan  $\perp$  op de lijn door de nulpunten. De massapunten blijven dus tijdens hun trilling in hetzelfde platte vlak.

II De LONGITUDINALE LOPENDE GOLVEN.



De trillingsassen van de massapunten vallen langs de verbindinglijn der nulpunten. De massapunten van de rij blijven dus tijdens hun trilling op dezelfde rechte lijn.

Vraag: Bestaat er wiskundig verschil tussen de longitudinale en de transversale golven?

Antw.: Voor de afleiding van de formule  $U_t^P = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$ , doet het niets ter zake of de golf  $U_t^P$  transversaal of longitudinaal is. Deze formule geldt dus zowel voor transversale als longitudinale lopende golven.

Bij de constructies met de hulpcirkels is er alleen dit verschil, dat men bij de transversale golven het hulppunt moet projecteren op de as  $\perp \vec{v}$  en bij longitudinale golven op de as die met  $\vec{v}$  samenvalt.

Opm.: De indeling van de lopende golven in transversale en longitudinale golven volgt direct uit hetgeen we bij wijze van axioma over de werking van de koppelende krachten hebben aangenomen (zie par. 2) Men zou zich kunnen afvragen of het nog wel nodig was, deze indeling te vermelden.

Bij de behandeling van de POLARISATIE VAN HET LICHT zullen we te maken krijgen met een transversale lopende golf waarbij de trillingsassen van de punten van de rij wel loodrecht staan op de richting van de rij, maar waarvan de trillingsas van een volgend punt een bepaalde hoek maakt met de trillingsas van het voorgaande punt. (draaiing van het polarisatie-vlak)

Dit type transversale golf, dat zich alleen manifesteert als een gepolariseerde lichtstraal door een optisch actieve stof gaat, laten we in onze golftheorie geheel buiten beschouwing.

Door deze mogelijk verontrust, zal men wellicht de vraag stellen, of het in de natuur niet voorkomt, dat bij een transversale golf de trillingsassen wel in hetzelfde vlak blijven, maar dat de trillingsas van een volgend punt een kleinere hoek met de lijn der nulpunten maakt dan die van het voorgaande punt, zodat de transversale golf gaandeweg overgaat in een longitudinale golf.

DIT KOMT IN DE NATUUR NIET VOOR.



Par. 7) De TRANSVERSALE LOPENDE GOLVEN in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

N.B. 1) De proef met de GOLFMACHINE.

Conclusie. 1) De massapunten van de rij geraken achtereenvolgens in transversale trilling.  
De trillende massapunten blijven onderling gelijke trillingen uitvoeren: dezelfde frequentie, dezelfde amplitudo en dezelfde polarisatie-as,  $\perp \vec{v}$ .

2) Tussen de trillingstoestanden van twee op elkaar volgende massapunten bestaat op ieder ogenblik hetzelfde fase verschil, zodat het volgende punt hetzelfde doet als het voorgaande punt, maar alleen alles een vast tijdsinterval LATER; dus een vast tijdsinterval later de uiterste stand bereikt en hetzelfde tijdsinterval later de nulstand passeert enz.

3) De meetkundige plaats van de massapunten is op ieder ogenblik een sinuslijn.

4) Deze sinuslijn verschuift eenparig langs de rij der massapunten met dezelfde snelheid als die, waarmee de trilling zich in de rij voortplant.

2) In par. 3 en par. 5 hebben we de formule afgeleid voor de uitwijking van een willekeurig massapunt P van de rij, als functie van  $t_A$ , waarbij A het beginpunt van de rij is.

$$U_{t_A}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

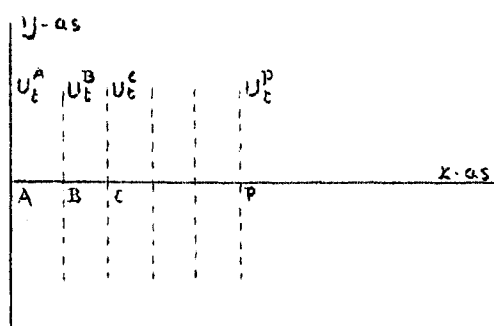
De afleiding van deze formule was gebaseerd op de bovenstaande conclusies 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup>.

N.B. Stelling. Uit deze formule volgt ook, dat:

I de meetkundige plaats van de transversaal trillende massapunten op ieder ogenblik een sinuslijn is.

II deze sinuslijn eenparig langs de rij der massapunten verschuift met dezelfde snelheid als die, waarmee de harmonische trilling zich in de rij voortplant.

Bewijs. ad I



De x-as is de meetkundige plaats van de nul-standen van de massapunten van de rij.

Ieder massapunt van de rij trilt op een lijn // y-as.

Voor een willekeurig massapunt P van de rij, geldt op ieder ogenblik:

$$U_{t_A}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{x^P}{\lambda} \right)$$

We beschouwen nu de uitwijkingen van de massapunten op een bepaald, wille-

keurig gekozen ogenblik. We geven  $t_A$  dus een bepaalde waarde. Dan volgt:

$$U_{t_A}^P = r \sin \left( \square - 2\pi \cdot \frac{x^P}{\lambda} \right)$$

Dit is een sinusfunctie van X.

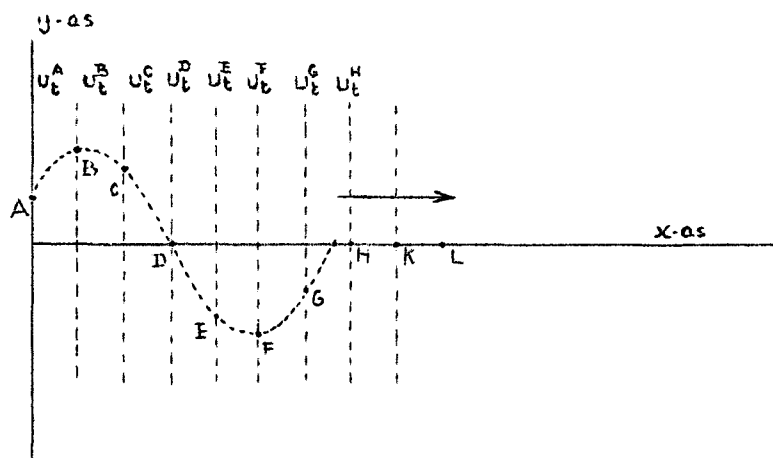
De uitwijkingen van de verschillende massapunten op hetzelfde ogenblik, worden dus vastgelegd door DEZELFDE sinusfunctie van X

Conclusie: De meetkundige plaats van de massapunten van de rij is op ieder ogenblik een sinuslijn.

In figuur:

zie blz. 34.

In figuur:

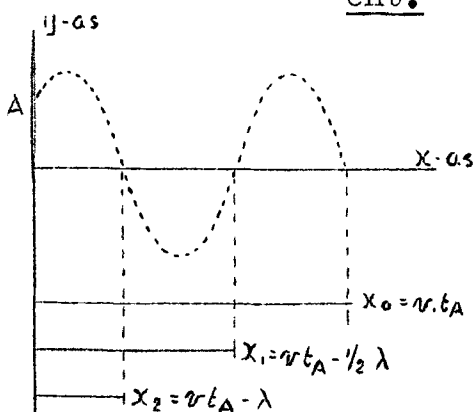


De figuur geeft de situatie op een zeker ogenblik. De massapunten H, K, L enz. zijn nog in rust.

Opmerking: Als de afstand tussen twee op elkaar volgende massapunten van de rij, in de nulstand infinitesimaal klein is, vullen de trillende massapunten de sinuslijn op. Dit is het geval bij een DRAAD van ideaal gekoppelde massapunten.

Bewijs ad II.  $U_t^X = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{X}{\lambda} \right)$

Voor iedere waarde van  $t_A$  stelt deze formule de vergelijking van een sinuslijn voor. De sinusgolven ( $\sim$ ; berg + dal) van de bij de verschillende waarden van  $t_A$  behorende sinuslijnen zijn congruent.



We geven nu  $t_A$  een willekeurig gekozen waarde tussen 0 en  $\infty$ . Van de bij deze waarde van  $t_A$  behorende sinuslijn bepalen we de  $x$ -coördinaten van de snijpunten met de  $X$ -as.

Voor deze snijpunten moet:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{x}{\lambda} &= 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \text{ enz.} \\ &= \pm n \cdot \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Lossen we hieruit  $x$  op, dan vinden we:

$$x = \frac{\lambda}{T} \cdot t_A \mp n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad x = v \cdot t_A \mp n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Maar  $\lambda = v T$

Nemen we aan, dat A op het ogenblik  $t_A = 0$  met trillen begonnen is, dan zijn de  $X$ -coördinaten van de  $A$  gevraagde snijpunten:

$$x_n = v \cdot t_A - n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x_n \text{ positief})$$

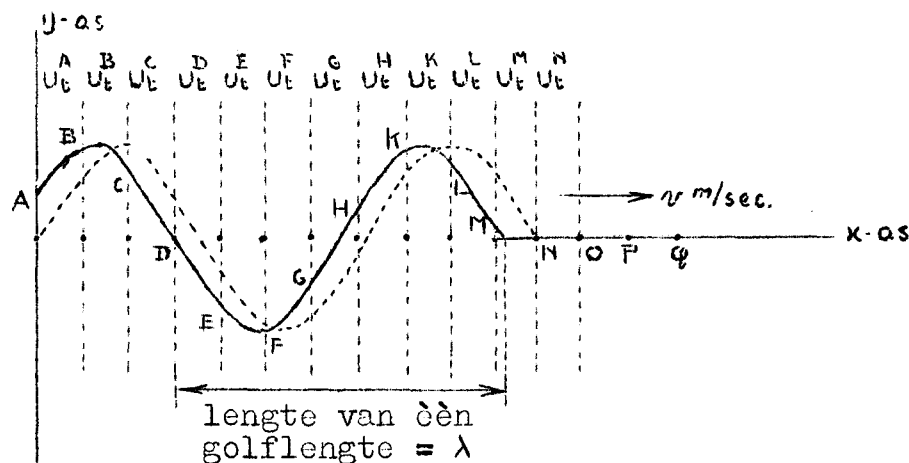
Laten we nu  $t_A$  met de tijd veranderen van  $0 \rightarrow T \rightarrow 2T \rightarrow \text{enz.}$  dan besluiten we uit deze vergelijking, dat:

- 1°) de afstand tussen twee op elkaar volgende snijpunten altijd gelijk blijft aan  $\frac{1}{2} \lambda$ .
- 2°) de snijpunten eenparig langs de  $X$ -as verschuiven met de snelheid  $v = \frac{\lambda}{T}$  m/sec, dus met de snelheid waarmee de harmonische trilling zich voortplant in de rij der ideaal gekoppelde massapunten.

Daar de bij de verschillende waarden van  $t_A$  behorende sinusgolven congruent zijn, hebben we dus eigenlijk te doen met EEN sinuslijn, die eenparig met snelheid  $v = \frac{\lambda}{T}$  m/sec langs de  $X$ -as verschuift.

Conclusie: De vergelijking  $U_t^x = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \right)$  stelt, bij een transversaal lopende golf, de vergelijking voor van een sinuslijn, die met de snelheid van de lopende golf eenparig langs de X-as verschuift. De afstand tussen de uiteinden van èèn sinusgolf (berg + dal), is gelijk aan de golflengte van de transversale lopende golf.

In figuur:



————— situatie op een willekeurig gekozen ogenblik  
 - - - - - situatie even later. Teken zelf in de figuur aan, waar de massapunten A, B, C, D enz. zich op dat ogenblik bevinden.

EindCONCLUSIE uit punt 1) en punt 2) van par. 7.

Zowel proefondervindelijk als theoretisch besluiten we:

- 1°) Als in een rij van ideaal gekoppelde massapunten een transversale lopende golf optreedt, dan is de meetkundige plaats van de trillende massapunten op ieder ogenblik een sinuslijn.
- 2°) Deze sinuslijn verschuift eenparig langs de rij der massapunten met dezelfde snelheid als die, waarmee de harmonische trilling zich in de rij voortplant.
- 3°) De afstand tussen de uiteinden van èèn sinusgolf (berg+dal) is gelijk aan de golflengte van de lopende golf.

Opmerking: Als men over een transversale lopende golf spreekt, denkt men eigenlijk alleen maar aan de eenparige verschuiving van de sinuslijn. Men realiseere zich echter goed, dat deze sinuslijn - verschuiving een VISUEEL GEBEUREN is.

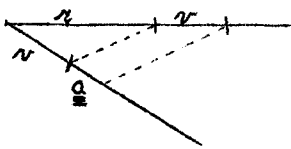
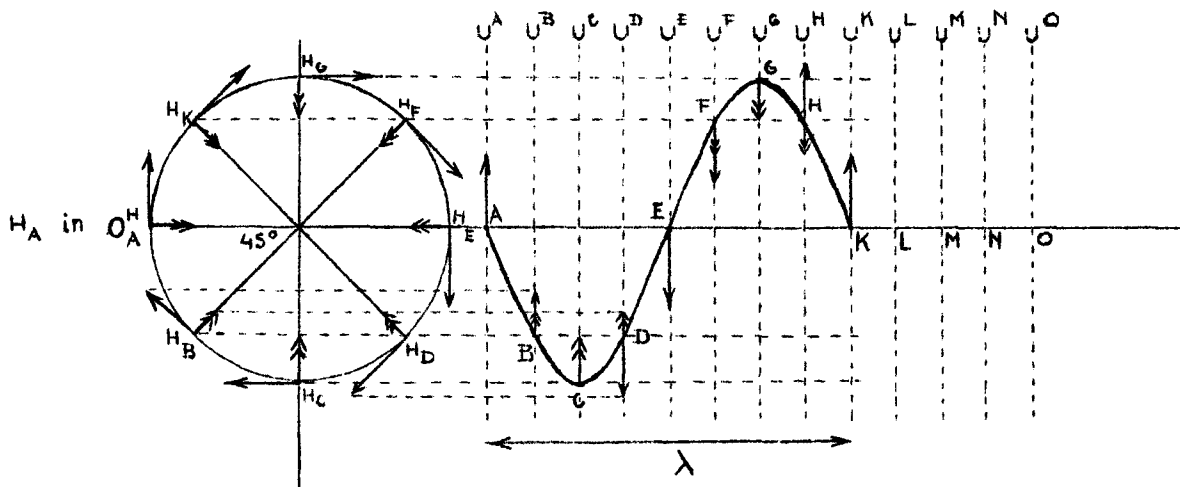
- 3) Opgave: Gegeven een DRAAD van ideaal gekoppelde massapunten. A, B, C, D, enz. zijn massapunten van de draad, die opvolgend  $\frac{1}{8} \lambda$  van elkaar liggen. Een trillingsbron brengt A in transversale harmonische trilling en zorgt er voor, dat A deze trilling blijft uitvoeren. Als de snelheid waarmee A zijn nulstand passeert en de amplitudo van de trilling gegeven zijn, CONSTRUEER dan de vorm van de draad, de snelheden en de versnellingen van de massapunten A, B, C, D, enz. op de ogenblikken:

- a)  $t_A = T$
- b)  $t_A = T + \frac{1}{4} T$
- c)  $t_A = T + \frac{1}{2} T$ ;  $t_A = T + \frac{3}{4} T$ ;  $t_A = T + T$ .

Oplossing: zie blz. 36.

Oplossing:

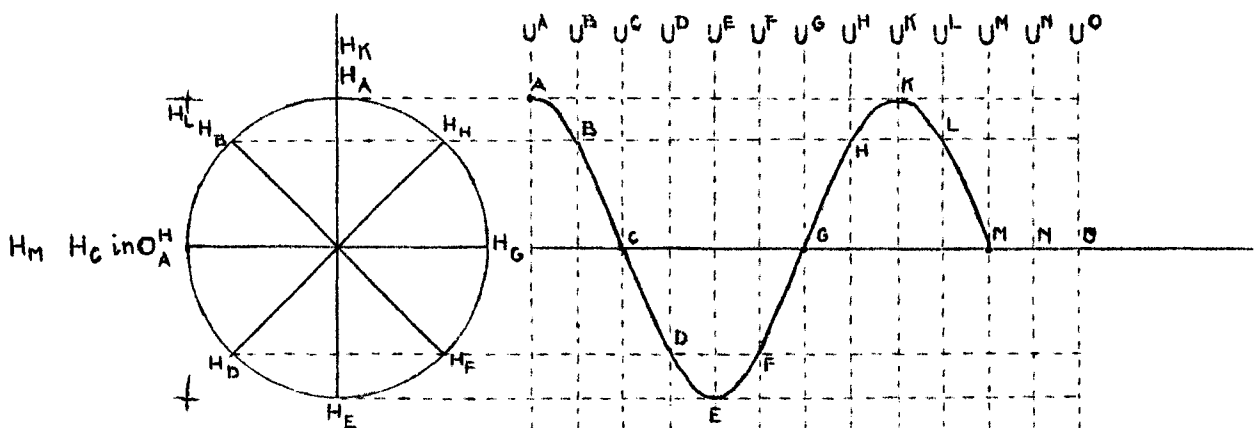
ad a)  $t_A = T$



Het hulppunt  $H_A$  passeert op dit ogenblik  $O_A^{H_A}$ ; omdat de nulpunten van A en B  $\frac{1}{8} \lambda$  van elkaar liggen, is  $H_B$   $45^\circ$  in fase ACHTER op  $H_A$ ;  $H_C$  is  $45^\circ$  achter op  $H_B$ ; enz.

N.B. De versnellingen van de massapunten zijn altijd naar hun nulstand toe gericht; recht evenredig met de uitwijking: maximaal in de uiterste stand, nul in de nulstand. De snelheden van de massapunten die tussen twee extreme punten van de sinuslijn liggen hebben dezelfde RICHTING: nul in de extreme punten, maximaal in de nulpunten.

ad b)  $t_A = T + \frac{1}{4} T$



Construeer zelf in deze figuur de snelheden en de versnellingen van de met letters aangegeven massapunten.

ad c) Zelf uitvoeren.

Beschouwing bij de constructies a, b, c.

$\alpha$ ) Aan bovenstaande constructies van de vormen die de draad op de verschillende ogenblikken heeft, liggen de volgende punten uit de theorie ten grondslag:

1<sup>o</sup>) Omdat de draad bestaat uit een rij van ideaal gekoppelde massapunten, hebben alle trillende massapunten dezelfde trillingstijd en dezelfde trillingsenergie. (par.2)

- 2°) Omdat de draad homogeen is, plant de harmonische trilling van A zich eenparig voort en hebben alle trillende massapunten van de draad dezelfde amplitudo. (par. 3, 3)
- 3°) De weg waarover de harmonische trilling van A zich in een trillingstijd voortplant, is een golflengte (par. 4)  
Dit is in de opgave  $8 \times \frac{1}{8} \lambda$
- 4°) Punten, die  $\frac{1}{8} \lambda$  van elkaar liggen hebben op ieder ogenblik een fase-verschil van  $45^\circ$  (par.5)
- β) De bij de constructies a, b en c gevonden vormen van de draad herkennen we als sinuslijnen. We besluiten dus ook uit deze constructies, dat de meetkundige plaats van de transversaal trillende massapunten op ieder ogenblik een sinuslijn is.
- γ) Tussen de geconstrueerde sinuslijnen bestaat een verband:
- 1°) De sinusgolven (berg + dal) zijn congruent.
  - 2°) Men vindt de sinuslijn van b) door de sinuslijn van a)  $\frac{1}{4} \lambda$  op te schuiven enz.

Uit deze constructies besluiten we dus ook, dat we bij een transversaal lopende golf te doen hebben met een sinuslijn, die eenparig langs de rij verschuift met de snelheid waarmee zich de transversale trilling in de rij voortplant, immers in ieder tijdsinterval van  $\frac{1}{4} T$  verschuift de sinuslijn  $\frac{1}{4} \lambda$ , en  
 $\lambda = v \cdot T$

Met nadruk stellen we echter vast, dat ALLEEN de SINUSLIJN verschuift: IEDER TRILLENDE MASSAPUNT BLIJFT OP ZIJN EIGEN TRILLINGSAS.

- δ) DAT de sinuslijn eenparig met snelheid  $v = \frac{\lambda}{T}$  verschuift, is een klaarblijkelijk gevolg van het feit, dat tussen twee bepaalde massapunten van de draad op ieder ogenblik een constant fase-verschil bestaat: Het volgende punt doet op ieder ogenblik wat het voorgaande punt een vast tijdsinterval vroeger deed.

Punten die  $\frac{1}{4} \lambda$  van elkaar liggen hebben een constant fase verschil van  $90^\circ = \frac{1}{4} T$ .

Dus: het massapunt M doet op  $t_A = T + \frac{1}{4} T$ , wat het massapunt K deed op  $t_A = T$

"	"	K	"	"	"	"	"	"	"	G
"	"	G	"	"	"	"	"	"	"	E

enz.

In het tijdsinterval van  $\frac{1}{4} T$  verschuift de sinuslijn  $\frac{1}{4} \lambda$  naar rechts. De sinus lijn verschuift dus eenparig met de snelheid waarmee de harmonische trilling zich in de rij voortplant.

Vraag: Hoeveel trillingsenergie moet de BRON in T sec. aan de draad geven, als een meter van de draad een massa heeft van m kg\*

Antw.: De massa van  $\lambda$  meter is  $\lambda \cdot m$  kg\*

$$\text{Dus } U = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \lambda \cdot m \cdot r^2 \text{ Joule.}$$

- 4) Samenvatting van de eigenschappen van een transversale lopende golf in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

I Ieder massapunt voert een harmonische trilling uit om zijn evenwichtsstand, waarvan de trillingsas  $\perp$  op de voortplantingsrichting van de golf.

Alle massapunten hebben dezelfde amplitudo r en dezelfde trillingstijd T.

II Twee opvolgende massapunten hebben op ieder ogenblik hetzelfde faseverschil, zodat het volgende punt een vast tijdsinterval later dan het voorgaande punt, zijn uiterste stand bereikt en hetzelfde tijdsinterval later dan het voorgaande punt door de nulstand gaat.

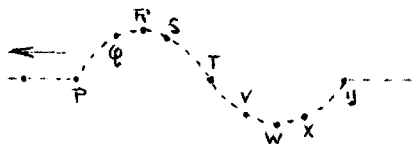
III Op ieder oogenblik is de meetkundige plaats der massapunten een sinuslijn.

IV De golflengte is een berg + een dal van deze sinuslijn.

V Tussen een hoogste en een laagste punt van een sinusgolf, heeft de snelheid van de massapunten dezelfde RICHTING (NIET dezelfde GROOTTE)

VI De sinuslijn verschuift eenparig met een snelheid die in grootte en richting gelijk is aan de snelheid waarmee de harmonische trilling zich in deze rij voortplant.

5) Examenvraag.



Geg.: De sinuslijn op een bepaald oogenblik en de richting waarin de lopende golf beweegt.

Gevr. Bepaal de richting van de snelheden van P, Q, R enz. op dit oogenblik.

Par. 8) LONGITUDINALE LOPENDE GOLVEN in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

1) Proef met de golfmachine.

Conclusie: 1<sup>o</sup>) De massapunten van de rij geraken achtereenvolgens in longitudinale trilling.

De trillende massapunten blijven onderling gelijke trillingen uitvoeren: dezelfde frequentie, dezelfde amplitudo en dezelfde polarisatie-as, die nu dus samenvalt met de drager van  $\vec{v}$ .

2<sup>o</sup>) Tussen de trillingstoestanden van twee op elkaar volgende massapunten bestaat op ieder oogenblik eenzelfde fase-verschil.

3<sup>o</sup>) Het geheel geeft de indruk, dat zich in de rij een "verdichting" gevolgd door een "verdunning" voortbeweegt.

2) Het in punt drie van deze conclusie genoemde VISUELE GEBEUREN, wordt inzichtelijk, door de trillingssituatie van de verschillende massapunten van de rij voor op elkaar volgende oogenblikken te construeren.

DEZE CONSTRUCTIE BERUST OP TWEE INZICHTEN:

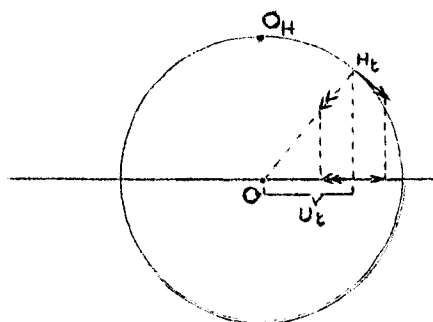
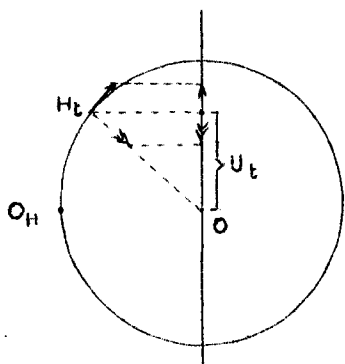
I ALGEBRAÏSCH bestaat er GEEN VERSCHIL tussen longitudinale en transversale lopende golven: In beide gevallen wordt de uitwijking van een massapunt op een bepaald oogenblik gegeven door de formule:

$$U_{t_A}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right)$$

II Deze uitwijking kan in beide gevallen geconstrueerd worden met behulp van een hulpcirkel en een hulppunt.

Heeft men de uitwijking van een massapunt geconstrueerd VOOR EEN TRANSVERSALE TRILLING, dan vindt men dezelfde uitwijking VOOR EEN LONGITUDINALE TRILLING DOOR DE PROJECTIEAS EN DE HULPCIRKEL OVER EEN HOEK VAN 90° TE DRAAIEN OM DE NULSTAND VAN HET MASSAPUNT.

Dus:



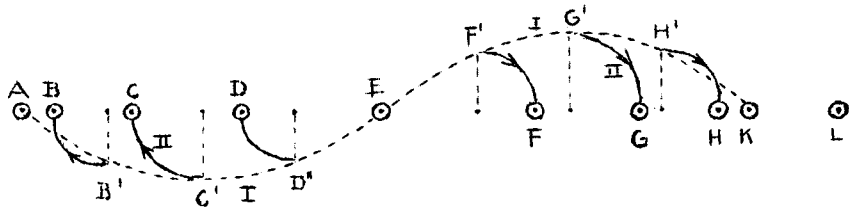
proj.as bij  
← long. trill.

↑ projectieas bij tr.v.tr.

De projectie-as en de hulpcirkel zijn  $90^\circ$  met de klok mee om de nulstand O van het massapunt gedraaid: met de klok mee, om de uitwijking, de snelheid en de versnelling hetzelfde algebraïsche teken te laten behouden.

- 3) Opgave I. Gegeven een draad van ideaal gekoppelde massapunten. A, B, C, enz. zijn massapunten van deze draad, die opvolgend  $1/8 \lambda$  van elkaar liggen. Een trillingsbron brengt A in longitudinale harmonische trilling en zorgt er voor, dat A deze trilling blijft uitvoeren. Als de amplitudo van de trilling van A gegeven is, en bovendien gegeven is, dat de snelheid van A ten tijde  $t_A = 0$  positief is, CONSTRUEER dan de plaats-situatie van A, B, C enz. op het ogenblik  $t_A = T$

Oplossing.



- Constructie: I We construeren de sinuslijn voor het geval, dat de golf TRANSVERSAAL was. We weten nu de uitwijkingen van de massapunten op dit ogenblik. De uitwijkingen van G' en C' zijn op dit ogenblik gelijk aan de amplitudo van A.
- II We draaien de uitwijkingen van B', C', D' enz. met de klok mee over een hoek van  $90^\circ$  om de resp. nulstanden.



Let er op, dat alle punten met dezelfde draai-richting worden neergeslagen!

Conclusie: De door het teken  $\odot$  aangegeven punten, geven de plaats aan van de massapunten A, B, C enz. op het ogenblik  $t_A = T$

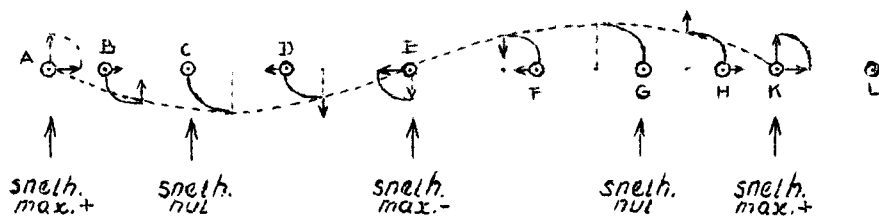
Benaming: De bij deze constructie getekende sinuslijn zullen we voortaan de "hulp-sinuslijn" noemen.

Opmerking: Uit de constructie blijkt, dat de amplitudo bij een longitudinaal lopende golf niet willekeurig groot kan zijn.

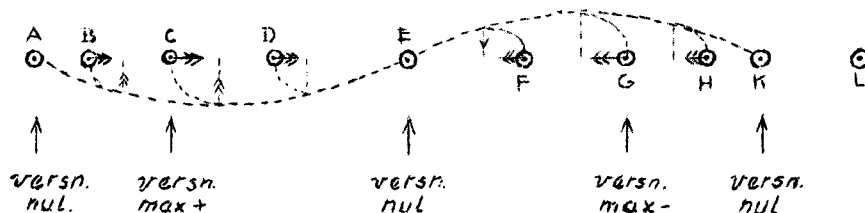
Opgave II. Als in opgave I bovendien de snelheid waarmee A zijn nulstand passeert gegeven is, construeer dan de snelheden en de versnellingen op het ogenblik  $t_A = T$  voor de massapunten A, B, C enz.

Oplossing: In par. 7 punt 3 hebben we gezien hoe we de snelheden en versnellingen van de overeenkomstige punten op de hulp-sinuslijn kan construeren. Door de boven beschreven draaiingen uit te voeren, vinden we de snelheden en de versnellingen op  $t_A = T$  van de massapunten A, B, C enz.

Resultaat. a) de snelheden.



b) de versnellingen.



N.B. de snelheid is max. als het massapunt de nulstand passeert; nul in de uiterste stand.  
de versnelling is nul als het massapunt de nulstand passeert; max. in de uiterste stand.

De versnelling is altijd naar de nulstand toe gericht!

Opgave III.

Geg.: de hulpsinuslijn; de longitudinale lopende golf beweegt naar LINKS.

Gevr:

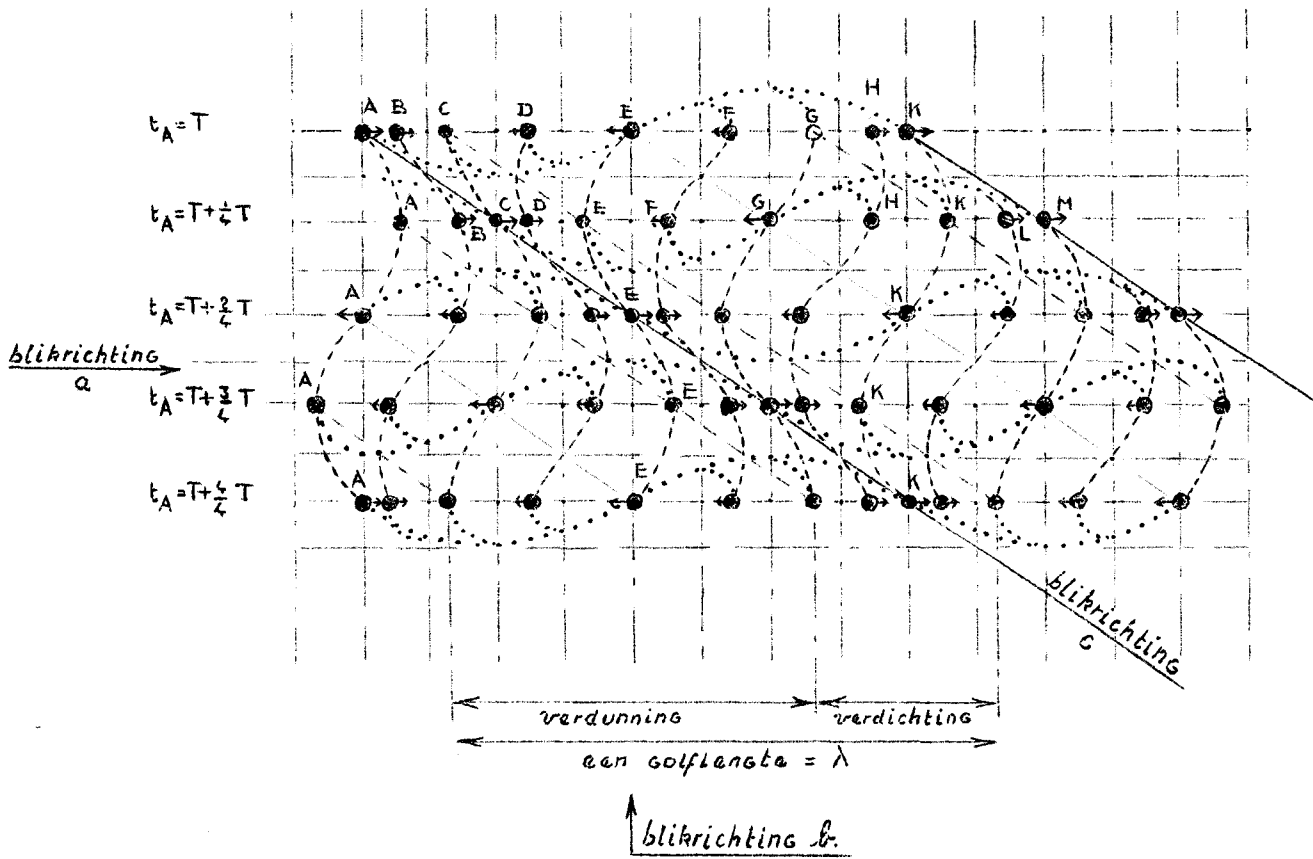
- construeer de plaats situatie.
- Maak uit, hoe de snelheid van A op dit ogenblik gericht is.
- Geef de snelheden van de andere massapunten aan door pijltjes; de grootte van de pijltjes schatten.



N.B. Opgave IV. Dezelfde gegevens als bij opgave I.

Gevr.: Construeer de plaats-situatie op  $t_A = T$ ;  $T + \frac{1}{4}T$ ;  $T + \frac{2}{4}T$ ;  $T + \frac{3}{4}T$ ;  $T + \frac{4}{4}T$ .

Oplossing:



Houdt men het papier horizontaal ter hoogte van het oog, met blik richting:

- dan ziet men, dat de hulpsinuslijn in ieder tijdsinterval



van  $\frac{1}{4}T$  opschuift over een stuk  $\frac{1}{4}\lambda$ .

- b) dan ziet men, dat ieder massapunt dezelfde longitudinale harmonische trilling uitvoert:  
Tussen de trillingstoestanden van twee bepaalde massapunten bestaat op ieder ogenblik hetzelfde fase-verschil.
- c) dan ziet men, dat zich in de rij een verdichting gevolgd door een verdunning eenparig voortbeweegt met dezelfde snelheid als die waarmee de harmonische trilling zich voortplant.

4) EINDCONCLUSIE over de longitudinale lopende golven in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

I Ieder massapunt in de golf voert eenzelfde harmonische trilling uit, waarvan de trillingsas samenvalt met de drager van  $\vec{v}$ .

II Het constante fase-verschil tussen de trillingstoestanden van de opvolgende massapunten van de rij, heeft tot gevolg, dat het geheel de indruk maakt, dat verdichtingen gevolgd door verdunningen zich eenparig in de rij voortbewegen.  
De snelheid van deze beweging is gelijk aan de snelheid waarmee de longitudinale harmonische trilling zich in de rij voortplant,  $\vec{v}$ .

N.B. III In de verdichting is de snelheid der massapunten gelijk gericht met  $\vec{v}$ ,  
In de verdunning " " " " " tegengesteld gericht aan  $\vec{v}$ .

N.B. IV De golflengte  $\lambda$  van de longitudinale lopende golf = de lengte van een verdichting + de lengte van een verdunning.

Par. 9) Beschouwing over de voortplantingssnelheid, de frequentie en de golflengte van transversale en longitudinale lopende golven.

1) De voortplantingssnelheid  $\vec{v}$ .

In par. 3 punt 4, hebben we reeds gezegd, dat het enige eigene van de rij der ideaal gekoppelde massapunten de snelheid is, waarmee de trilling zich voortplant.

Omdat we toen buiten beschouwing lieten of de trilling transversaal of longitudinaal was, moeten we nu nagaan of het voor de grootte van de voortplantingssnelheid van een harmonische trilling in een rij, verschil maakt of de trilling transversaal of longitudinaal is.

De proef Par. 1. A<sub>1</sub>, leert, dat de snelheid waarmee de trillingsenergie wordt doorgegeven

- 1°) afhangt van de sterkte van de koppeling  
2°) voor longitudinale trillingen GROTER is dan voor transversale trillingen.

We besluiten hieruit, dat de voortplantingssnelheid van een trilling in een rij van ideaal gekoppelde massapunten:

- 1°) afhangt van de sterkte der koppeling en de massa van de massapunten.  
2°) voor longitudinale trillingen GROTER is dan voor transversale trillingen.

Uit de ervaring en uit de formule, die in de hogere natuurkunde over deze voortplantingssnelheden worden afgeleid, volgt:

I In eenzelfde medium in eenzelfde toestand, hebben ALLE transversale lopende golven DEZELFDE SNELHEID.  
d.w.z. V HANGT DAN NIET AF VAN DE FREQUENTIE EN OOK NIET VAN DE AMPLITUDO.

II In eenzelfde medium in eenzelfde toestand, hebben ALLE longitudinale lopende golven DEZELFDE SNELHEID.

III In eenzelfde medium in eenzelfde toestand is

$$v_{\text{longitudinaal}} > v_{\text{transversaal}}.$$

2) De frequentie:  $f = \frac{1}{T}$  Hertz. (Heinrich Hertz. 1857-1894)

De frequentie van de massadeeltjes van een medium IS ALTIJD GELIJK AAN DE FREQUENTIE VAN DE BRON: DE MASSADEELTJES TRILLEN NIET VRIJ, MAAR GEDWONGEN.

3) De golflengte  $\lambda$ .

Per definitie is:  $\lambda = v T$  }  
 Maar  $f = \frac{1}{T}$  } dus:  $\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = f \cdot \lambda$

Conclusie:

$$v = f \cdot \lambda \text{ m/sec.}$$

N.B. Het linker lid van deze vergelijking heeft voor eenzelfde medium in eenzelfde toestand voor alle transversale golven dezelfde waarde en voor alle longitudinale golven een (andere) constante waarde.

Daarom geeft men aan deze vergelijking de voorkeur.

Uit deze vergelijking volgt onmiddellijk:

IN EENZELFDE MEDIUM IN EENZELFDE TOESTAND IS DE GOLFLENGTE OMGEKEERD EVENREDIG MET DE FREQUENTIE.

Zie par. 1, B<sub>2</sub>: maakt men de frequentie 2 x zo groot, dan wordt de golflengte<sup>2</sup>de helft.

-----

Staaude golven in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

Par. 1) Het begrip interferentie.

- 1) Bij het samenstellen van harmonische trillingen hebben we gezien, dat een massapunt tegelijkertijd kan deelnemen aan twee (of meer) harmonische trillingen die onderling onafhankelijk zijn.

We vragen nu: Geldt dit ook voor de massapunten van een rij van ideaal gekoppelde massapunten?

Antwoord. Bij wijze van axioma hebben we aangenomen, dat de koppeling in de rij zodanig is, dat de massapunten iedere denkbaar mogelijke harmonische trilling kunnen uitvoeren, m.a.w. dat zich in een rij van ideaal gekoppelde massapunten iedere denkbaar-mogelijke harmonische trilling kan voortplanten.

WE NEMEN NU, eveneens bij wijze van axioma, VERDER AAN, dat:

- 1<sup>o</sup>) zich in een rij van ideaal gekoppelde massapunten TEGELIJKERTIJD twee (of meer) onderling onafhankelijke harmonische trillingen kunnen voortplanten.

- 2<sup>o</sup>) deze gelijktijdige voortplanting plaats heeft ongeacht het feit, of de trillingen zich in dezelfde of in tegengestelde richting voortplanten.

In het deel van de rij waarover zich dan meerdere trillingen hebben voortgeplant, zullen de massapunten ELKE van deze onderling onafhankelijke trillingen TEGELIJKERTIJD BLIJVEN uitvoeren.

De theorie over het samenstellen van harmonische trillingen geldt dus ook voor de massapunten van een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

- 2) Veronderstellen we, dat zich in de rij twee onderling onafhankelijke harmonische trillingen voortplanten, dan is de resulterende uitwijking van een, aan beide trillingen deelnemend massapunt, op ieder ogenblik de VECTORSOM van de uitwijkingen, die dit massapunt t.g.v. elk der trillingen op het beschouwde ogenblik zou gehad hebben.

Hebben de samenstellende trillingen dezelfde trillings-as, dan is de resulterende uitwijking de algebraïsche som van deze uitwijkingen.

Bepaalt men nu voor IEDER massapunt van de rij de resulterende uitwijking op een bepaald ogenblik, dan verkrijgt men de RESULTERENDE PLAATSSITUATIE van de massapunten van de rij op DAT ogenblik.

HET GAAT ONS IN HET KOMENDE OM DEZE RESULTERENDE PLAATSSITUATIE ALS FUNCTIE VAN DE TIJD.

- 3) Daar iedere zich in een rij van ideaal gekoppelde massapunten voortplantende harmonische trilling de "kop" is van een LOPENDE GOLF, kunnen we het bovenstaande ook aldus formuleren:

DE MASSAPUNTEN VAN EEN RIJ VAN IDEAAAL GEKOPPELDE MASSAPUNTEN KUNNEN TEGELIJKERTIJD DE TRILLINGEN UITVOEREN VAN TWEE OF MEER ONDERLING ONAFHANKELIJKE LOPENDE GOLVEN.

DE RESULTERENDE PLAATSSITUATIE OP EEN BEPAALD OGENBLIK VAN DE MEERVOUDIG TRILLENDE MASSAPUNTEN VAN DE RIJ IS DAN HET RESULTAAT VAN DE VECTORIELE SAMENSTELLING VAN DE UITWIJINGEN DIE DEZE MASSAPUNTEN OP DAT OGENBLIK t.g.v. ELKE GOLF ZOU DEN HEBBEN.

- 4) Wij VINDEN de resulterende plaatssituatie door de boven beschreven samenstelling uit te voeren; de TRILLINGSACTIVITEITEN van de lopende golven echter VERRICHTEN deze vectoriële samenstelling bij de bepaling van de resulterende bewegingen van de massapunten van de rij.

Welnu: HET VERRICHTEN VAN DEZE SAMENSTELLING noemt men INTERFEREREN.

Men zegt dan: DAT DE LOPENDE GOLVEN MET ELKAAR INTERFEREREN

HET VERSCHIJNSEL van deze verrichting noemt men  
INTERFERENTIE.

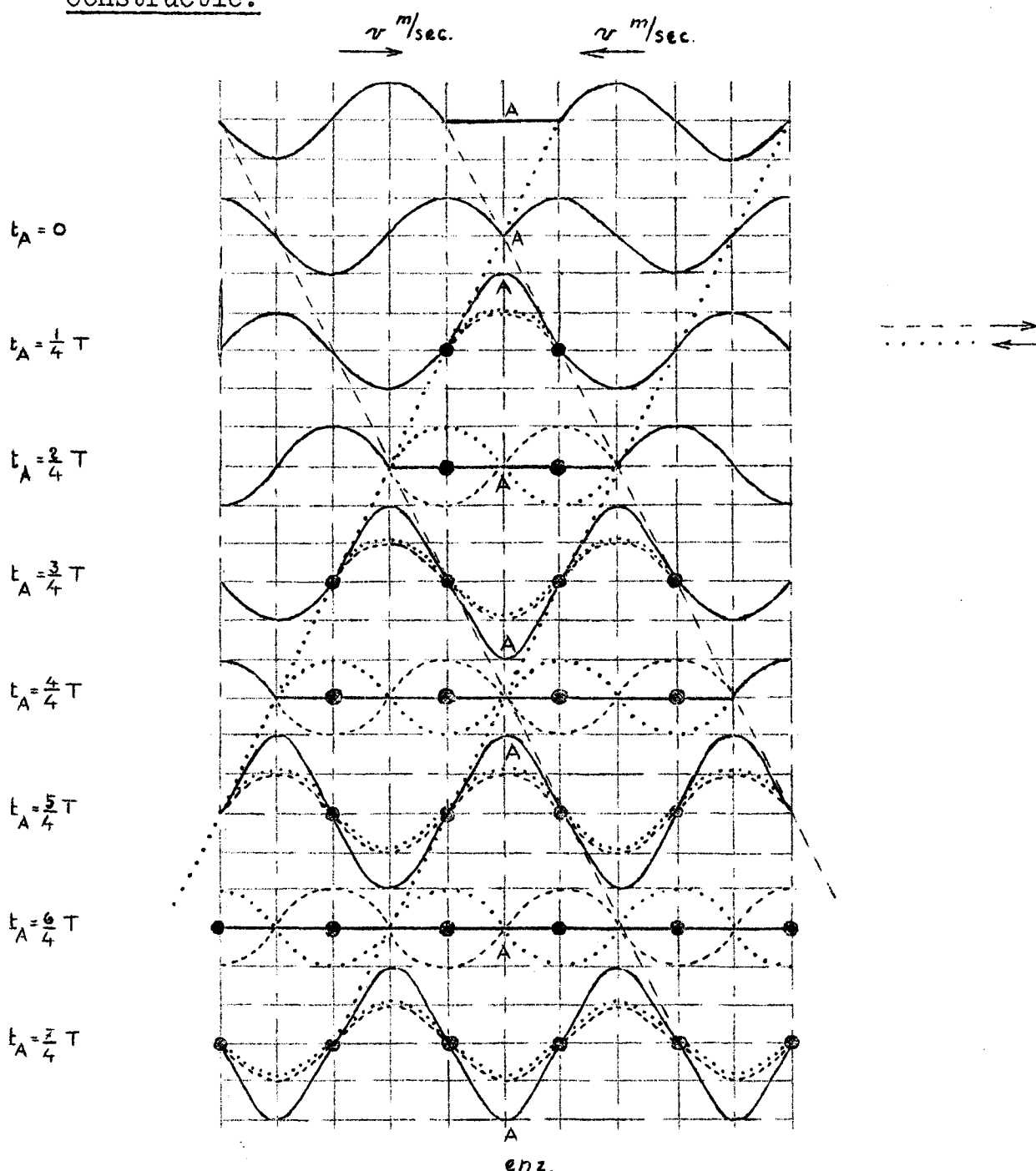
5) We zullen het bovenstaande toelichten aan de hand van een constructie.

We beschouwen het geval, dat zich in een draad van ideaal gekoppelde massapunten twee tegengesteld gerichte transversale golven voortbewegen.

Van deze golven veronderstellen we dat ze:

- 1<sup>o</sup>) gelijk gepolariseerd zijn, met trillingsas in het vlak van tekening
- 2<sup>o</sup>) dezelfde frequentie en dus ook dezelfde golflengte hebben ( $v = f \cdot \lambda$ ;  $v$  gelijk,  $f$  gelijk  $\rightarrow \lambda$  gelijk)
- 3<sup>o</sup>) dezelfde amplitudo hebben.

Constructie:



A is in deze figuur het ontmoetingspunt van de gelijk-gepolariseerde, tegengesteld gerichte transversale lopende golven. Het interferentie gebied breidt zich naar beide kanten uit met de snelheid  $v$  m/sec. De resulterende plaatssituatie in dit interferentiegebied wordt gevonden door de uitwijkingen t.g.v. de twee lopende golven voor ieder massapunt algebraïsch op te tellen. Uit de figuur blijkt, dat de resulterende plaatssituatie van de

massapunten IN het interferentiegebied op ieder oogenblik van geheel andere aard is dan BUITEN dat gebied: In het interferentiegebied BLIJVEN bepaalde massapunten STEEDS IN RUST; de andere massapunten in dit gebied voeren wel transversale harmonische trillingen uit waarvan de frequenties gelijk zijn aan die van de lopende golven, maar de amplitudo's zijn niet gelijk aan die van de lopende golven en ook onderling verschillend.

Deze bijzonderheden zullen in de volgende paragraaf uitvoerig ter sprake komen: nu gaat het ons er alleen om, om een beeld te krijgen van het interferentie-verschijnsel.

- 6) Bij de proef van Melde (zie par. 4) zullen we experimenteel bewijzen, dat het boven beschreven interferentie-verschijnsel WERKLIJK in een gespannen draad kan optreden. Bij de proeven van Kundt en Quincke (zie later) zullen we het interferentie verschijnsel aantonen voor geluidsgolven in gaskolommen, bij de proef van Hertz voor electro magnetische golven in het vacuum, bij de proef van Fresnel voor lichtstralen in het vacuum of een medium. Bij al deze proeven zal blijken, dat de deeltjes van een medium kunnen trillen "door tussenkomst" van twee of meer golfbewegingen. (interferentia = tussenkomst), met het gevolg, dat er dan op ieder oogenblik een resulterende plaatssituatie van de deeltjes van het medium ontstaat.

#### 7) Opmerkingen.

- a) Voor het examen is het voldoende, als men interferentie van golfbewegingen aldus definieert:

Onder interferentie van golfbewegingen verstaat men het verschijnsel, waarbij de deeltjes van een medium trillen onder invloed van twee of meer golfbewegingen.

of: Interferentie is het inwerken van twee of meer golfbewegingen op DEZELFDE deeltjes van een medium.

Geen van deze definities zegt echter wat interferentie IS: de eerste definitie vermeldt alleen de omstandigheid waaronder interferentie optreedt; de tweede definitie laat ons in het onzekere over hetgeen er bij dat "inwerken" gebeurt.

- b) Uit de figuur van punt 5, kunnen we ook aflezen wat er in de draad gebeurt, als zich twee golfPORTIES in tegengestelde richting voortbewegen.

Stel, dat deze golfporties een lengte hebben van èèn sinusgolf (berg + dal) en elkaar op  $t = 0$  in A ontmoeten, dan zullen deze golfporties in het tijdsinterval van  $t = 0$  tot  $t = T$  met elkaar interfereren. Op  $t = T$  zijn de golfporties weer van elkaar losgekomen en gaan dan verder "alsof er niets gebeurd is".

We besluiten hieruit, dat golfporties DOOR ELKAAR HEEN kunnen gaan, zonder daarbij enige verandering te ondergaan. Dit ziet men dagelijks gebeuren bij golven op een wateroppervlak.

Geluidsgolven gaan door elkaar heen, lichtstralen idem enz.

Deze eigenschap is echter een volstrekt privilege van golven!

Par. 2) Interferentie van lopende golven in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

N.B. 1) We zullen in de komende theorie altijd veronderstellen:

I dat de interfererende golven òf allen transversaal òf allen longitudinaal zijn.

Gevolg: als wij over interfererende golven spreken HEBBERN DEZE GOLVEN ALTIJD DEZELFDE VOORTPLANTINGSSNELHEID (zie blz.41)

II dat de interfererende golven GELIJK GEPOLARISEERD zijn. De trillingsvlakken van de golven vallen dus altijd samen.

III dat de interfererende golven DEZELFDE FREQUENTIE hebben.  
Gevolg a) In onze theorie zal ieder punt van het medium trillen onder invloed van twee of meer harmonische trillingen MET DEZELFDE TRILLINGSAS EN DEZELFDE

EN DEZELFDE FREQUENTIE. DUS VOERT IEDER PUNT VAN HET MEDIUM DAN EEN HARMONISCHE TRILLING UIT.

- b) De interfererende golven hebben in onze theorie altijd DEZELFDE GOLFLENGTE ( $v = f \cdot \lambda$ ;  $v$  gelijk,  $f$  gelijk)

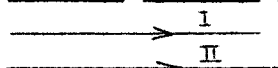
IV dat de interfererende golven dezelfde amplitudo hebben

V dat er geen demping optreedt.

- 2) We onderscheiden nu TWEE GEVALLEN.

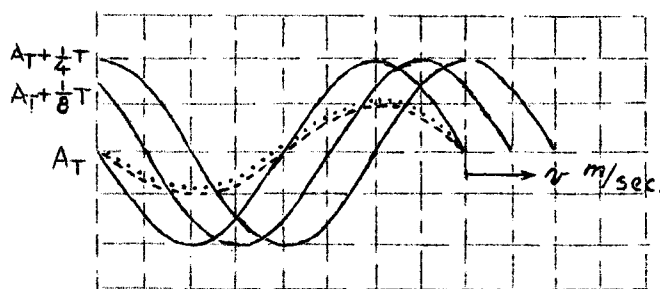
Geval I. De interfererende golven hebben DEZELFDE VOORTPLANTINGS RICHTING.

Dus:



- A) De interfererende golven hebben bovendien DEZELFDE FASE, d.w.z. ieder massapunt van de rij neemt deel aan twee harmonische trillingen met dezelfde fase.

- a) Behandeling van het gebeuren door constructie.



↑  
trillingsassen van  
de massapunten als  
golven transversaal zijn.

A is het beginpunt van de rij.

$t_A = T$ : de plaatssituatie t.g.v. de eerste golf wordt gegeven door -----  
" " " " " tweede " wordt gegeven door .....

de RESULTERENDE PLAAATSSITUATIE wordt gegeven door \_\_\_\_  
Dit is een sinuslijn waarvan:

- 1<sup>o</sup>) de golflengte gelijk is aan de golflengte van de gegeven golven.  
2<sup>o</sup>) de amplitudo gelijk is aan 2 X de amplitudo v.d. gegeven golven.

$t_A = T + \frac{1}{8} T$ : Deze resulterende sinuslijn is  $\frac{1}{8} \lambda$  naar rechts verschoven.

$t_A = T + \frac{1}{4} T$ : De resulterende sinuslijn is weer  $\frac{1}{8} \lambda$  verder opgeschoven enz.

Zijn de lopende golven longitudinaal, dan geeft bovenstaande figuur de constructie van de RESULTERENDE HULP-SINUSLIJN voor. (Voor dat geval is de amplitudo in de figuur te groot genomen).

- b) Wiskundige behandeling.

$$U_I^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right)$$

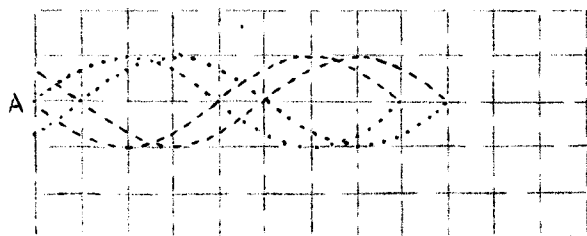
$$U_{II}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right)$$

$$U_{t_A}^{P, res} = 2 r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right) +$$

Dit is de vergelijking van een lopende golf met golflengte  $\lambda$  en amplitudo  $2 r$ .

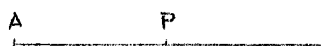
Conclusie uit A: Hebben de interfererende lopende golven DEZELFDE FASE, dan is de resulterende plaatssituatie van de massapunten van de rij als functie van de tijd een lopende golf, waarvan:

- 1°) De golflengte, de frequentie en de voortplantingssnelheid gelijk zijn aan de overeenkomstige grootheden van de interfererende golven.
  - 2°) De amplitudo gelijk is aan  $2 \times$  de amplitudo van de interfererende golven. (ZEGGE: TWEE MAAL!!)
- B) De interfererende golven hebben TEGENGESTELDE FASE d.w.z. ieder massapunt van de rij neemt deel aan twee harmonische trillingen met tegengestelde fase.
- a) Behandeling van het gebeuren door constructie.



De massapunten van de rij bevinden zich op ieder ogenblik IN HUN NULSTAND.

- b) Wiskundige behandeling.



$$U_I^P = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right) = + r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right)$$

$$U_{II}^P = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_A \pm \pi - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right) = - r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right)$$

---


$$U_{t_A}^{P, res} = 0$$

De massapunten blijven in hun NULSTAND.

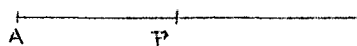
Conclusie uit B: Hebben de interfererende lopende golven TEGENGESTELDE FASE, dan blijven de massapunten op ieder ogenblik in hun NULSTAND.

Men zegt in dit geval: DAT DE INTERFERERENDE GOLVEN ELKAAR UITDOVEN.

- C) De interfererende golven hebben een FASE VERSCHIL  $\phi$ , d.w.z. ieder massapunt van de rij neemt deel aan twee harmonische trillingen die een faseverschil  $\phi$  hebben.

- a) Voer de constructie zelf uit.

- b) Wiskundige behandeling.



$$U_I^P = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right)$$

$$U_{II}^P = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \phi - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right)$$

---


$$U_{t_A}^{P, res} = 2r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{\phi}{2} - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right) \cdot \cos \frac{\phi}{2}$$

$$\text{dus: } U_{t_A}^{P, res} = 2r \cos \frac{\phi}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{\phi}{2} - 2\pi \frac{AP}{\lambda}\right)$$

Conclusie: Hebben de interfererende golven een faseverschil  $\phi$ , dan is de resulterende plaatssituatie van de massapunten van de bij als functie van de tijd een lopende golf waarvan:

1<sup>o</sup>) de golflengte, de frequentie en de voortplantingssnelheid dezelfde waarden hebben als de overeenkomstige grootheden van de interfererende golven.

2<sup>o</sup>) de amplitudo gelijk is aan:

$$R = |2r \cos \frac{\phi}{2}|$$

Opmerking:

Als  $\phi = 0 \rightarrow R = 2r \rightarrow$  max. versterking.

Als  $\phi$  ligt tussen  $0^\circ$  en  $120^\circ$  of  $240^\circ$  en  $360^\circ$  }  $\rightarrow$  versterking.

Als  $\phi = 120^\circ$  of  $\phi = 240^\circ$  }  $\rightarrow R = r$

Als  $\phi$  ligt tussen  $120^\circ$  en  $240^\circ$   $\rightarrow$  verzwakking.  
 $\phi = 180^\circ \rightarrow$  uitdoving.

Theorema: Hoe zit het met de verantwoording van de energie? Het heeft de schijn alsof hier iets niet klopt!

Immers: De energie van een harmonisch trillend punt wordt gegeven door de formule:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot r^2 \text{ Joule.}$$

Welnu: In geval A is de resulterende amplitudo 2 x de amplitudo van de interfererende golven.

Ieder massapunt heeft bij de resulterende trilling dus de energie:

$$U_{\text{res}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot 4 r^2 \text{ Joule} = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule.}$$

De som van de trillingsenergieën, die ieder massapunt t. g.v. elk der lopende golven zou hebben is echter:

$$U_I + U_{II} = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule} \quad !!!$$

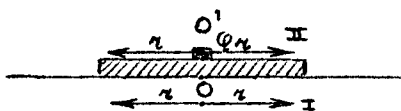
In geval B hebben de massapunten geen energie. Wil dit zeggen dat er energie gewoonweg verdwijnt?

In geval C: moeilijkheid analoog aan geval A.

Antwoord:

Om deze kwestie tot klaarheid te brengen, moeten we de verrichting van de samenstelling bij interferentie nader bezien. Daartoe beschouwen we eerst twee natuurkundig verschillende gevallen, dat een massapunt deelneemt aan twee harmonische trillingen met hetzelfde nulpunt, dezelfde trillingsas, dezelfde frequentie en dezelfde amplitudo.

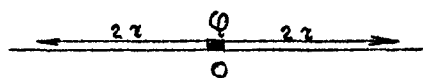
Geval 1.



Op een horizontaal vlak ligt een lat, op deze lat ligt een massapunt Q.

De lat voert een harmonische trilling I uit om O; tegelijkertijd voert het massapunt Q op de lat de harmonische trilling II uit, die dezelfde ampl. r en de zelfde trillingstijd T heeft als I.

Geval 2.



Hetzelfde massapunt ligt op een horizontaal vlak en voert om het punt O een harmonische trilling uit met amplitudo 2r (dus twee maal zo groot als de ampl. van I en II) en dezelfde trillingstijd T als I en II



$$U_t^I = r \sin \frac{2\pi'}{T} t$$

$$U_t^{II} = r \sin \frac{2\pi'}{T} t$$

$$\text{dus } U_t^{\text{res}} = 2r \sin \frac{2\pi'}{T} t$$

WISKUNDIG is het ALSOF Q slechts EEN harmonische trilling uitvoert, en wel dezelfde als in geval 2)

$$U_t = 2r \sin \frac{2\pi'}{T} t$$

WISKUNDIG kan men deze functie schrijven als

$$U_t = r \sin \frac{2\pi'}{T} t + r \sin \frac{2\pi'}{T} t$$

WISKUNDIG kan men het dus VOOR STELLEN ALSOF Q deelneemt aan de TWEE harmonische trillingen I en II.

vraag:

Hoe groot is in elk van deze gevallen de trillingsenergie van Q?

antwoord:

Q neemt DIRECT deel aan de trilling II

Q neemt DIRECT aan deze trilling deel.

Q neemt INDIRECT deel aan de trilling I.

Q heeft maar EEN trillingsenergie.

Men kan dus zeggen, dat Q TWEE trillingsenergieën heeft, die echter NATUURKUNDIG van elkaar GESCEIDEN blijven.

$$U_I = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \text{ Joule}$$

$$U_{II} = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \text{ Joule}$$

De WISKUNDIGE SOM van deze energieën is:  $2 \left( \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule}$

Deze is:

$$U = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} (2r)^2 = 4 \left( \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ J.}$$

Deze som heeft echter geen NATUURKUNDIGE betekenis.

Conclusie: In geval 2) is de trillingsenergie van Q NIET gelijk aan de som ~~van de som~~ van de trillingsenergieën van de trillingen waarin men de trilling van Q WISKUNDIG kan ontbinden: de trillingsenergie van Q is gelijk aan de energie van de harmonische trilling, die Q DIRECT o.i.v. zijn ENKELVOUDIGE KOPPELING MET O uitvoert.

#### ALGEMENE CONCLUSIE.

Bij de bepaling van de ENERGIE van een harmonisch trillend punt moet men BERST VASTSTELLEN of men te doen heeft met een KUNSTMATIGE harmonische trilling, die het WISKUNDIGE resultaat is van MEERDERE KOPPELINGEN (geval 1), of dat men te doen heeft met een NATUUR-ECHTE harmonische trilling met EEN koppeling (geval 2), die eventueel WISKUNDIG kan ontbonden worden in twee (of meer) harmonische trillingen.

Opmerking: Bij de behandeling van de harmonische trilling hebben we gezegd, dat men deze trilling op drie manieren kan definiëren en dat deze definities equivalent zijn. We dachten toen alleen maar aan natuur-echte harmonische trillingen.

In verband met het bovenstaande moeten we zeggen, dat deze definities alleen wiskundig equivalent zijn.

We gaan nu nader bezien, wat er in een rij van ideaal gekoppelde massapunten gebeurt als het eerste punt van de rij deelneemt aan twee harmonische trillingen.

Om niet in de war te raken met de nummering van de beschouwde gevallen, zullen we het eerste punt van de rij P noemen.

We veronderstellen, dat P door twee trillingsbronnen in een KUNSTMATIGE harmonische trilling wordt gebracht, zoals dit b.v. in geval 1) gebeurde: De beweging van P is dus alleen WISKUNDIG EEN ENKELE harmonische trilling.

Welnu: DE KOPPELING TUSSEN P EN Q DWINGT Q OM DEZE WISKUNDIGE HARMONISCHE TRILLING VAN P NU NATUUR-ECHT TE GAAN UITVOEREN.

Q moet deze trilling NATUUR-ECHT gaan uitvoeren, omdat Q MAAR EEN TRILLINGSMECHANISME heeft, n.l. de koppeling  $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$ .

De voor deze trilling van Q benodigde energie MOET DOOR DE TWEE TRILLINGSBRONNEN via de koppeling AAN Q GELEVERD worden.

DE KOPPELING TUSSEN Q EN R DWINGT R OM DEZELFDE HARMONISCHE TRILLING ALS Q EVENEENS NATUUR-ECHT TE GAAN UITVOEREN. De voor deze trilling benodigde energie wordt indirect door de trillingsbronnen geleverd, als deze P tenminste in trilling houden.  
enz.

Conclusie: Hoewel P door twee onderling onafhankelijke trillingsbronnen in een KUNSTMATIGE harmonische trilling werd gebracht, plant zich in de rij van ideaal gekoppelde massapunten slechts EEN NATUUR-ECHTE harmonische trilling voort.

De kwestie van de verantwoording der energie in de beschouwde gevallen A, B en C levert nu geen moeilijkheid meer op.

ad A. In de rij plant zich dus èèn natuur-echte harmonische trilling voort met amplitudo  $2r$  en trillingstijd  $T$ . Per trillend massapunt moeten de twee trillingsbronnen de energie leveren van

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} (2r)^2 = 4 \left( \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule.}$$

Deze zich voortplantende harmonische trilling is de kop van een lopende golf met trillingstijd  $T$  (frequentie  $\frac{1}{T}$ ) en amplitudo  $2r$ .

#### Opmerkingen.

$\alpha$ ) De "verrichting van de samenstelling", die het wezenlijke van de interferentie is, heeft dus eigenlijk plaats in de koppeling  $P \leftrightarrow Q$ : De voorstelling, als zouden zich werkelijk twee golven in de rij voortbewegen, is een wiskundig hulpmiddel.

$\beta$ ) Het moge even verwondering wekken, dat de twee trillingsbronnen, als ze tegelijk werken, per trillend massadeeltje van de rij  $4 X$  zo veel energie moeten leveren als iedere trillingsbron zou moeten doen, als deze alleen werkzaam was; maar het is nu eenmaal zo, dat de energie van een NATUUR-ECHT harmonisch trillend massapunt recht evenredig is met HET KWADRAAT van de amplitudo.

Als de trillingsbronnen deze energie niet kunnen opbrengen, betekent dit, dat de rij voor deze bronnen een te zware belasting is. De samenwerkende trillingsbronnen zullen er dan niet in slagen om P kunstmatig een harmonische trilling te geven met amplitudo  $2r$ . P zal dan een kunstmatige harmonische trilling uitvoeren met dezelfde frequentie  $\frac{1}{T}$  maar met een amplitudo, die volgens de formule  $U = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot R^2$  Joule is aangepast aan de per trillend massapunt geleverde energie.

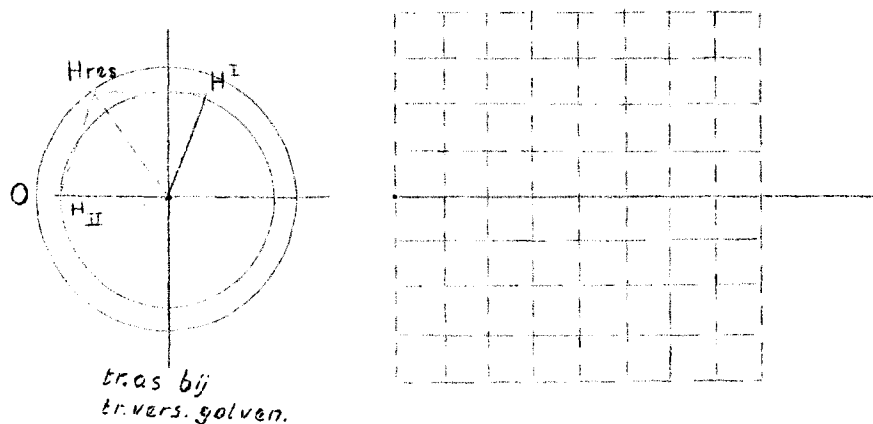
Wiskundig kan men het dan voorstellen alsof zich in de rij twee gelijk gepolariseerde  $\frac{1}{2}$  golven voortbewegen met gelijke fase, dezelfde frequentie  $\frac{1}{T}$  en gelijke amplitudo  $\frac{1}{2}R$ .

ad B: Het massapunt  $P$  blijft t.o.v. de rij in rust. De koppeling tussen P en Q komt dus helemaal niet in actie: DE MASSAPUNTEN VAN DE RIJ ONTTREKKEN DUS HELEMAAL GEEN ENERGIE AAN DE TRILLINGSBRONNEN. Derhalve zal er ook geen energie in de rij "verdwijnen".

ad C: Per trillend massapunt van de rij moeten de trillingsbronnen een energie leveren van

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} (2r \cos \frac{\phi}{2})^2 \text{ Joule.}$$

Opmerking: Omdat "de verrichting van de samenstelling" plaats heeft in de koppeling  $P \leftrightarrow Q$ , kan men de constructies van geval C, natuurkundig verantwoord, ook aldus uitvoeren:



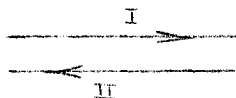
### TER ORIËNTATIE.

We zijn bezig met interferentie in een rij van ideaal gekoppelde massapunten. Daarbij onderscheiden we twee gevallen:

Geval I. De interfererende golven hebben dezelfde voortplantingsrichting.

Dit geval hebben we afgehandeld. In een theorema hebben we getracht, de kwestie van de verantwoording der energie tot klaarheid te brengen. We vervolgen nu de theorie met het tweede geval.

Geval II. De interfererende golven hebben TEGENGESTELDE VOORTPLANTINGSRICHTING.



A) Behandeling van het gebeuren door constructie.

Deze constructie hebben we reeds uitgevoerd in punt 5 van par. 1. voor het geval dat de golven transversaal zijn. Deze figuur geeft voor longitudinale golven de constructies van de hulp-sinus lijnen.

In deze figuur hebben de golven in het ontmoetingspunt A dezelfde fase.

Teken zelf de figuur voor het geval, dat de lopende golven in A tegengestelde fase hebben. We krijgen dan een analoge figuur, alleen met dit verschil, dat het massapunt A ook steeds in rust blijft.

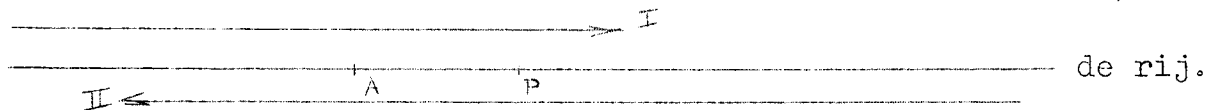
N.B. B) Wiskundige behandeling.



I en II zijn twee gelijksoortige gelijk-gepolariseerde golven die elkaar in A ontmoeten. We zullen veronderstellen, dat de golven in A dezelfde fase hebben. A gaat dus

deelnemen aan twee harmonische trillingen met dezelfde trillingsas, dezelfde frequentie en dezelfde amplitudo.

Na enige tijd is de situatie aldus:



Stel P is een willekeurig massapunt IN HET INTERFERENTIE GEBIED van de twee tegengesteld gerichte lopende golven I en II.

→ WE VRAGEN NU NAAR DE RESULTERENDE UITWIJKING VAN P ALS FUNCTIE VAN  $t_A$ .

Oplossing. Als de golven elkaar op  $t_A = 0$  in A ontmoeten, dan volgt:

$$U_I^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A - 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right)$$

$$U_{II}^P = r \sin \left( \frac{2\pi}{T} t_A + 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right)$$

$$U_{t_A}^{P, res} = r \left\{ 2 \sin \frac{2\pi}{T} t_A \cdot \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right\} \quad \begin{array}{l} + \text{ de golven zijn ge-} \\ \text{lijk gepolariseerd,} \\ \text{dus optellen.} \end{array}$$

dus:

$$U_{t_A}^{P, res} = \left[ 2r \cdot \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right] \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t_A$$

Deze formule is geldig voor IEDER massapunt in het interferentie gebied van de twee lopende golven, mits de golven:

- ôf beide transversaal zijn met dezelfde  $r$  en  $T$
- ôf beide longitudinaal zijn met dezelfde  $r$  en  $T$
- en in A dezelfde fase hebben.

UIT DEZE FORMULE GAAN WE ONS NU EEN BEELD VORMEN, VAN HETGEEN ER IN HET INTERFERENTIE GEBIED VAN DE RIJ GEBEURT.

Conclusie 1: Ieder punt van het interferentie gebied voert een harmonische trilling uit met de frequentie van de gegeven golven  $\frac{1}{T}$ . Ieder punt heeft wel een eigen amplitudo.

Conclusie 2: Alle massapunten van het interferentiegebied GAAN TEGELIJK DOOR HUN NULSTAND, en BEREIKEN TEGELIJK EEN VAN HUN UITERSTE STANDEN.

Bewijs. De formule luidt:  $U_{t_A}^P = \left[ \dots \right] \sin \frac{2\pi}{T} t_A$ .

$t_A$  is hierin het aantal seconden, dat A trilt sinds de golven elkaar ontmoet hebben.  $\frac{2\pi}{T} t_A$  is de fase van A, uitgedrukt in radialen.

Welnu: Op de ogenblikken, dat de fase van A gelijk is aan  $0, \pi, 2\pi, 3\pi,$  enz. is  $\sin \frac{2\pi}{T} t_A = 0$

Maar op die ogenblikken is dus ook  $\left[ \dots \right] \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t_A = 0$ , dus ook  $U^P = 0$

Op deze ogenblikken passeert ieder massapunt van het interferentie gebied dus zijn nulstand.

Conclusie: Alle massapunten van het interferentiegebied gaan tegelijk door hun nulstand.

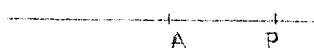
vervolgens: Op de ogenblikken, dat de fase van A gelijk is aan  $\frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}, 5 \cdot \frac{\pi}{2},$  enz. is  $\sin \frac{2\pi}{T} t_A = \pm 1$

Op deze ogenblikken is dus  $U^P = \pm 1$  m.a.w. op die ogenblikken heeft ieder punt zijn maximale uitwijking.

Conclusie: Alle massapunten van het interferentiegebied bereiken tegelijk een van hun uiterste standen.

Conclusie 3. zie blz. 53

Conclusie 3. De amplitudo van de verschillende punten is verschillend: de amplitudo van alle punten is de absolute waarde van een cosinus functie van  $AP$ .

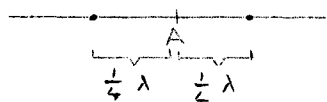


$$R^P = \left| 2r \cos 2\pi \cdot \frac{AP}{\lambda} \right|$$

Bijzondere gevallen:

$$AP = 0 \rightarrow P = A \rightarrow R^A = 2r \quad (\text{ZEGGE } 2 \times r \text{ !!!})$$

$$AP = \frac{1}{4} \lambda \rightarrow R^P = \left| 2r \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{1}{4} \right| = 0 \rightarrow R^{\frac{1}{4}\lambda} = 0$$



DE MASSAPUNTEN DIE  $\frac{1}{4} \lambda$  VAN A VERWIJDERD ZIJN, ZIJN DUS BLIJVEND IN RUST.

$$AP = \frac{2}{4} \lambda \rightarrow R^P = \left| 2r \cos 2\pi \cdot \frac{1}{2} \right| = 2r$$

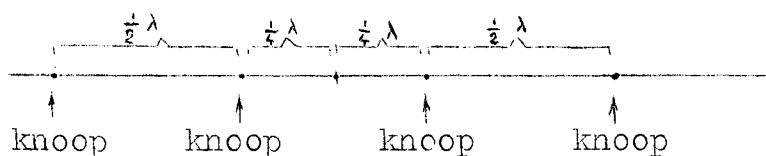
$$AP = \frac{3}{4} \lambda \rightarrow R^P = \left| 2r \cos 2\pi \cdot \frac{3}{4} \right| = 0 \rightarrow \text{BLIJVEND IN RUST}$$

$$AP = \frac{4}{4} \lambda \rightarrow R^P = \left| 2r \cos 2\pi \right| = 2r$$

enz.

Hieruit volgt de

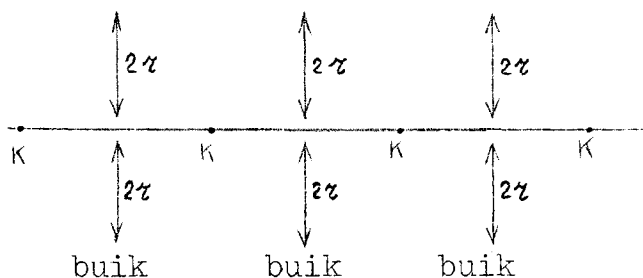
Conclusie 4. a) De massapunten van het interferentie-gebied, die  $\frac{1}{4} \lambda$ ,  $\frac{3}{4} \lambda$ ,  $\frac{5}{4} \lambda$ , enz. van het punt A verwijderd zijn, BLIJVEN OP IEDER OGENBLIK IN HUN NULSTAND.



DEZE IN RUST BLIJVENDE PUNTEN HETEN KNOEPEN.

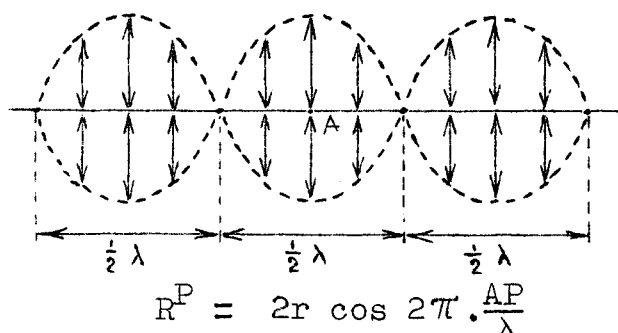
De afstand tussen twee opvolgende knopen is dus  $\frac{1}{2} \lambda$ .

b) De massapunten van het interferentiegebied, die in het midden tussen twee knopen liggen, hebben amplitudo  $2r$ . Deze punten hebben tevens de MAXIMALE amplitudo.



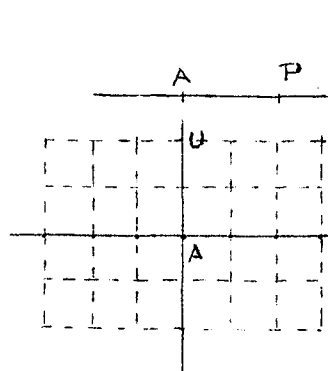
Deze punten heten TRILLINGSBUIKEN of kortweg BUIKEN.

c) Voor de andere massapunten is de amplitudo de absolute waarde van een cosinusfunctie van de afstand tot A.



Conclusie 5. We maken nu onderscheid voor het geval, dat de golven transversaal en voor het geval, dat de golven longitudinaal zijn.

- a) Als de interfererende golven TRANSVERSAAL zijn, is de meetkundige plaats van de massapunten op ieder ogenblik een sinuslijn: Deze sinuslijn beweegt echter NIET VOORUIT, is dus STATISCH, maar hoogte der bergen en de diepte der dalen veranderen volgens een sinusfunctie van de tijd.  
Bewijs.



$$U_{t_A}^P = 2r \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t_A$$

We geven  $t_A$  een willekeurig gekozen waarde  $\tau$   
 De m.p. van de massapunten OP DAT afstand OGENBLIK wordt dan gegeven door:  
 tot A

$$U_t^P = \boxed{2r \sin \frac{2\pi}{T} \tau} \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda}$$

vast getal

Dit is de vergelijking van een cosinuslijn, die de lijn der nulstanden snijdt in de knopen. Grafisch heeft deze cosinuslijn dezelfde vorm als een sinuslijn.

Bijzondere ogenblikken:

$$t_A = nT \rightarrow \sin \frac{2\pi}{T}(nT) = 0 \quad U^P = 0 \quad \text{alle pp. door nulst.}$$

$$t_A = nT + \frac{1}{8}T \rightarrow \sin \frac{2\pi}{T}(nT + \frac{1}{8}T) = \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{8}T = \frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow U^P = r\sqrt{2} \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \rightarrow \text{in buik}$$

$$U = r\sqrt{2}$$

$$t_A = nT + \frac{2}{8}T \rightarrow \sin \frac{2\pi}{T}(nT + \frac{2}{8}T) = \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2}{8}T = 1 \rightarrow U^P = 2r \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \rightarrow \text{in buik}$$

$$U = 2r$$

$$t_A = nT + \frac{3}{8}T \rightarrow \sin \frac{2\pi}{T}(nT + \frac{3}{8}T) = \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{8}T = \frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow U^P = r\sqrt{2} \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \rightarrow \text{in buik}$$

$$U = r\sqrt{2}$$

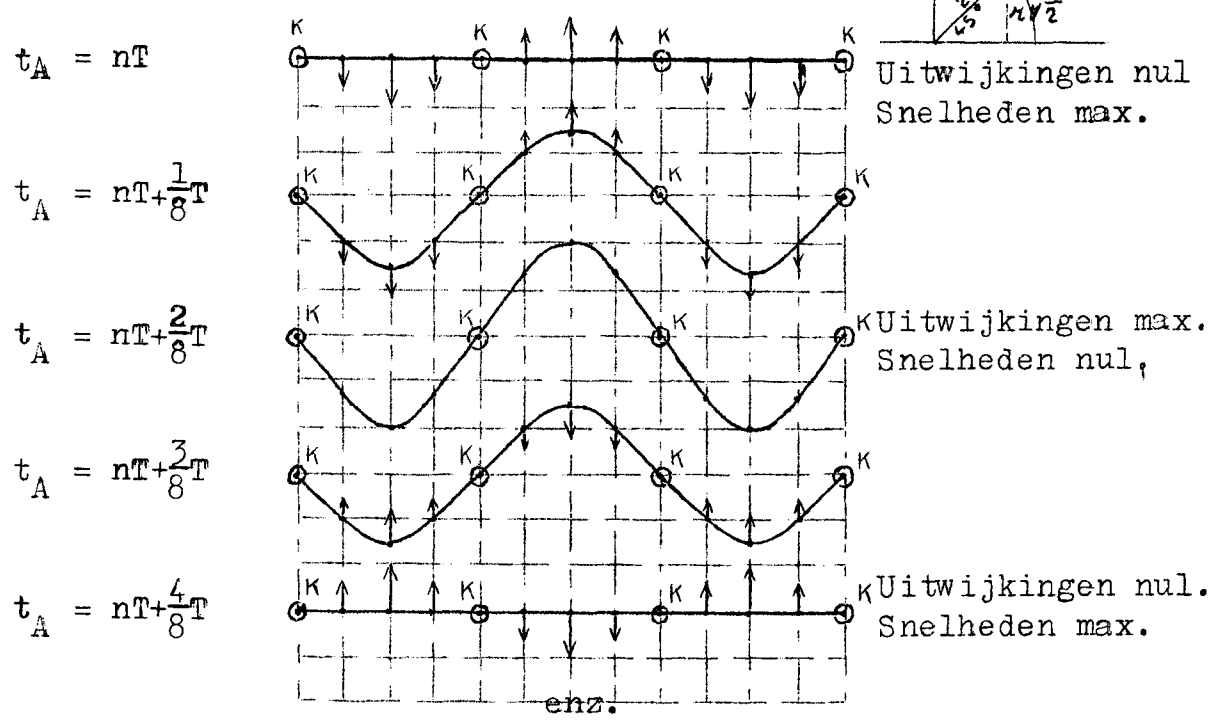
$$t_A = nT + \frac{4}{8}T \rightarrow \sin \frac{2\pi}{T}(nT + \frac{4}{8}T) = \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{4}{8}T = 0 \rightarrow U^P = 0 \quad \text{alle pp. door nulst.}$$

enz.

Dit zijn allemaal sinuslijnen die de lijn der nulstanden snijden in de knopen, maar onderling verschillende extreme waarden hebben.

In figuur: zie blz. 55

In figuur:



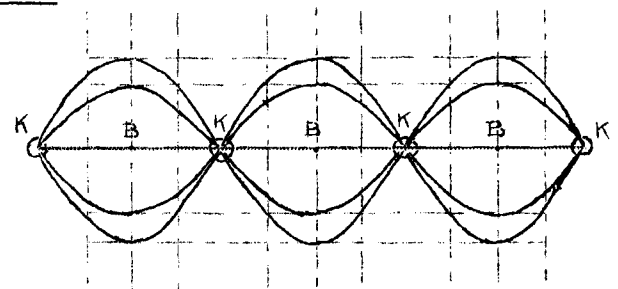
De snelheden van de massapunten op een onbepaald ogenblik wordt gevonden door de functie  $U_t^P$  te differentieëren

$$v_{t_A}^P = \frac{4\pi}{T} z \cos \frac{2\pi AP}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{4\pi}{T} z \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi AP}{\lambda}$$

De snelheden op een bepaald ogenblik wordt gevonden door  $t_A$  van dat ogenblik te substitueren. Op een bepaald ogenblik is  $v^P$  een cosinusfunctie van de afstand AP.

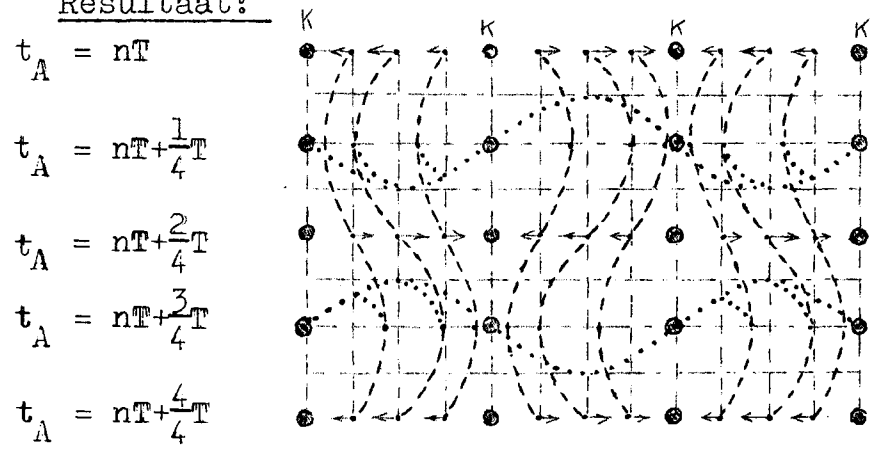
Als de massapunten hun nulstand passeren zijn de snelheden maximaal, in de uiterste standen zijn de snelheden nul.

Eindresultaat.



$\beta$ ) Als de interfererende golven LONGITUDINAAL zijn, vinden we de plaatssituatie op een bepaald ogenblik, door de punten van de hulp-sinuslijn voor dat ogenblik, met de klok mee, neer te slaan.

Resultaat:



vraag: Wat valt er te zeggen over het gebeuren bij eenzelfde knoop op de ogenblikken  $\tau = nT; nT + \frac{1}{4}T; nT + \frac{3}{4}T; nT + \frac{5}{4}T; nT + \frac{7}{4}T$  ?

antw.: Bij eenzelfde knoop volgen de verdichtingen en de verdunningen elkaar met tussenpozen van een halve trillingstijd op.

vraag: Wat valt er op te merken over de plaatssituatie in de buurt van twee naburige knopen.

antw.: Als bij een knoop een verdichting is, is bij de naburige knopen een verdunning.

vraag: Wat valt er op te merken voor de ogenblikken  $nT, nT + \frac{1}{2}T, nT + T$ , enz.

antw.: Dan passeren alle massapunten hun nulstand, maar ze hebben dan niet allemaal dezelfde snelheid. (Cosinus functie!)

Conclusie 6. TUSSEN TWEE OPVOLGENDE KNOPEN HEBBEN ALLE MASSAPUNTEN OP IEDER OGENBLIK ONDERLING GELIJKE FASE. DE MASSAPUNTEN AAN WEERSKANTEN VAN EENZELFDE KNOOP HEBBEN OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELDE FASEN.

Conclusie 7. Massapunten die SYMMETRISCH liggen t.o.v. EENZELFDE knoop, hebben OP IEDER OGENBLIK gelijke maar tegengestelde uitwijkingen, gelijke maar tegengestelde snelheden en gelijke maar tegengestelde versnellingen.

Conclusie 8. De massapunten van het interferentiegebied blijven de door de verrichting der samenstelling ontstane harmonische trillingen uitvoeren. Ze blijven dus een golfbeweging uitvoeren, maar deze golfbeweging is STATISCH: het voortlopende karakter is geheel verdwenen.

men noemt DEZE GOLFBEWEGING EEN STAANDE GOLF.

$5\alpha$  is dus een STAANDE TRANSVERSALE GOLF

$5\beta$  is dus een STAANDE LONGITUDINALE GOLF

Definitie: Een staande golfbeweging is de beweging die ontstaat door interferentie van twee gelijk-gepolariseerde tegengesteld gerichte lopende golven met gelijke frequentie en gelijke amplitudo.

Opmerkingen:

a) Deze conclusies uit de wiskundige behandeling kan men duidelijk aflezen uit de figuur, behorende bij de behandeling door constructie (blz. 44)

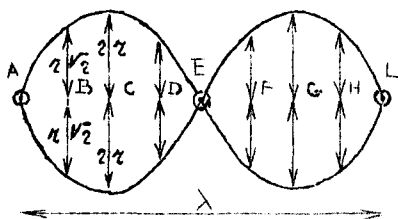
b) Zowel in deze figuur als de wiskundige behandeling hebben we voor  $t_A = 0$  het ogenblik genomen, waarop de lopende golven elkaar ontmoeten. Bij sommen over staande golven blijft dat ontmoetingsogenblik meestal buiten beschouwing en hebben de vragen betrekking op een groot interferentie gebied. Onder  $t = 0$  verstaat men dan een ogenblik waarop de massapunten in dit interferentiegebied hun nulstand passeren.

Theorema. Ook bij de staande golven heeft het de schijn alsof er iets niet klopt met de verantwoording der energie.

Immers: De knopen blijven in rust; waar blijft de trillingsenergie die deze massapunten van de lopende golven ontvingen? In de buiken is de trillingsenergie  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2$  Joule; de som van de trillingsenergieën die deze massapunten van de lopende golven ontvingen is echter maar  $2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right)$  Joule. Waar komt het teveel aan trillingsenergie in de buiken vandaan?



Antwoord:



We berekenen de totale trillingsenergie van de massapunten van de rij die in een interferentie-gebied ter lengte van  $\lambda$  liggen en vergelijken deze energie met de trillingsenergie die deze massapunten gekregen hebben t.g.v. de twee zich tegengesteld voortplantende harmonische trillingen.

Ter vereenvoudiging zullen we aannemen, dat de afstand van de massapunten van de rij  $\frac{1}{8} \lambda$  is. Als we A (zie fig.) tot dit gebied rekenen, moeten we L tot het volgende gebied van  $1 \lambda$  rekenen.

We vinden:  $U_A + U_E = 0$

$= 0$

$$U_B + U_D + U_F + U_H = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} (r\sqrt{2})^2 = 8 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right)$$

$$U_C + U_G = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot (2r)^2 = 8 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right)$$

---


$$U_{\text{totaal}} = 16 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule I}$$

De energie, die deze massapunten gekregen hebben t.g.v. lopende golven is:  $I = II$

$$U = 2 \times 8 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 = 16 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^2} r^2 \right) \text{ Joule II}$$

De TOTALE trillingsenergie van de massapunten van de staande golf is dus gelijk aan de som van de trillingsenergieën die deze massapunten gekregen hebben t.g.v. de twee zich in tegengestelde richting voortplantende harmonische trillingen.

Bij de verrichting van de samenstelling wordt deze (van de lopen de golven afkomstige) energie zō OVER HET INTERFERENTIE-GEBIED VERDEELD, dat ieder massapunt van dit gebied de WISKUNDIG VOOR-GESCHREVEN harmonische trilling werkelijk kan uitvoeren.

De knopen krijgen dus geen trillings-energie; in de buiken heeft een ophoping van trillingsenergie plaats.

Hiermee is het energieprobleem bij een staande golf opgelost.

### 3) TER ORIENTATIE.

Deze par. 2 handelt over de interferentie van lopende golven in een rij van ideaal gekoppelde massapunten.

1) geeft een opsomming van de veronderstellingen die in de theorie stilzwijgend worden aangenomen.

2) onderscheidt twee mogelijkheden:

I De interfererende golven zijn gelijk gericht. Hebben de interfererende golven het fase-verschil  $\phi$ , dan is het resultaat van deze interferentie een in dezelfde richting voortlopende golf, met: dezelfde frequentie als de interfererende golven, dus  $\frac{1}{T}$  en de amplitudo  $= |2r \cos \frac{\phi}{2}|$

De golflengte van deze resulterende golf is volgens de formule  $v = f \cdot \lambda$  dus ook gelijk aan de golflengte van de interfererende golven.

In een theorema werd een verantwoording van de energie gegeven. Door deze verantwoording kwamen we tot het inzicht, dat bij DEZE interferentie "de verrichting van de samenstelling" plaats heeft in de koppeling van het eerste tweetal massapunten van de rij. De voorstelling, als zouden zich twee lopende golven in de rij voortplanten is alleen maar een wiskundig hulpmiddel.

## II De interfererende golven zijn tegengesteld gericht.

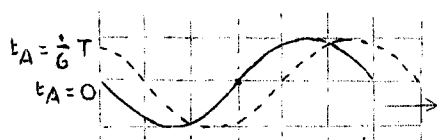
Zowel de behandeling van het gebeuren door constructie, als de wiskundige behandeling voeren tot het inzicht, dat de massapunten in het interferentiegebied wel een golfbeweging blijven uitvoeren, maar dat deze golfbeweging een STATISCH karakter heeft. We kwamen aldus tot het begrip STAANDE GOLF. Deze staande golven werden onderverdeeld in TRANSVERSALE en LONGITUDINALE STAANDE GOLVEN.

In een theorema werd weer een verantwoording gegeven van de energie. Uit deze verantwoording bleek, dat bij DEZE interferentie een energie-spreiding plaats heeft: de trillings-energie van de lopende golven wordt in het interferentiegebied zo over de massapunten verdeeld, dat de knopen geen energie en de andere massapunten zoveel energie krijgen, dat ieder massapunt de wiskundig voorgeschreven harmonische trilling werkelijk kan uitvoeren.

We vervolgen nu de theorie.

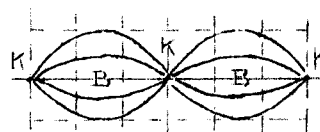
### 4) Overzicht van de punten van overeenkomst en verschil tussen lopende en staande golven.

LOPENDE GOLVEN



tr. as bij  
transv. golven

STAANDE GOLVEN,



tr. as bij  
transv. golf.

#### Overeenkomst.

- I Ieder massapunt voert een harmonische trilling uit met vaste trillingsas.
- II Ieder massapunt heeft dezelfde trillingstijd  $T$ .
- III De golflengte van de staande golf = golflengte van de interfererende lopende golven.

#### Vershil.

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>I Zijn ontstaan doordat een harmonische trilling zich eenparig voortplant langs een rij van gekoppelde massapunten, TERWIJL de reeds trillende punten hun eenmaal begonnen trilling BLIJVEN uitvoeren.</li> <li>II Tussen de trillingstoestanden van elk tweetal op elkaar volgende massapunten v.d. rij bestaat een VAST FASE-VERSCHIL.</li> <li>III Ieder massapunt doet wat het voorgaande massapunt een VAST TIJDSINTERVAL EERDER deed, zodat een bepaalde fase-situatie zich met <u>eenparige snelheid langs de rij voortbeweegt</u>: De massapunten gaan achtereenvolgens door hun nulstand en bereiken achtereenvolgens hun uiterste stand.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>I Zijn ontstaan door interferentie van twee gelijksoortige, gelijkgepolariseerde, tegengesteld gerichte lopende golven met dezelfde <math>r</math> en <math>f</math>. In de knopen zijn de massapunten BLIJVEND IN RUST.</li> <li>II De massapunten tussen twee op elkaar volgende knopen hebben OP IEDER OGENBLIK ONDERLING GELIJKE FASE. De massapunten in twee op elkaar volgende knooppgebieden, hebben op ieder ogenblik tegengestelde fase.</li> <li>III<br/>Alle massapunten gaan tegelijk door hun nulstand en bereiken tegelijk hun uiterste stand:</li> </ul> |
|--|--|

IV Alle massapunten trillen met  
DEZELFDE AMPLITUDO (r)

IV De amplitudo van een massapunt  
P is een cosinus functie van de  
afstand tot een buik A

$$R^P = \left| 2r \cos 2\pi \frac{AP}{\lambda} \right|$$

Par. 3) TERUGKAATSING VAN LOPENDE GOLVEN.

- 1) Tot nu toe hebben we stilzwijgend verondersteld, dat de rij der ideaal gekoppelde massapunten onbepert lang was. We gaan nu de gevallen beschouwen, dat de rij slechts een eindige lengte heeft en dat de kop van een lopende golf het laatste massapunt van de rij nadert.

Om een goed begrip te krijgen van hetgeen er gaat gebeuren als de kop van de golf in dit laatste massapunt van de rij is aangekomen, moeten we ons eerst in herinnering brengen dat we bij lopende golven te doen hebben met twee activiteiten:

- 1<sup>o</sup>) Een harmonische trilling plant zich voort in een rij van ideaal gekoppelde massapunten. De energie van deze trilling wordt via de koppelingen der massapunten geleverd door de bron.
- 2<sup>o</sup>) De reeds trillende massapunten blijven de eenmaal begonnen trilling uitvoeren.

Er heeft dus bij een lopende golf via de koppeling der massapunten een aanhoudende ENERGIESTROOM plaats van de bron naar de kop van de golf.

Als de bron haar trilling na enige tijd staakt, plant zich in de rij een GOLFPORTE voort: De door de kop van de golfportie gevraagde energie wordt aan "de staart" onttrokken.

Conclusie: Zowel in een continue lopende golf als in een lopende golfportie heeft een voortdurende energie-stroom plaats die gericht is van de "staart" naar de "kop" van de golf. Deze energie-stroom heeft tot gevolg, dat een eenmaal opgewekte lopende golf zich altijd in dezelfde richting wil voortplanten.

- 2) We gaan nu onderzoeken, wat er gebeurt, als de kop van een lopende golf in het laatste punt van de rij aankomt. We onderscheiden twee gevallen:

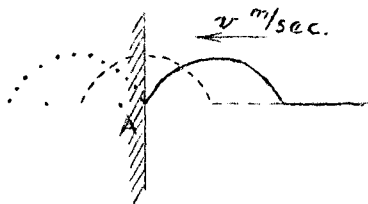
I Het laatste punt van de rij is VAST → terugkaatsing aan een VAST uiteinde.

II Het laatste punt van de rij is VRIJ → terugkaatsing aan een VRIJ uiteinde.

ad I) Terugkaatsing aan een VAST uiteinde.

- a) van TRANSVERSALE lopende golven.

α) De terugkaatsing van èèn lopende golfberg.



We denken ons een draad van ideaal gekoppelde massapunten. Het linker uiteinde A van de draad is ONWRIKBAAR verbonden aan een onbeweegbaar, volkomen STAR lichaam, waarvan de corpuscula dus geen trillingsenergie kunnen hebben.

A noemt men een VAST uiteinde.

In de draad loopt een transversale golfpottie van èèn golfberg met snelheid  $v$  m/sec van rechts naar links. De getrokken lijn in de figuur geeft de golfsituatie aan op het ogenblik dat deze golfberg in A aankomt.

A krijgt dus op dit ogenblik een ruk naar boven. A blijft echter op zijn plaats. Het aan A voorafgaande massapunt van de rij, dat inmiddels al naar boven beweegt, voelt het achterblijven van A als een ruk naar beneden. De vaste koppeling van A oefent dus een reactie werking uit op de massapunten van de rij.

Stelling: De werking van de vaste koppeling van A is EQUIVALENT MET DE WERKING VAN EEN TRILLINGSBRON, die vanuit het vaste uiteinde een lopende golf in de draad stuurt met DEZELFDE TRILLINGSAS, DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO als de aankomende golf, maar waarvan DE FASE IN HET VASTE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELD IS AAN DE FASE VAN DE AANKOMENDE GOLF.

Bewijs: Was de draad langer geweest, dan zou A op dit ogenblik (zie figuur) GAAN BEGINNEN aan de zich in de rij naar links voortplanten de harmonische trilling en zou A in het tijdsinterval dat de golfberg A zou passeren, een halve trilling naar BOVEN hebben uitgevoerd. (zie de gestippelde lijnen in de figuur).

DAAR A IN DIT TIJDSINTERVAL IN RUST BLIJFT, is het dus ALSOF A in dit tijdsinterval deelneemt aan TWEE BEWEGINGEN, n.l.:

- 1°) de halve trilling NAAR BOVEN, vanwege de actie van de aankomende golfberg en
- 2°) DEZELFDE halve trilling NAAR BENEDEN, vanwege de REACTIE van de vaste koppeling.

Uit het feit, dat A in rust blijft, volgt verder, dat de bewegingsenergie die A van de golfberg krijgt, DOOR DE WERKING VAN DE VASTE KOPPELING ONMIDDELIJK AAN A WORDT ONTTROKKEN.

Daar de corpuscula van het starre lichaam waaraan A gekoppeld is, geen trillingsenergie overnemen, volgt, DAT DE VASTE KOPPELING DE IN A AANKOMENDE TRILLINGSENERGIE VAN DE GOLFBORG ONMIDDELIJK MOET TERUGSTUREN NAAR DE ACHTEREENVOLGENDE MASSAPUNTEN VAN DE RIJ.

Dit gebeurt via de "ruk-werking" van de koppeling tussen A en het voorlaatste massapunt van de rij.

Conclusie: In het tijdsinterval, dat de aankomende golfberg A zou passeren, neemt A WISKUNDIG deel aan TWEE trillingen met dezelfde trillingsas, dezelfde frequentie, dezelfde amplitudo, maar met TEGENGESTELDE FASE, en wordt de trillingsenergie van de golfberg TERUGGESTUURD naar de achtereenvolgende massapunten van de rij.

M.A.W.: De werking van de vaste koppeling is EQUIVALENT met de werking van een TRILLINGSBRON, die vanuit het vaste uiteinde een lopende golf in de draad stuurt met dezelfde trillingsas, dezelfde frequentie en dezelfde amplitudo als de aankomende golf, maar waarvan de FASE IN HET VASTE UITEINDE op ieder ogenblik TEGENGESTELD is aan de fase van de aankomende golf.

Noemen we de in A aankomende golf de ACTIE-GOLF, en de vanuit A terug lopende golf de REACTIE-GOLF, dan kunnen we de stelling eenvoudiger aldus formuleren:

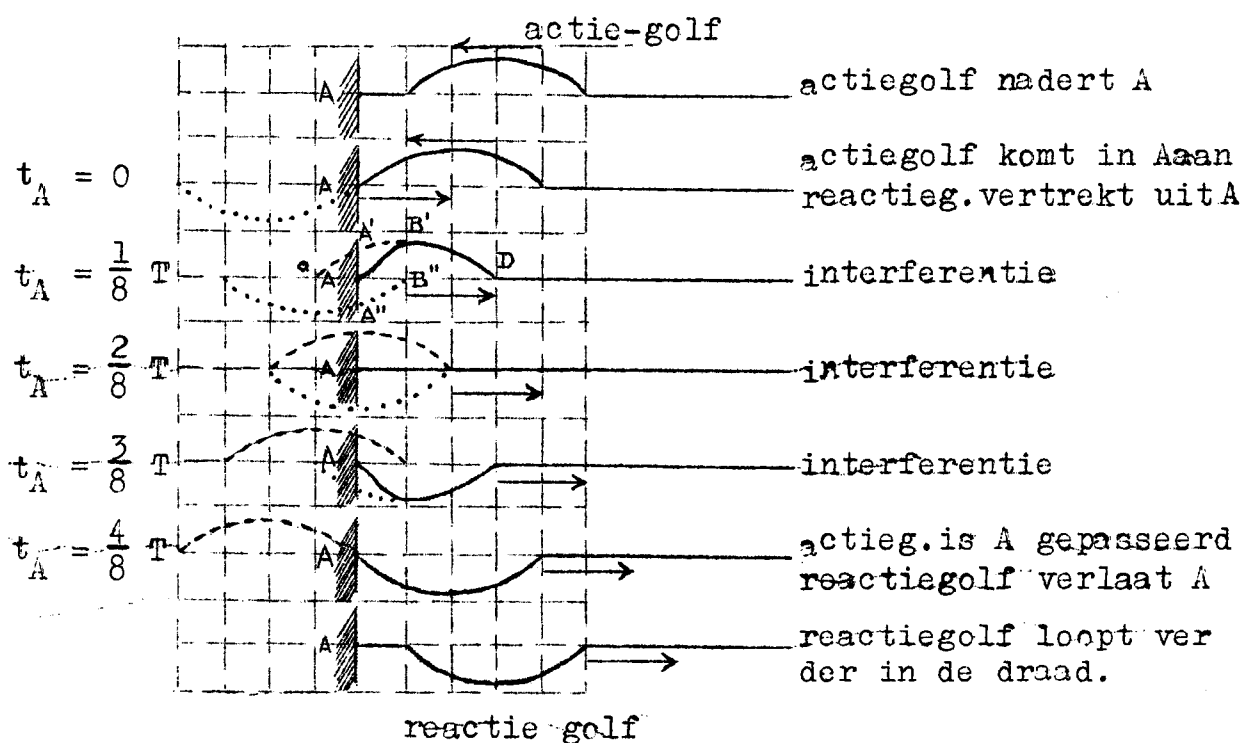
HET VASTE UITEINDE STUURT EEN REACTIEGOLF IN DE DRAAD TERUG, DIE DEZELFDE TRILLINGSAS, DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO HEEFT ALS DE ACTIE GOLF, MAAR WAARVAN DE FASE IN HET VASTE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELD IS AAN DE FASE VAN DE ACTIEGOLF.

De actie- en de reactie-golf hebben volgens de formule  $v = f \cdot \lambda$  ook dezelfde  $\lambda$ .

N.B. HET VERDERE GOLFGEBEUREN IN DE DRAAD IS HET RESULTAAT VAN DE INTERFERENTIE VAN DE ACTIE EN DE REACTIE GOLF.

Opgave: Laat aan de hand van een constructie zien, wat er verder gebeurt met de in A aankomende golfberg.

constructie op blz. 61.

Constructie:

Op  $t_A = 0$  komt de golfberg in A aan. Op dit ogenblik vertrekt de REACTIE-GOLF uit het vaste uiteinde. De fase van de reactiegolf is in A tegengesteld aan de daar aankomende ACTIEGOLF. Wiskundig is het dus ALSOF A het ontmoetingspunt is van een naar links lopende golfberg en een naar rechts lopend golfdal.

Op  $t_A = \frac{1}{8} T$  is de resulterende plaatssituatie in de draad het resultaat van de interferentie van de golfstukken A'B'D en A''B''.

De energie van het golfstuk A''B'' is gelijk aan de energie die het golfstuk AA' zou gehad hebben als de draad langer was geweest.

Op  $t_A = \frac{2}{8} T$  passeren de massapunten van het interferentiegebied hun nulstand.

Op  $t_A = \frac{3}{8} T$  is de plaatssituatie tegengesteld aan die op  $t = \frac{1}{8} T$ : er ontwikkelt zich in de draad een naar rechts lopend golfdal.

Op  $t_A = \frac{4}{8} T$  is de energie van de aankomende GOLFBURG geheel omgezet in de energie van een teruglopend GOLFDAL. Dit golfdal verlaat op dit ogenblik het vaste uiteinde.

MEN DRUKT DIT GEBEUREN UIT, DOOR TE ZEGGEN, DAT DE GOLFBURG IN HET TIJDSINTERVAL VAN  $t_A = 0$  TOT  $t_A = \frac{4}{8} T = \frac{1}{2} T$  IS TERUGGEKAATST AAN HET VASTE UITEINDE A.

Conclusie: BIJ DE TERUGKAATSING AAN EEN VAST UITEINDE LOOPT EEN AANKOMENDE GOLFBURG TERUG ALS EEN GOLFDAL. EEN AANKOMEND GOLFDAL ZAL DUS BIJ TERUGKAATSING AAN EEN VAST UITEINDE TERUGLOPEN ALS EEN GOLFBURG.

N.B. HET CARDINALE PUNT van de terugkaatsing aan een vast uiteinde is, dat DE ACTIE EN DE REACTIE-GOLF IN HET VASTE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELDE FASE HEBBEN.

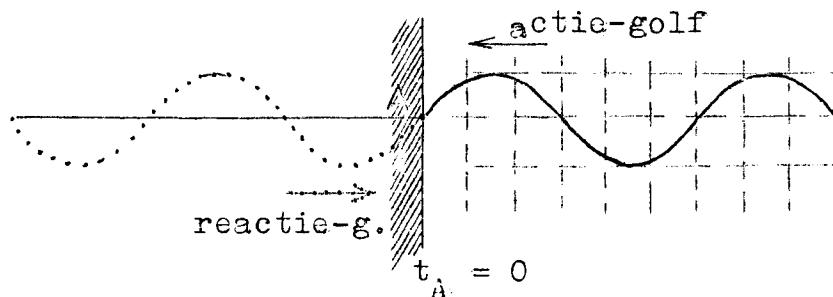
Dat de actie en de reactiegolf in het vaste uiteinde op ieder ogenblik tegengestelde fase hebben, drukt men uit, door te zeggen:

BIJ TERUGKAATSING AAN EEN VAST UITEINDE VERSPRINGT DE FASE  $180^\circ$ .

Opmerking: Dat de fase bij terugkaatsing aan een vast uiteinde  $180^\circ$  moet verspringen, kan men direct aanvoelen: Op  $t_A = 0$  geeft de aankomende golfberg aan A een RUK NAAR BOVEN  $\rightarrow$  A BLIJFT IN RUST; ACTIE = -REACTIE  $\rightarrow$  HET VASTE UITEINDE GEEFT DAN DUS AAN DE DRAAD EEN EVEN STERKE RUK NAAR BENEDEN  $\rightarrow$  EEN AANKOMENDE RUK NAAR BOVEN LOOPT DUS IN DE DRAAD TERUG ALS EEN RUK NAAR BENEDEN.

β) VRAAG: WAT GEBEURT ER IN DE DRAAD, ALS EEN CONTINUE TRANSVERSALE LOPENDE GOLF TERUGKAATST AAN EEN VAST UITEINDE?

Antw.:



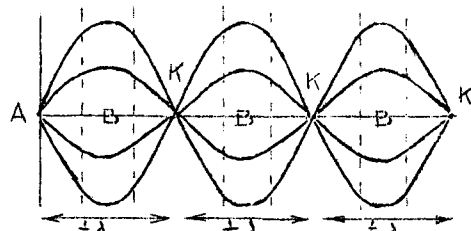
Op het ogenblik, dat de kop van de continue lopende golf in het vaste uiteinde A aankomt, vertrekt vanuit A de eveneens continue reactie-golf.

De actie- en de reactie-golf hebben in A op ieder ogenblik **TEGENGESTELDE FASE**.

Verder hebben ze dezelfde  $f$  en  $r$ , dus ook dezelfde  $\lambda$ .

De plaatssituatie in de draad op een bepaald ogenblik, is het resultaat van de interferentie van de actie- en de reactie-golf op dat ogenblik.

CONCLUSIE:



In het interferentiegebied van de actie en de reactie-golf ontstaat een **STAANDE GOLF**

met in het vaste uiteinde een knoop en verder knopen op  $\frac{1}{2} \lambda$  van elkaar. In de buiken is de amplitudo  $2r$ .

b) Terugkaatsing van LONGITUDINALE lopende golven aan een VAST uiteinde.

We beschouwen nu het geval, dat een longitudinale lopende golf in een vast uiteinde van een rij van ideaal gekoppelde massapunten aankomt.

Met betrekking tot de werking die het vaste uiteinde bij het verdere golfgebeuren zal hebben, is dezelfde redenering van toepassing als we in a) gevolgd hebben bij de terugkaatsing van een transversale golf aan een vast uiteinde: Omdat het vaste uiteinde A in rust blijft is het **ALSO** A tijdens de terugkaatsing deelneemt aan twee gelijke maar tegengesteld gerichte trillingen. Uit het feit, dat het vaste uiteinde in rust blijft volgt ook, dat de vaste koppeling de in A aankomende trillingsenergie **ONMIDDELLIJK** moet **TERUGSTUREN** naar de achtereenvolgende massapunten van de rij.

Conclusie: HET VASTE UITEINDE STUURT EEN EVENEENS LONGITUDINALE REACTIEGOLF IN DE RIJ TERUG, DIE DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO HEEFT ALS DE ACTIEGOLF, MAAR WAARVAN DE FASE IN HET VASTE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELD IS AAN DE FASE VAN DE ACTIEGOLF. BIJ TERUGKAATSING AAN EEN VAST UITEINDE VERSPRINGT DE FASE  $180^\circ$ .

CONSTRUCTIES.

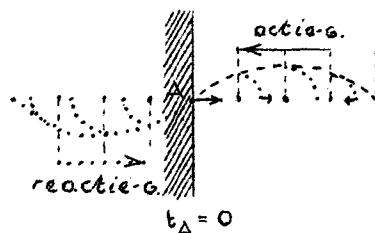
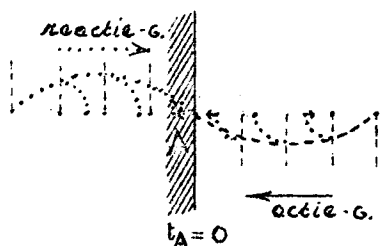
De in a) uitgevoerde constructies, zijn tevens de constructies van de hulp-sinuslijnen van de longitudinale golven of golfporties: De uitwijkingen van de massapunten van een longitudinale golf op een bepaald oogenblik, vinden we door de uitwijkingen van de bij deze massapunten behorende punten van de hulpsinuslijn voor dat oogenblik  $90^\circ$  met de klok meete draaien.

We zullen de in a) uitgevoerde constructies verder uitwerken voor longitudinale golven.

- a) Een LONGITUDINALE lopende golfportie van  $\frac{1}{2} \lambda$  nadert een VAST uiteinde.

De kop van de lopende golfportie is het midden van een VERDICHTING.

De kop van de lopende golfportie is het midden van een VERDUNNING.



Op  $t_A = 0$  komt de actie golfportie  $A$  van  $\frac{1}{2} \lambda$  in  $A$  aan.  $A$  is nu het midden van een VERDICHTING. Let op de grootten en richtingen van de snelheden der massapunten.

$A$  is nu het midden van een VERDUNNING.

$A$  krijgt op dit oogenblik een stoot naar links.

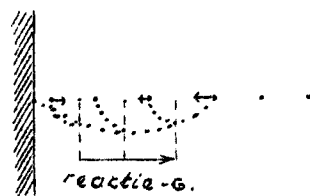
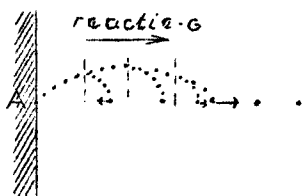
$A$  krijgt op dit oogenblik een ruk naar rechts.

Op ditzelfde oogenblik vertrekt uit  $A$  de reactie golfportie van  $\frac{1}{2} \lambda$  naar rechts.

In het tijdsinterval van  $t_A = 0$  tot  $t_A = \frac{1}{2} T$  heeft er interferentie plaats tussen de tegengesteld gerichte actie- en reactie golfporties van  $\frac{1}{2} \lambda$ .

Op  $t_A = \frac{1}{2} T$  is de situatie aldus:

Op  $t_A = \frac{1}{2} T$  is de situatie aldus:

Conclusie:

De op  $t_A = 0$  aankomende verdichting loopt na terugkaatsing terug als een verdichting.

Een stoot naar links loopt terug als een stoot naar rechts.

Conclusie:

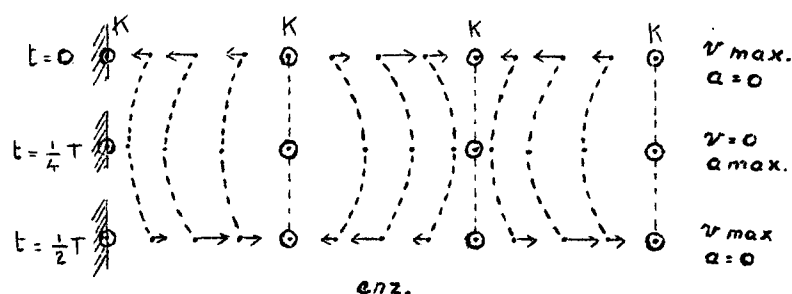
De op  $t_A = 0$  aankomende verdunning loopt na terugkaatsing terug als een verdunning.

Een ruk naar rechts loopt terug als een ruk naar links.

- β) Een CONTINUE longitudinale lopende golf kaatst terug tegen een VAST uiteinde.

Resultaat: In het interferentiegebied van de actie- en de reactie-golf ontstaat een STAANDE LONGITUDINALE GOLF, met in het vaste uiteinde een knoop en verder knopen op  $\frac{1}{2} \lambda$  van elkaar.

In de buiken is de amplitudo  $2r$ .



Met nadruk wijzen we op de volgende dingen:

- 1) Let op de richtingen van de snelheden van de massapunten die tussen twee opeenvolgende knopen liggen.  
Deze zijn of allemaal naar links gericht  
of allemaal naar rechts gericht.
- 2) Let op de grootten van deze snelheden:  
klein groot klein klein groot klein
- 3) Als de massapunten hun nulstand passeren is hun snelheid max. maar hun versnelling is dan nul.  
In hun uiterste standen zijn de snelheden nul en de versnellingen max.
- 4) De versnellingen zijn altijd naar de nulstanden toe gericht.

Ter oriëntatie:

We zijn bezig met de terugkaatsing van lopende golven.  
We hebben twee gevallen onderscheiden.

- I) De terugkaatsing aan een VAST uiteinde.
- II) De terugkaatsing aan een VRIJ uiteinde.

In ad I hebben we de terugkaatsing aan een VAST uiteinde behandeld.

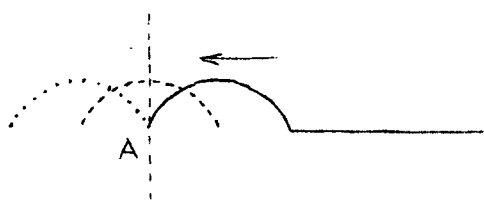
- a) voor transversale lopende golven.
- b) voor longitudinale lopende golven.

We vervolgen nu de theorie.

ad II De terugkaatsing aan een vrij uiteinde.

- a) van TRANSVERSALE lopende golven.

α) De terugkaatsing van een lopende golfberg.



We denken ons weer een draad van ideaal gekoppelde massapunten. Het linker uiteinde van de draad is alleen maar aan het voorgaande massapunt van de rij gekoppeld: A is dus NIET meer aan een of ander volgend massapunt gekoppeld. A noemt men een VRIJ uiteinde.

In de draad loopt een transversale golfPORTIE van een golfberg met de snelheid  $v$  m/sec. van rechts naar links. De getrokken lijn in de figuur geeft de golfsituatie aan op het ogenblik, dat deze golfberg in A aankomt.

A begint dus op dit ogenblik aan de zich in de rij naar links voortplantende harmonische trilling.

Was de draad langer geweest, dan zou deze trilling zich verder naar links voortplanten en zou A in het tijdsinterval, dat de golfberg A zou passeren, een halve trilling NAAR BOVEN hebben uitgevoerd. (zie in de figuur de gestippelde lijnen.)

In dit tijdsinterval ontvangt A echter van de aankomende golfberg ook de energie die nodig zou zijn geweest om de eventueel op A volgende massapunten in deze trilling te brengen.



A krijgt dus meer trillingsenergie dan het aan A VOORAFGAANDE MASSAPUNT van de rij.

ZODRA A ECHTER MEER ENERGIE HEEFT ALS HET AAN A GEKOPPELDE MASSA PUNT VAN DE RIJ, ZAL DE DWANG DER KOPPELING ER NAAR STREVEN OM DIT AAN A GEKOPPELDE MASSAPUNT DEZELFDE TRILLING TE DOEN UITVOEREN ALS A. M.A.W. DE KOPPELING VAN A MET HET VOORLAATSTE MASSA-PUNT VAN DE RIJ ZAL A DWINGEN OM DE EXTRA ENERGIE, DIE NODIG ZOU ZIJN GEWEEST OM DE EVENTUEEL OP A VOLGENDE MASSAPUNTEN IN TRILLING TE BRENGEN, TERUG TE STUREN IN DE RIJ VAN DE MASSAPUNTEN VAN DE DRAAD.

Dit terugsturen van de extra energie, begint dus op het ogenblik dat de golfberg in A aankomt: HIERBIJ WORDT EEN RUK NAAR BOVEN TERUGGESTUURD ALS EEN RUK NAAR BOVEN.

WISKUNDIG is het dus ALSOF A in het tijdsinterval dat de golfberg A zou passeren, deelneemt aan TWEE bewegingen, n.l.

- 1<sup>o</sup>) de halve trilling NAAR BOVEN, vanwege de actie van de in A aangekomen harmonische trilling.
- 2<sup>o</sup>) DEZELFDE HALVE TRILLING NAAR BOVEN, waardoor A de EXTRA energie, die nodig zou zijn geweest om de eventueel volgende massapunten in trilling te brengen, TERUG STUURT in de rij van de massapunten van de draad.

CONCLUSIE: De werking van de vrije koppeling van A is EQUIVALENT MET DE WERKING VAN EEN TRILLINGSBRON, die vanuit het vrije uiteinde een lopende golf in de draad stuurt met DEZELFDE TRILLINGSAS, DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO ALS DE AANKOMENDE GOLF, EN WAARVAN DE FASE IN HET VRIJE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK GELIJK IS AAN DE FASE VAN DE AANKOMENDE GOLF.

Noemen we de in A aankomende golf weer de ACTIE GOLF, en de vanuit A teruglopende golf de REACTIE GOLF, dan kunnen we bovenstaan de conclusie aldus formuleren:

HET VRIJE UITEINDE STUURT EEN REACTIEGOLF IN DE DRAAD TERUG, DIE DEZELFDE TRILLINGSAS, DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO HEEFT ALS DE ACTIEGOLF, EN WAARVAN DE FASE IN HET VRIJE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK GELIJK IS AAN DE FASE VAN DE ACTIE GOLF.

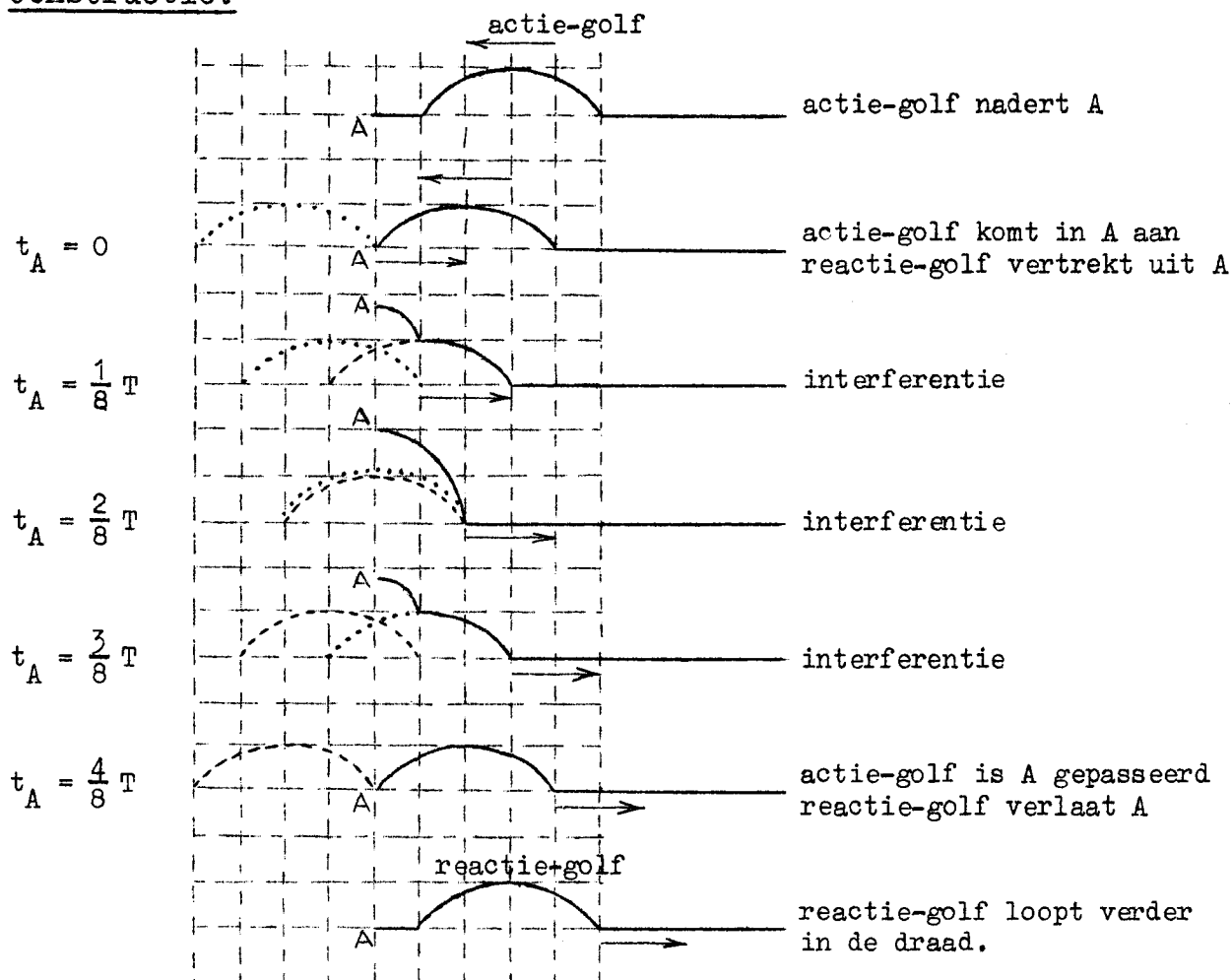
De actie- en de reactie golf hebben volgens de formule  $v = f \cdot \lambda$  ook dezelfde  $\lambda$ .

N.B. HET VERDERE GOLFGEBEUREN IN DE DRAAD IS HET RESULTAAT VAN DE INTERFERENTIE VAN DE ACTIE EN DE REACTIE GOLF.

Opgave: Laat aan de hand van een constructie zien, wat er verder gebeurt met de in het vrije uiteinde A aankomende golfberg.

Constructie:

zie blz. 66

Constructie:

IN HET TIJDSINTERVAL VAN  $t_A = 0$  TOT  $t_A = \frac{4}{8} T = \frac{1}{2} T$  IS DE GOLFBERG TERUGGEKAATST AAN HET VRIJE UITEINDE A.

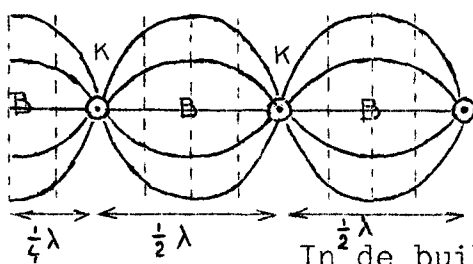
Conclusie: BIJ DE TERUGKAATSING AAN EEN VRIJ UITEINDE LOOPT EEN AANKOMENDE GOLFBERG TERUG ALS EEN GOLFBERG. EEN AANKOMEND GOLFDAL ZAL DUS BIJ TERUGKAATSING AAN EEN VRIJ UITEINDE TERUGLOPEN ALS EEN GOLFDAL.

NB. HET CARDINALE PUNT van de terugkaatsing aan een vrij uiteinde is, dat DE ACTIE- EN DE REACTIE-GOLF IN HET VRIJE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK DEZELFDE FASE HEBBEN, M.A.W. AAN HET VRIJE UITEINDE HEEFT GEEN FASESPRONG PLAATS.

- β) De terugkaatsing van een CONTINUE <sup>transversale</sup> longitudinale lopende golf aan een VRIJ uiteinde.

Op het ogenblik, dat de kop van de continue lopende golf in het vrije uiteinde A aankomt, vertrekt vanuit A de eveneens continue reactiegolf.

De actie- en de reactiegolf hebben in A op ieder ogenblik DEZELFDE FASE. Verder hebben ze dezelfde  $f$  en  $r$ , dus ook dezelfde  $\lambda$ . De plaatsituatie in de draad op een bepaald ogenblik, is het resultaat van de interferentie van de actie- en de reactiegolf op dat ogenblik.

Conclusie:

In het interferentiegebied van de actie en de reactie-golf ontstaat een STAANDE GOLF met in het vrije uiteinde een BUIK. De eerste knoop ligt op  $\frac{1}{4} \lambda$  van dit vrije uiteinde; de volgende knopen liggen op afstanden van  $\frac{1}{2} \lambda$  van elkaar.

In de buiken is de amplitudo  $2r$ .

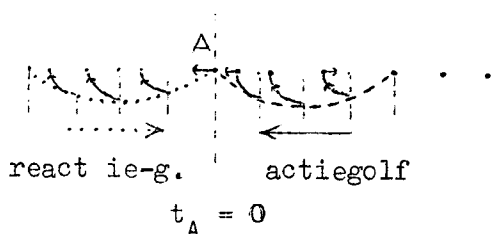
b) Terugkaatsing van LONGITUDINALE GOLVEN aan een VRIJ uiteinde.

Uit een redenering analoog aan de in  $a_\alpha$  gevolgde redenering volgt:

HET VRIJE UITEINDE STUURT EEN EVENEENS LONGITUDINALE REACTIEGOLF IN DE RIJ TERUG, DIE DEZELFDE FREQUENTIE EN DEZELFDE AMPLITUDO HEEFT ALS DE ACTIEGOLF, EN WAARVAN DE FASE IN HET VRIJE UITEINDE OP IEDER OGENBLIK GELIJK IS AAN DE FASE VAN DE ACTIEGOLF.

CONSTRUCTIES: $\alpha$ ) Een LONGITUDINALE GOLFPORTE VAN  $\frac{1}{2} \lambda$  NADERT EEN VRIJ UITEINDE.

De kop van de lopende golfportie is het midden van een VERDICHTING.



Op  $t_A = 0$  komt de actie golfportie van  $\frac{1}{2} \lambda$  in A aan. A is nu het midden van een VERDICHTING. Let op de grootten en richtingen van de snelheden der massapunten.

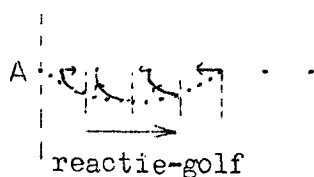
A krijgt op dit ogenblik een stoot naar links.

Op ditzelfde ogenblik vertrekt uit A de reactie golfportie van  $\frac{1}{2} \lambda$  naar rechts.

Let er op, dat de actie- en de reactie-golf in A DEZELFDE FASE hebben.

In het tijdsinterval van  $t_A = 0$  tot  $t_A = \frac{1}{2}T$  heeft er interferentie plaats tussen de tegengesteld gerichte actie- en reactie-golfportie van  $\frac{1}{2} \lambda$ .

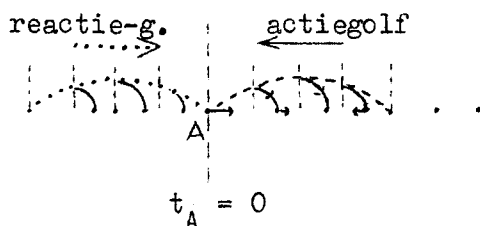
Op  $t_A = \frac{1}{2}T$  is de situatie aldus:



Conclusie: De op  $t_A = 0$  in A aankomende verdichting loopt na terugkaatsing terug als een VERDUNNING.

Een stoot naar links loopt terug als een RUK naar LINKS.

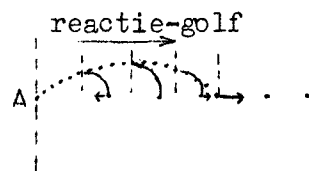
De kop van de lopende golfportie is het midden van een VERDUNNING.



A is nu het midden van een VERDUNNING.

A krijgt op dit ogehblik een ruk naar rechts.

Op  $t_A = \frac{1}{2}T$  is de situatie aldus:

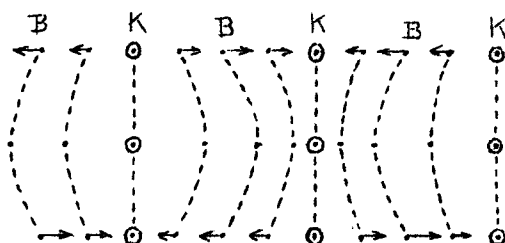


Conclusie: De op  $t_A = 0$  in A aankomende verduunning loopt na terugkaatsing terug als een VERDICHTING.

Een ruk naar rechts loopt terug als een STOOT naar RECHTS.

 $\beta$ ) Een CONTINUE longitudinale lopende golf kaatst terug aan een VRIJ uiteinde.

Resultaat: In het interferentiegebied van de actie- en de reactie golf ontstaat een STAANDE LONGITUDINALE GOLF, met in het vrije uiteinde een BUIK. De eerste knoop ligt op  $\frac{1}{4} \lambda$  van het vrije uiteinde, de volgende knopen hebben een onderlinge afstand van  $\frac{1}{2} \lambda$ . In de buiken is de amplitudo  $2r$ .

3) EINDCONCLUSIE:

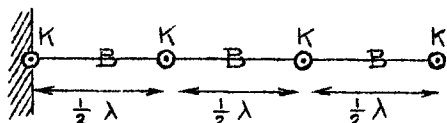
Zowel bij de terugkaatsing aan een VAST als aan een VRIJ uiteinde, ontstaat in het interferentiegebied van de actie- en de reactie-golf een STAANDE GOLF.

## VAST UITEINDE.

De actie- en de reactie-golf hebben in het vaste uiteinde op ieder ogenblik

## TEGENGESTELDE FASE.

Aan het vaste uiteinde VER - SPRINGT DE FASE  $180^\circ$ .



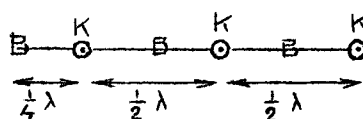
Het vaste uiteinde is een KNOOP  
In de buiken is de amplitudo  $2r$ .

## VRIJ UITEINDE.

De actie- en de reactie-golf hebben in het vrije uiteinde op ieder ogenblik

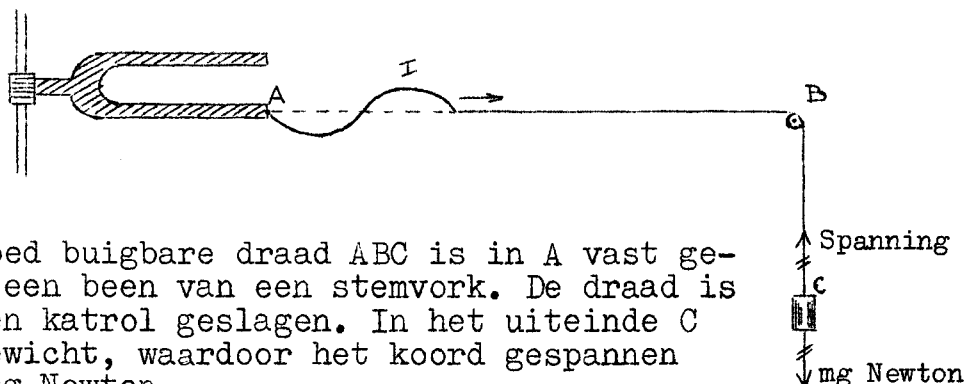
## DEZELFDE FASE.

Aan het vrije uiteinde heeft GEEN fasesprong plaats.



Het vrije uiteinde is een BUIK.  
In de buiken is de amplitudo  $2r$ .

-----

Par. 4) De proef van Melde.1) De opstelling van de proef.

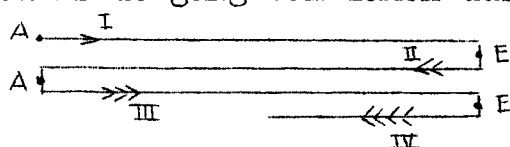
Een dunne goed buigbare draad ABC is in A vast gekoppeld aan een been van een stemvork. De draad is in B over een katrol geslagen. In het uiteinde C hangt een gewicht, waardoor het koord gespannen wordt.  $S = mg$  Newton.

2) Wat er bij de proef gebeurt.

Men brengt de stemvork in trilling. Het uiteinde A voert dan (bij benadering) een harmonische trilling uit, waarvan de trillingsas  $\perp$  draad AB. De stemvork zorgt er voor dat A deze trilling blijft uitvoeren.

Gevolgen voor de draad AB:

- a) De stemvork stuurt een **TRANSVERSALE LOPENDE GOLF (I)** in de draad AB.  
De frequentie van de zich in de draad voortplantende trilling is gelijk aan de frequentie van de stemvork  $f = \frac{1}{T}$   
De voortplantingssnelheid wordt bepaald door de soort van de draad en (zoals we zullen zien) door de spanning in de draad.  
De golflengte is nu door de formule  $v = f \cdot \lambda$  bepaald.  
De amplitudo is gelijk aan de amplitudo van de stemvork.
- b) De actiegolf I kaatst bij B terug. Daar B onbeweegbaar is, is B een **VAST** uiteinde. Bij deze terugkaatsing verspringt de fase dus  $180^\circ$ .
- c) Vanuit het vaste uiteinde B loopt een reactiegolf (II) in de draad terug, die dezelfde trillingsas, dezelfde frequentie, dezelfde amplitudo en dezelfde golflengte heeft als de actiegolf I, en waarvan de fase in B op ieder ogenblik tegengesteld is aan de fase van de actiegolf.  
 In de draad treden dan dus **TWEE** transversale lopende golven op, n.l. I en II, die gelijk gepolariseerd en tegengesteld gericht zijn, met dezelfde  $r$ ,  $f$  en  $\lambda$ .  
**IN HET GEMEENSCHAPPELIJKE GEBIED** van deze golven zal dus door **INTERFERENTIE** een **STAANDE GOLF** ontstaan, met in B een knoop en verder knopen op afstanden  $n(\frac{1}{2} \lambda)$  van B.
- d) De reactie golf II loopt van B naar A en zal bij A terugkaatsen.  
 Daar de massapunten van de draad bij A **NIET VRIJ KUNNEN UITSLINGEREN**, **TELT A VOOR GOLF II VOOR EEN VAST UITEINDE**.  
 Bij deze terugkaatsing van II tegen het vaste uiteinde A, verspringt de fase dus  $180^\circ$ . Er loopt vanuit A een reactie golf III terug naar B, die bij B terugkaatst aan een vast uiteinde enz.
- e) **SCHEMATISCH** is de gang van zaken dus als volgt:



De punt in  $\downarrow$  geeft schematisch aan, dat de fase  $180^\circ$  verspringt. In AB heeft dus tenslotte interferentie plaats van ontelbaar veel gelijk gepolariseerde lopende golven met dezelfde  $r$ ,  $f$  en  $\lambda$ .

3) Het resultaat van deze interferentie.

Als golf II in A NIET terugkaatste, zou zich in de draad AB een blijvende staande golf vormen, met een knoop in B en verder knopen op  $n \cdot (\frac{1}{2} \lambda)$  van B.

Golf II kaatst bij A echter WEL terug, en wel aan een vast uiteinde; de reactiegolf III loopt in dezelfde richting als golf I.

Dit teruglopen van golf III geeft nu aanleiding tot verschillende mogelijkheden:

a) Golf III heeft steeds bij vertrek uit A DEZELFDE FASE als de op hetzelfde ogenblik vertrekkende golf I.  
In dit geval zullen de golven III en I elkaar blijvend versterken; hetzelfde geldt voor de golven II en IV enz. De interferentie-figuur van de golven I en II wordt dus t.g.v. de terugkaatsing aan het vaste uiteinde A BLIJVEND VERSTERKT:  
In de draad AB ontwikkelt zich een BLIJVENDE STAANDE GOLF, met een knoop in B en verder knopen op de afstanden  $n(\frac{1}{2} \lambda)$  van B.  
Men zegt in dit geval, DAT DE DRAAD AB IN STAANDE TRILLING GE RAAKT.

b) De fase van golf III is bij vertrek uit A TEGENGESTELD aan de fase van de op hetzelfde ogenblik uit A vertrekkende golf I.  
In dit geval zullen III en I elkaar uitdoven: In het interferentiegebied van I, II en III zullen I en III elkaar dus weginterfereren en zal golf II ALLEEN overblijven, ZODAT ZICH IN DAT GEBIED DAN GEEN STAANDE GOLF KAN ONTWIKKELEN.  
In dit geval zal de interferentiefiguur van de golven I en II dus t.g.v. de terugkaatsing aan het vaste uiteinde A worden VERSTOORD: In de draad AB vormt zich dus GEEN BLIJVENDE STAANDE GOLF.

In dit geval geraakt de draad dus niet in staande trilling.

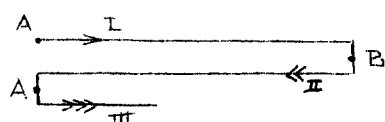
c) Golf III heeft bij vertrek uit A een willekeurig faseverschil met de op dit ogenblik uit A vertrekkende golf I.

Men kan bewijzen, dat zich ook nu in de draad geen BLIJVENDE staande golf kan ontwikkelen.

Conclusie: De draad AB geraakt DAN en SLECHTS DAN in STAANDE TRILLING (d.w.z. er ontwikkelt zich dan en slechts dan in de draad AB een BLIJVENDE staande golf) als golf III bij vertrek uit A DEZELFDE FASE heeft als de op hetzelfde ogenblik uit A vertrekkende golf I.

N.B. 4) Hoe lang moet de draad AB zijn, opdat deze in staande trilling zal geraken?

Antwoord:



We berekenen het WEGVERSCHIL tussen de uit A vertrekkende golf III en de op hetzelfde ogenblik uit A vertrekkende golf I.

Hierbij moeten we bedenken, dat een fasesprong van  $180^\circ$  telt voor  $\frac{1}{2} \lambda$ .

$$\text{dus: } \Delta S = 2 \cdot AB + 2(\frac{1}{2} \lambda) = 2 \cdot AB + \lambda. \quad (1)$$

Opdat III en I bij vertrek uit A steeds dezelfde fase hebben is nodig en voldoende dat:

$$\Delta S = \lambda, 2 \lambda, 3 \lambda, 4 \lambda, \text{ enz.} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$2AB + \lambda = \lambda, 2 \lambda, 3 \lambda, 4 \lambda, \text{ enz.}$$

$$2AB = 0, \lambda, 2 \lambda, 3 \lambda, \text{ enz.}$$

$$\text{Dus: } AB = \frac{1}{2} \lambda, 2(\frac{1}{2} \lambda), 3(\frac{1}{2} \lambda), \text{ enz.}$$

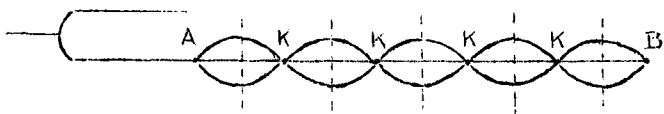
Concl.: De draad AB zal DAN en SLECHTS DAN in STAANDE TRILLING geraken, als de lengte van AB gelijk is aan een GEHEEL aantal HALVE GOLFLENGTTEN.

Dus als:

$$AB = n \cdot (\frac{1}{2} \lambda) \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Is aan deze voorwaarde voldaan, dan geraakt de draad AB in staan de trilling.

Men ziet dan het volgende:



N.B. A en B zijn KNOEPEN.

Opmerking: De amplitudo in de buiken is nu veel groter dan de amplitudo van de stemvork. Dit komt door de interferentie van de golven I, II, III, IV enz: de stemvork blijft steeds trillingsenergie aan de draad toevoeren.

Bij een draad van ideaal gekoppelde massapunten zou de amplitudo in de buiken onbeperkt groot kunnen worden.

Bij een werkelijke draad treedt echter DAMPING op, zodat b.v. golf X praktisch geen energie meer heeft. Bij een werkelijke draad wordt de amplitudo in de buiken dus niet groter dan een bepaalde waarde.

Is de lengte van de draad AB NIET gelijk aan een GEHEEL aantal HALVE golflengten, dan kronkelt de draad zich wel in alle mogelijke vormen, maar hij geraakt dan NIET in staande trilling. De amplitudo's blijven dan ook klein.



Opgave:  $AB = \frac{5}{4} \lambda$

Gevraagd: Construeer de vorm van de draad op:

$$t_A = \frac{5}{4}T, \frac{6}{4}T, \frac{8}{4}T, \frac{10}{4}T, \frac{12}{4}T, \frac{14}{4}T, \frac{15}{4}T, \frac{16}{4}T.$$

5) Berekening. De golflengte wordt bepaald door de formule:

$$v = f \cdot \lambda$$

v is de voortplantingssnelheid van de golf, uitgedrukt in m/sec.

f is de frequentie van de BRON = f van de massapunten

$\lambda$  is de golflengte, uitgedrukt in meter.

In de hogere natuurkunde wordt een formule afgeleid voor DE VOORTPLANTINGSSNELHEID van een TRANSVERSALE harmonische trilling in een draad van ideaal gekoppelde massapunten.

Deze formule luidt:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Spanning}}{M_{\text{per meter}}}} \quad \text{m/sec.}$$

Hierin is: v de voortplantingssnelheid van een TRANSVERSALE harmonische trilling, uitgedrukt in m/sec.

S<sub>panning</sub> de spanning in de draad, uitgedrukt in NEWTON.

M<sub>per meter</sub> de massa van EEN METER van de draad, uitgedrukt in kg\*.

1 meter.

Vraag: Laat zien, dat de dimensie van het rechter-lid van deze vergelijking inderdaad m/sec. is.

Antw.:

$$\left[ \sqrt{\frac{S_{\text{panning}}}{M_{\text{per meter}}}} \right] = \sqrt{\frac{\text{kg}^* \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{\frac{\text{kg}^*}{\text{m}}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$$

Opmerking: Hieruit blijkt duidelijk, dat in de noemer de MASSA PER METER moet staan!

Vraag: Hoe groot is de golflengte van de TRANSVERSALE golf in de draad?

Antw.:  $v = f \cdot \lambda$   
 $v = \sqrt{\frac{\text{Spanning}}{M_{\text{per meter}}}}$

$$\lambda = \frac{1}{f} \cdot \sqrt{\frac{\text{Spanning}}{M_{\text{per meter}}}} \text{ meter.}$$

Reflexie: De golflengte in de draad hangt dus af van  $f_{\text{BRON}}$ ,  $S_{\text{panning}}$  en  $M_{\text{per meter}}$ .

Maakt men  $f_{\text{BRON}}$  groter  $\rightarrow \lambda$  kleiner.

$S_{\text{panning}}$  groter  $\rightarrow \lambda$  groter.

$M_{\text{per meter}}$  groter  $\rightarrow \lambda$  kleiner.

Getallen voorbeeld.

Gegeven:  $S_{\text{panning}} = 20 \text{ Newton}$   
 $M_{\text{per meter}} = 2 \text{ gram}^*$   
 $f_{\text{BRON}} = 500 \text{ Hertz}$

Gevr.: Welke lengte(n) moet de draad AB hebben, opdat hij in staande trilling zal geraken?

Opl.:

$$\lambda = \frac{1}{500} \sqrt{\frac{20}{0,002}} = \frac{1}{5} \text{ meter} = 20 \text{ cm.}$$

dus  $\frac{1}{2} \lambda = 10 \text{ cm.}$   
dus  $AB = n(10) \text{ cm.} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Vraag: Welk nut heeft de proef van Melde?

- Antw.: 1) Men behulp van deze proef kan men de theoretisch afgeleide formule voor de voortplantingssnelheid van een TRANSVERSALE harmonische trilling in een draad controleren.
- 2) De proef van Melde bevestigt de theorie van de interferentie.

-----



## DEEL III

## Golfbeweging in een PLAT VLAKE en in de RUIJTE.

Par. 1) Proeven met behulp van de GOLFBAL: transversale golven aan een vloeistofoppervlak.Proef I: EEN PUNTVORMIGE trillingsbron.

Een kleine electromotor brengt een mechanisme in werking waardoor een metalen punt in trilling wordt gebracht, met de trillingsas  $\perp$  op het wateroppervlak.

Deze trillende metalen punt fungeert als puntvormige trillingsbron voor het wateroppervlak: de metalen punt brengt het massapunt 0 van het vloeistofoppervlak in transversale trilling en zorgt er tevens voor, dat 0 deze trilling blijft uitvoeren.

De proef leert:

- 1) Vanuit 0 breiden zich in alle richtingen transversale lopende golven uit over het wateroppervlak.
  - 2) Deze lopende golven breiden zich met dezelfde snelheid uit (tenminste als het water zuiver en overal even diep is.)
  - 3) De golfbergen en golfdalen vormen concentrische cirkels met 0 tot middelpunt.
  - 4) Een golflengte is een berg + een dal.
- Ook nu geldt de betrekking:  
 $v = f \cdot \lambda$ .  
 $v$  is de voortplantingssnelheid van de transversale golf.  
 $f$  is de frequentie van de trillingsbron.

Door  $f$  te variëren kan men met deze proef duidelijk demonstreren, dat  $\lambda$  omgekeerd evenredig is met  $f$ :

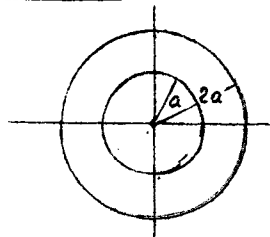
wordt  $f$  n x zo groot  $\rightarrow \lambda$  n x zo klein.

$f$  n x zo klein  $\rightarrow \lambda$  n x zo groot.

- 5) De trillingsenergie, die de trillingsbron aan het massapunt 0 toevoert om 0 in transversale trilling te houden plant zich nu CIRKELVORMIG voort over het wateroppervlak.

Vraag: Welk gevolg heeft deze cirkelvormige energieuitbreiding voor de AMPLITUDO's van de op verschillende afstanden van 0 trillende massapunten?

Antw.:

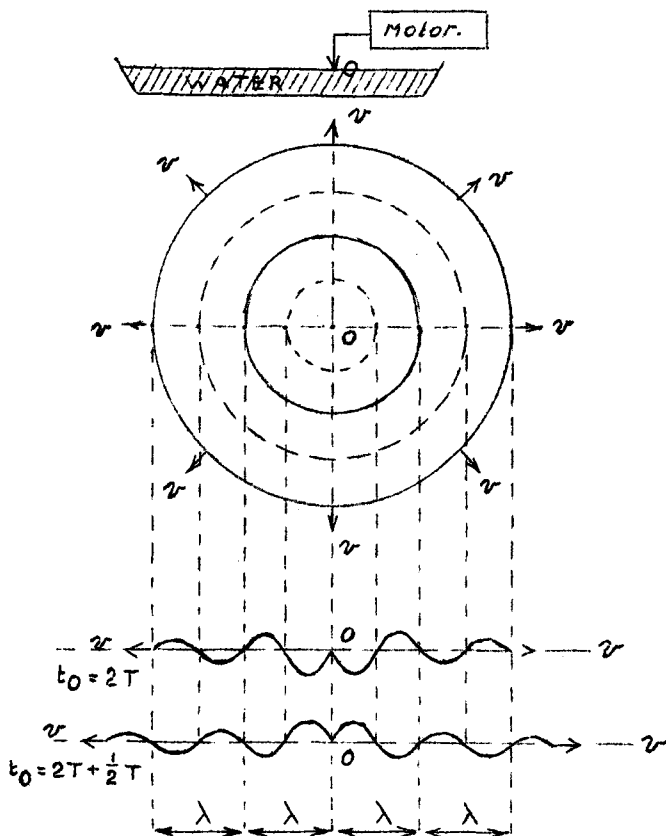


Stel, dat deze trillingsenergie zich in  $t$  sec. heeft uitgebreid over de cirkel met straal  $a$ , dan heeft deze zelfde energiehoeveelheid zich in  $2t$  sec. uitgebreid over de cirkel met straal  $2a$ .

Dezelfde energie-hoeveelheid is dan over twee maal zoveel massapunten verdeeld. Ieder massapunt op de cirkelomtrek  $2a$  krijgt dus een trillingsenergie, die de helft is van de trillingsenergie van een massapunt op de omtrek van de cirkel  $a$ .

De amplitudo van de massapunten op de omtrek van cirkel  $2a$  IS DUS KLEINER dan de amplitudo van een massapunt op de omtrek van cirkel  $a$ .

Conclusie: De ampl. van een, tengevolge van een lopende cirkelgolf, trillend massapunt is kleiner, naarmate het trillende punt verder van de puntvormige trillingsbron verwijderd is.



Opmerking:

- a) We signaleren hier een wezenlijk verschil tussen een lopende cirkelgolf en een lopende golf in een èèndimensionale rij van ideaal gekoppelde massapunten.  
Bij een lopende golf in een rij van ideaal gekoppelde massapunten kreeg ieder trillend massapunt DEZELFDE AMPLITUDO (de demping werd verwaarloosd). Bij de lopende cirkelgolven is de amplitudo van een ver afgelegen punt (ook bij verwaarlozing van de demping) KLEINER dan de amplitudo van een dicht bij de bron gelegen punt: DEZE AFNAME VAN DE AMPLITUDO IS HET GEVOLG VAN DE CIRKELVORMIGE ENERGIESPREIDING.
- b) Deze afname van de amplitudo kan men bij de proef duidelijk constateren.
- c) Zou de van 0 uitgaande trilling zich niet alleen in het platte vlak maar ook in de RUIMTE uitbreiden, dan ontstond er een lopende BOLGOLF. De trillingsenergie van een trillend massapunt op afstand  $a$  van 0, zou dan OMGEKEERD EVENREDIG zijn met  $a^2$ . (Het oppervlak van een bol met straal  $a = \pi a^2$ )

Proef II. Twee cohaerente trillingsbronnen.

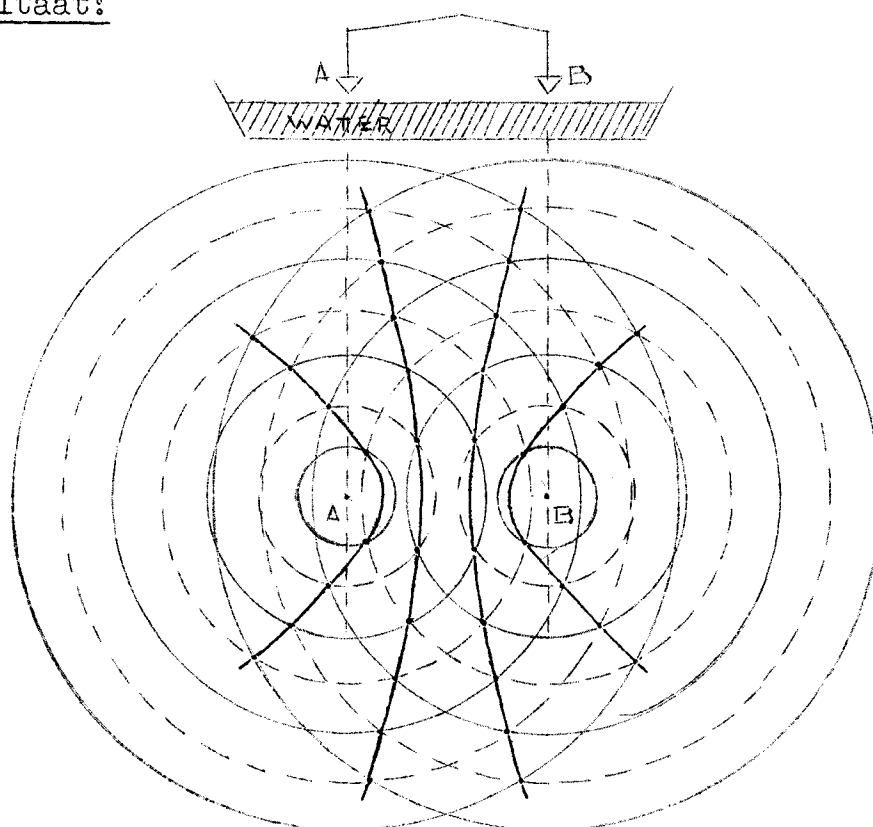
Definitie: Twee trillingsbronnen zijn cohaerent als:

- 1) de uitgezonden trillingen gelijk gepolariseerd zijn (trillingsassen!!!)
- 2) de uitgezonden trillingen dezelfde frequentie hebben.
- 3) de trillingen met dezelfde amplitudo worden uitgezonden.
- 4) de uitzending zonder onderbreking doorgaat, zodat de trillingsbronnen op ieder ogenblik òf een gelijke fase òf een constant faseverschil hebben.

We verkrijgen bij de proef met de golfbak twee cohaerente trillingsbronnen, door de metalen punt van proef I in twee punten te splitsen.

Resultaat.

Resultaat:



kleur de stilte hyp. blauw.

A en B zijn de coherente trillingsbronnen.

Van A en B gaan transversale lopende cirkelgolven uit. De figuur geeft de golfsituatie op een bepaald ogenblik: De massapunten op de cirkels ——— hebben op dit ogenblik de fase nul; de massapunten op de cirkels ----- hebben op dit ogenblik de fase  $180^\circ$ . Een halve trillingstijd later is de fase van alle punten tegengesteld aan de momentele fase.

De massapunten van het vloeistofoppervlak trillen onder invloed van de van A EN B uitgaande transversale lopende cirkelgolven: ER HEEFT DUS INTERFERENTIE PLAATS.

Uit de figuur volgt, dat er op het vloeistofoppervlak punten zijn waarin de van A en B uitgaande cirkelgolven OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELDE FASE hebben: Deze punten zijn dus BLIJVEND IN RUST. Deze punten vormen de KNOOPLIJNEN. Men kan bewijzen, dat deze knooplijnen analytisch HYPERBOLEN zijn.

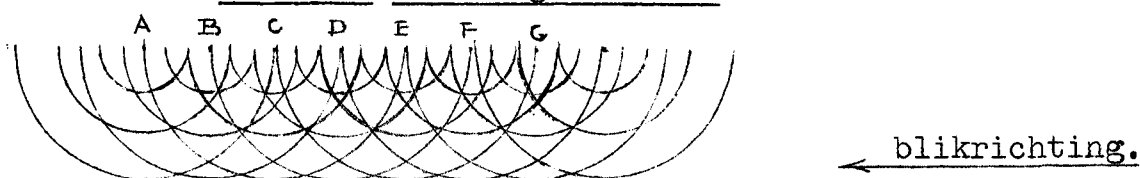
Men noemt deze knooplijnen daarom de STILTEHYPERBOLEN.

Opmerking a) We kunnen weer vragen naar de verantwoording der energie: waar blijft de energie, die de massapunten op de stilte hyperbolen van de trillingsbronnen krijgen? Dit probleem is analoog aan het probleem dat in het theorema op blz. 56 werd opgelost, n.l. de verantwoording van de energie in de knopen en buiken van een staande golf.

Het antwoord op de vraag is ook analoog: Er heeft een energie-spreiding plaats zó dat ieder massapunt van het vloeistofoppervlak de wiskundig voorgeschreven trilling in werkelijkheid kan uitvoeren. De massapunten van de stilte hyperbolen krijgen GEEN trillingsenergie; in de "buiken" heeft een ophoping van energie plaats.

b) Zouden de van A en B uitgaande trillingen zich ook in de ruimte voortplanten, dan ontstonden in de ruimte knoop-oppervlakken. Analytisch zijn dit omwentelings-hyperboloiden met de lijn AB tot as.

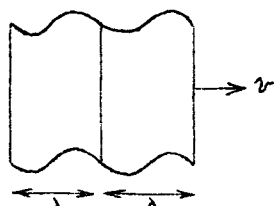
Proef III. Meerdere op een rechte lijn gelegen puntvormige cohaerente trillingsbronnen.



De op een rechte lijn gelegen punten A, B, C, D, E, F en G zijn puntvormige cohaerente trillingsbronnen. Elke van deze trillingsbronnen veroorzaakt op het wateroppervlak een transversale lopende cirkelgolf. Deze lopende cirkelgolven zullen met elkaar interfereren.

In de onmiddellijke nabijheid van de puntvormige trillingsbronnen is het resultaat van deze interferentie een onoverzichtelijk naast elkaar bestaan van golfbergen en golfdalen. Op grotere afstand van de trillingsbronnen wordt het resultaat van deze interferentie overzichtelijk: men ziet dat zich daar rechtlijnige golven vormen, d.w.z. golven waarvan de golfbergen en de golfdalen op rechte lijnen liggen, die evenwijdig lopen aan de lijn ABCDEFG. De voortplantingsrichting van deze rechtlijnige golven staat dus loodrecht op de lijn AG. (Hou het papier ter hoogte van het oog en kijk in de richting van de bij de figuur getekende pijl)

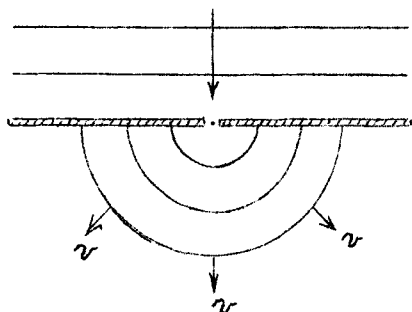
De vorming van deze rechtlijnige golven slaagt beter, naarmate het aantal op een rechte lijn gelegen cohaerente puntvormige trillingsbronnen per meter groter is.



Neemt men als trillingsbron een lat // aan het wateroppervlak. (oneindig veel cohaerente puntvormige trillingsbronnen), dan ziet men, dat zich vanaf de lat een rechte golf over het wateroppervlak voortplant in een richting loodrecht op de lat.

- Opmerkingen:
- Met nadruk wijzen we er op, dat de massapunten van het wateroppervlak alleen maar een transversale trilling uitvoeren.  
Wat zich voortplant is de trillingsenergie, die door de bron geleverd wordt.
  - Richt men het zo in, dat de rechte golf zich in een geul voortplant, dan hebben alle trillende massapunten (afgezien van de demping) dezelfde amplitudo.
  - Het ruimtelijk analogon van deze rechte golf, (zie geluid en licht) is een VLAKKE GOLF.

Proef IV. a) buiging door een puntvormige opening.

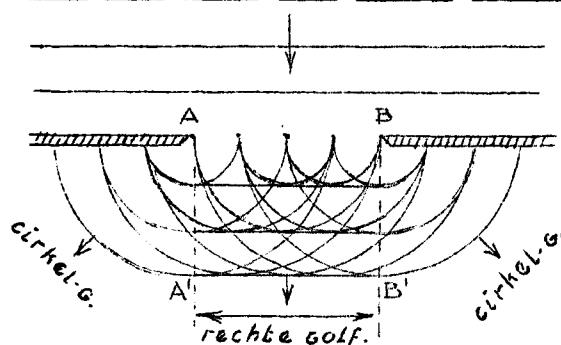


De nauwe opening in de dam laat alleen de trilling van "een" massapunt door.

De proef leert, dat de trillingen van een rechte golf kan "ontbonden" worden in cirkelgolven, afkomstig van puntvormige trillingsbronnen.

b) Buiging door een wijde opening.

zie blz. 77.

b) Buiging door een wijde opening.

Het buigingsverschijnsel bestaat in het optreden van de zijdelingse cirkelgolven. De figuur laat zien, dat het buigingsverschijnsel verklaard wordt, door ieder punt van AB te beschouwen als een puntvormige trillingsbron.

Proef V. Breking van rechte golven.

Legt men op de bodem van de golfbak een vlak plaatstuk, dat een deel van de bodem van de golfbak bedekt, dan is de waterlaag boven dit plaatstuk dunner dan in het overige deel van de golfbak. Het water van de dunnere laag is minder beweeglijk dan het water van de dikkere laag, met het gevolg dat de snelheid van de oppervlakte golven boven het plaatstuk kleiner is dan in het overige deel van de golfbak.

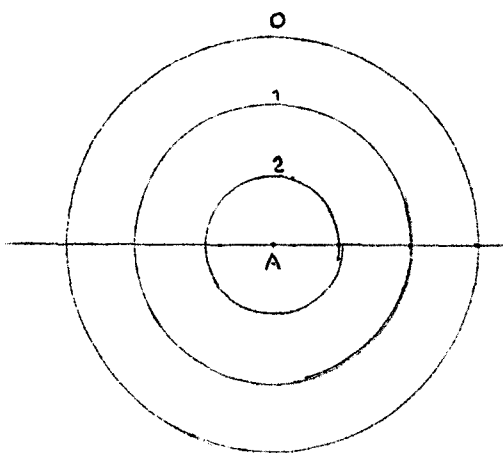
We kunnen dan demonstreren:

- 1) de breking door een planparallele plaat
- 2) de convergerende werking van een biconvexe lens
- 3) de divergerende werking van een biconcave lens.

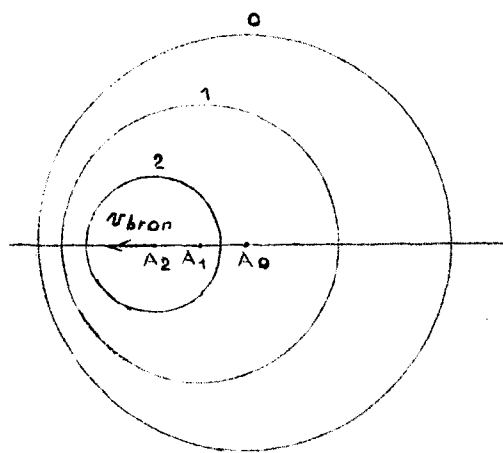
We besluiten uit deze proeven, dat de brekingswet van Snellius moet samenhangen met de verschillende voortplantingssnelheden die dezelfde trilling in de verschillende stoffen heeft. Deze samenhang zullen we in een volgende paragraaf nader onderzoeken.

Proef VI. STAANDE cirkelgolven.Proef VII. Een eenparig rechtlijnig bewegende puntvormige trillingsbron.

Bron in rust.



Bron beweegt met snelheid  $v$  m/sec naar links.



De golflengte is in iedere richting even groot.

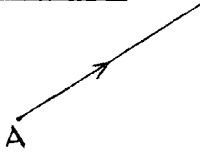
De golflengte heeft voor iedere richting een eigen waarde:  
 minimaal in de richting van  $\vec{v}_{bron}$   
 maximaal in de richting tegengesteld aan  $\vec{v}_{bron}$ .

Zie: Doppler effect.

Par. 2) Begrippen.

1) Elementaire golf. Onder een elementaire golf verstaat men de golf, die van EEN ENKEL trillend punt van het medium uitgaat,

2) Golfstraal.



A is een elementair trillend punt. Iedere in het trillende medium gelegen HALFLIJN met begin punt in A, noemt men een GOLFSTRAAL.

De massapunten van een golfstraal vormen dus een rij van gekoppelde massapunten waarlangs zich een lopende golf voortbeweegt.

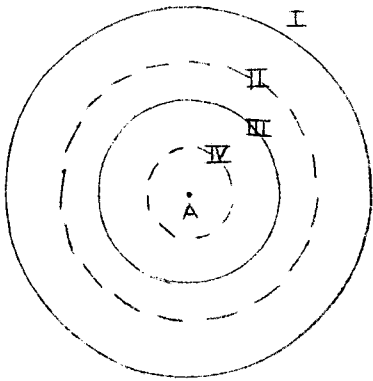
3) Golffront.

Deze term wordt in TWEE betekenissen gebruikt.

1° betekenis: Een golffront is de meetkundige plaats van de massa punten van het medium, die op het punt staan om met hun EERSTE TRILLING te BEGINNEN.

2° betekenis: Een golffront is de meetkundige plaats van de massa punten van het medium, die op eenzelfde ogenblik aan elkaar gelijke fase hebben. Punten met een faseverschil van  $n \times 2\pi$  radialen zijn in dit verband NIET als isofasisch te beschouwen.

Toelichting.



Stel A is een puntvormige trillingsbron, die op het ogenblik  $t = 0$  begonnen is te trillen.

Op het ogenblik  $t_A = 2T$  heeft de trilling van A zich uitgebreid over de cirkel (of bol) I.

Volgens de eerste definitie is I op het ogenblik  $t_A = 2T$  HET golffront.

De massapunten van I hebben onderling gelijke fase; de massapunten van II idem; III idem; IV idem;

Volgens de tweede definitie zijn I, II, III en IV golffronten. Iedere binnen I gelegen cirkel (of bol) met A tot middelpunt is volgens de tweede definitie een golffront.

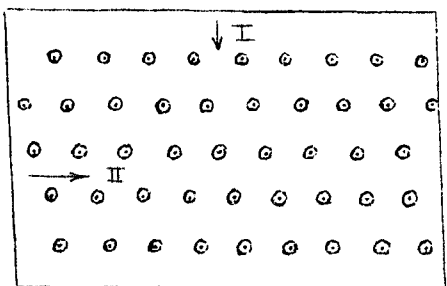
4) ISOTROPE en ANISOTROPE media. (ISOS = gelijk; TRÉPEIN = wenden, draaien.)

Definitie: Een medium heet ISOTROOP, als de lopende golven in alle richtingen DEZELFDE VOORTPLANTINGSSNELHEID hebben.

Vraag: Welke VORM heeft een elementair golffront in een isotrope stof.

Antw.: Breidt de trilling zich uit in een plat vlak  $\rightarrow$  cirkels.  
" " " " " " " de ruimte  $\rightarrow$  boloppervlakken

Definitie: Een medium heet ANISOTROOP, als de lopende golven in de ene richting een ANDERE VOORTPLANTINGSSNELHEID hebben dan in een andere richting.



Een ANISOTROOP medium kunnen we als volgt "construeren": In de golfbak plaatsen we verticale staafjes zoals de figuur aangeeft.

Een rechte golf heeft dan in richting I een kleinere voortplantingssnelheid dan in richting II.

De voortplantingssnelheid van het licht in een kristal is meestal afhankelijk van de richting waarin de lichtstraal het kristal doorkruist.

Vraag: Welke VORM heeft een elementair golffront in een ANISOTROPE stof?

Antw.:

Antw.: In ieder geval geen cirkel of bolvorm.

b.v. in kalkspaat zijn de elementaire golffronten omwentelingsellipsoïden.

Opmerkingen: 1) Men moet het begrip ISOTROOP goed onderscheiden van het begrip HOMOGEEN.

Een stof is HOMOGEEN als ieder volume element van die stof dezelfde eigenschappen heeft.

Een kalkspaat kristal is beslist HOMOGEEN, maar TEVENS ANISOTROOP.

(Kronig) 2) De vraag "waar kan de voortplantingssnelheid van een golf in een medium van afhangen", moet aldus beantwoord worden:

I Van de PLAATS in het medium. Is dit het geval, dan heet het medium INHOMOGEEN, anders HOMOGEEN

II Van de voortplantingsRICHTING. Is dit het geval, dan heet het medium ANISOTROOP, anders ISOTROOP.

III Van het transversaal of longitudinaal zijn van de trilling.

IV (Bij transversale trillingen) Van de polarisatie-richting.

Par. 3) Het beginsel van Huygens.

(Christiaan Huygens, 1629 - 1695; zoon van de secretaris van de Prins van Oranje; broer van Constantijn, de dichter; bleef ongehuwd; In de mechanica was Huygens de grote voorganger van Newton, 1642 - 1727;

1690 → Huygens publiceert zijn theorie volgens welke het licht een golfbeweging is.

1704 → Newton publiceert zijn theorie volgens welke het licht een stroom van corpuscula is.)

1) De proeven III en IV van par. 1) hebben ons er van overtuigd, dat een rechte golf kan opgevat worden als het interferentieresultaat van cirkelgolven, afkomstig van een op een recht lijnstuk gelegen rij van oneindig veel cohaerente puntvormige trillingsbronnen, en dat ieder trillend massapunt van een golffront, als het alleen werkt, in een isotroop medium een cirkelgolf veroorzaakt.

Deze conclusies vormen de grondgedachte van de theorie, die Huygens opstelde om de golfverschijnselen aan oppervlakken en in drie-dimensionale ruimten te verklaren.

Deze theorie staat bekend als HET BEGINSEL VAN HUYGENS.

2) Het beginsel van Huygens zegt:

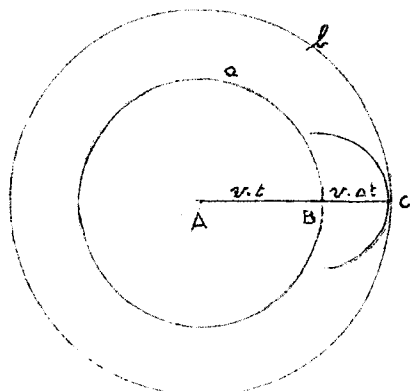
I Ieder trillend massapunt van een medium is middelpunt van elementaire golven, die zich langs de golfstralen uitbreiden.

II Van alle massapunten van een golffront ( $1^{\circ}$  betekenis!) gaan op hetzelfde ogenblik onderling gelijke elementaire golven uit, die cirkelvormig of bolvormig zijn, als het medium isotroop is

III Het nieuwe golffront ( $1^{\circ}$  betekenis) vormt steeds de omhullende van al deze elementaire golven.

3) Toelichting van III.

a)



Stel, dat A een puntvormige trillingsbron is in een isotroop medium.

De op  $t = 0$  begonnen trilling heeft zich op het ogenblik  $t$  in de ruimte uitgebreid over een boloppervlak  $a$  met straal  $a = vt$  meter.

Het boloppervlak,  $a$  is dus op het ogenblik  $t$  HET golffront.

Volgens het beginsel van Huygens gaat ieder massapunt van dit golffront nu fungeren als puntvormige trillingsbron:

Ieder massapunt van a stuurt dus een elementaire bolgolf in het medium en wel zo, dat de trillingsenergie zich steeds van A verwijderd.

In het tijdsinterval  $\Delta t$  hebben deze elementaire bolgolven de straal  $\Delta a = v \Delta t$  meter.

In de figuur is de elementaire bolgolf getekend, die op het ogenblik  $t$  van het massapunt B is uitgegaan en zich op het ogenblik  $t + \Delta t$  heeft uitgebreid over een bol met straal  $v \cdot \Delta t$  meter.

Uit de figuur volgt, dat deze elementaire bol inwendig raakt aan de bol met A tot middelpunt en  $v(t + \Delta t)$  tot straal, dit is bol b. Omdat B een willekeurig massapunt van het golffront a is, besluiten we hieruit:

1) Alle elementaire bolgolven die op het ogenblik  $t$  van de massapunten van het golffront a uitgaan, raken op het ogenblik  $t + \Delta t$  inwendig aan het boloppervlak met A tot middelpunt en  $v(t + \Delta t)$  tot straal, dus aan boloppervlak b.

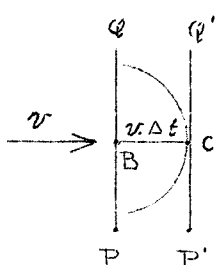
2) De massapunten van boloppervlak b staan op het ogenblik  $t + \Delta t$  op het punt om met hun eerste trilling te beginnen.

Conclusie: Op het ogenblik  $t + \Delta t$  is het boloppervlak b HET golffront.

Het feit, dat b raakt aan al de elementaire bollen, drukt men uit door te zeggen, dat b DE OMHULLENDE is van deze elementaire golven.

Uit het bovenstaande volgt tevens, dat een bolgolf in een isotroop medium altijd een bolgolf zal blijven.

b)



Stel, dat PQ op het ogenblik  $t$  het golffront (1<sup>o</sup> betekenis) is van een vlakke golf, die zich met snelheid  $v$  m/sec. in een isotroop medium naar rechts voortplant.

Volgens Huygens gaat ieder massapunt van PQ nu fungeren als puntvormige trillingsbron, die dus een elementaire BOLGOLF in het medium stuurt en wel zo, dat de trillingsenergie zich naar rechts voortplant.

Op het ogenblik  $t + \Delta t$  hebben deze elementaire bolgolven de straal  $v \cdot \Delta t$  meter.

Deze elementaire bollen raken allemaal aan het vlak P'Q' dat op afstand  $v \Delta t$  meter evenwijdig loopt aan het vlak PQ.

De massapunten van het vlak P'Q' staan op het ogenblik  $t + \Delta t$  op het punt om met hun eerste trilling te beginnen.

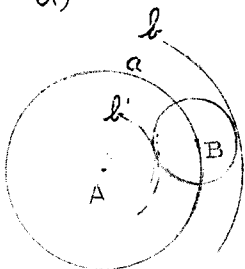
Conclusie: 1) Het vlak P'Q', dat op het ogenblik  $t + \Delta t$  de omhullende is van de elementaire golven, die op het ogenblik  $t$  van de massapunten van PQ zijn uitgegaan, is op het ogenblik  $t + \Delta t$  het nieuwe golffront.

2) Een vlakke golf zal in <sup>een</sup> isotroop medium altijd een vlakke golf blijven.

Eindconclusie: Het nieuwe golffront vormt steeds de omhullende van de elementaire golven die van de massapunten van het oude golffront zijn uitgegaan.

4) Opmerkingen:

α)



Van wiskundige kant maakt men tegen het beginsel van Huygens het volgende bezwaar:

de elementaire bolgolven, die op het ogenblik  $t$  van de massapunten van het golffront a uitgaan, hebben op het ogenblik  $t + \Delta t$  TWEE omhullenden n.l. de boloppervlakken b en b'. Wiskundig moet er dus ook een golf naar A TERUG-LOPEN.

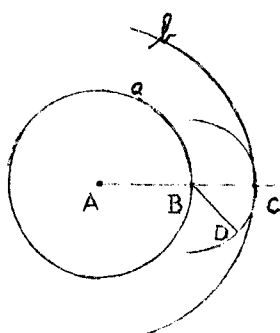
Dit bezwaar wordt natuurkundig opgeheven, als men bedenkt, dat de koppeling der massapunten er altijd naar streeft om de trilling voort te

planten naar massapunten die nog in rust zijn: De energiestroom is dus altijd van de trillingsbron AF gericht.

WAAROM dit zo is, wordt verklaard in de hogere natuurkunde.



β)



Het beginsel van Huygens is echter ook natuurkundig zeer onvolledig: Het zegt ons b.v. niet wat er verder gebeurt met de trilling, die zich langs BD voortplant.

Ook verklaart het niet, dat de energie van het nieuwe golffront b gelijk is aan de energie van het oude front a.

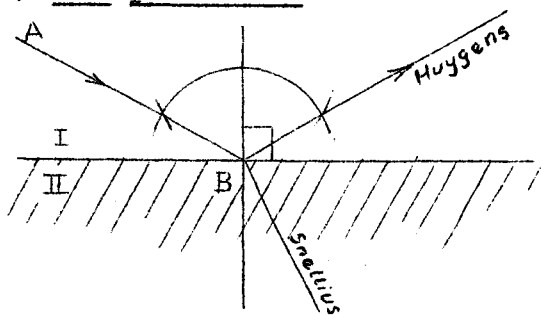
Deze problemen zijn pas rond 1819 opgelost door de interferentietheorie van Fresnel. Huygens had het begrip interferentie nog niet. We gaan hier niet verder op in.

- γ) In bovenstaande figuur moet men de halflijn ABC beschouwen als een resulterende golfstraal.

NB: De golfstralen staan bij een isotroop medium altijd loodrecht op de golffronten.

Par. 4) Terugkaatsing en breking van golven aan het grensvlak van twee media.

- 1) Het probleem.



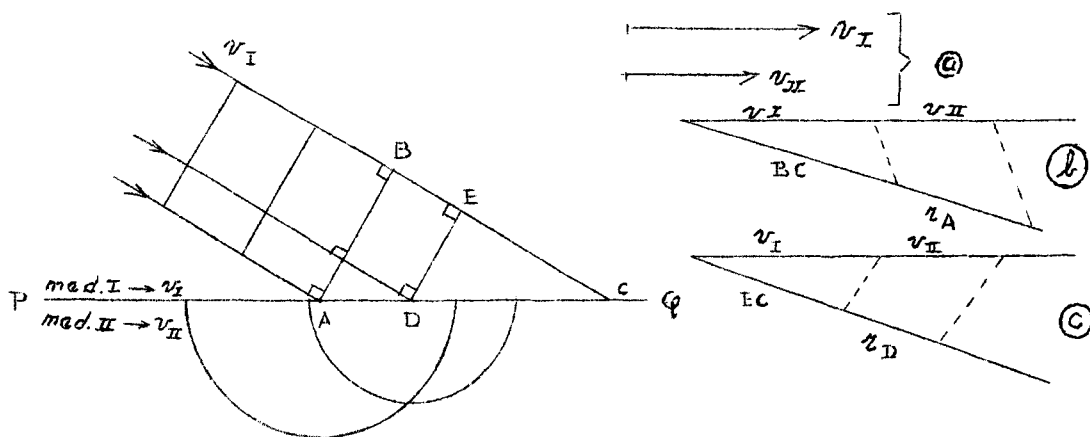
AB is een golfstraal van een of andere lopende golfbeweging.

In B treft deze straal het grensvlak van twee media.

Het is bekend, dat de energie van deze straal in twee delen verdeeld wordt: een gedeelte wordt teruggekaatsd volgens de z.g. terugkaatsingswet van Huygens; het andere gedeelte wordt gebroken volgens de wet van SNELLIUS.

We stellen nu het probleem aan de orde, om de terugkaatsingswet van Huygens en de brekingswet van Snellius te verklaren UITGAANDE VAN HET BEGINSSEL VAN HUYGENS.

NB.2) De afleiding van de wet van SNELLIUS, met behulp van het beginsel van Huygens.



Medium I en medium II zijn twee isotrope middenstoffen, die door een plat vlak  $PQ \perp$  op het vlak van tekening van elkaar gescheiden worden.

Op  $PQ$  valt een vlakke golf, waarvan de golffronten eveneens  $\perp$  op vlak van tekening: De golfstralen vormen dus een evenwijdige bundel  $\perp$  golffronten.

We veronderstellen, dat de trilling zich in medium I voortplant met snelheid  $v_I$  en in medium II met snelheid  $v_{II}$  m/sec. (zie fig. a)

We beginnen de waarneming als het golffront AB het vlak  $PQ$  in A raakt.

- a) Op dit ogenblik begint A voor medium II te fungeren als elementair trillend massapunt. A begint dus op dit ogenblik met een elementaire bolgolf in het medium II te sturen. In het tijdsinterval, dat in medium I de trilling langs de golfstraal door B zich heeft voortgeplant van B naar C,

heeft in medium II de elementaire bolgolf van A zich uitgebreid over een boloppervlak met straal  $r_a$ .  
Hoe groot is  $r_a$ ?

$$\text{Antw.: } \left. \begin{array}{l} BC = v_I \Delta t_{B \rightarrow C} \\ r_A = v_{II} \Delta t_{B \rightarrow C} \end{array} \right\} r_A : BC = v_{II} : v_I \rightarrow r_A = \frac{v_{II}}{v_I} \cdot BC.$$

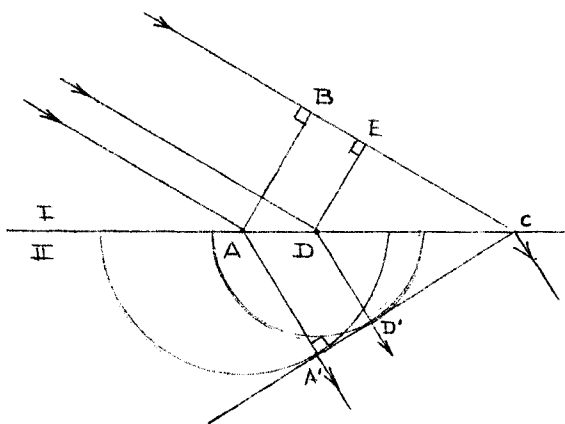
In figuur (b) is de grootte van  $r_A$  geconstrueerd.

- b) De punten van AC worden in het tijdsinterval  $\Delta t_{B \rightarrow C}$  achtereenvolgens voor medium II middelpunt van elementaire bolgolven.  
c) Is D een willekeurig punt van AC, dan volgt:  
In het tijdsinterval, dat in medium I de trilling zich heeft voortgeplant van E naar C, heeft in medium II de elementaire bolgolf van D zich uitgebreid over een bol met straal:

$$r_D = \frac{v_{II}}{v_I} \cdot EC \text{ (zie constr. (c) )}$$

- d) Bewering.  
Het raakvlak aan bol  $r_A$ , dat in C loodrecht staat op het vlak van tekening, raakt ook aan de bol  $r_D$ .

Bewijs.



We construeren de raakvlakken aan de bollen  $r_A$  en  $r_D$ , die in C  $\perp$  vlak van tekening.  
Dan volgt:

$$r_A : r_D = \frac{v_{II}}{v_I} \cdot BC : \frac{v_{II}}{v_I} \cdot EC = BC : EC$$

$$\text{maar: } BC : EC = AC : DC.$$

$$\text{dus: } r_A : r_D = AC : DC$$

$$\angle AA'C = \angle DD'C = 90^\circ$$

$$\text{dus: } \triangle AA'C \sim \triangle DD'C$$

In gelijkvormige driehoeken zijn de gelijkstandige hoeken gelijk

Dus: standhoek  $ACA' = \text{standhoek } DCD'$

Conclusie: Het raakvlak aan bol  $r_A$ , dat in C  $\perp$  vlak van tekening, raakt ook aan bol  $r_D$ .

Omdat D willekeurig was, volgt hieruit, dat het vlak  $CA'$  raakt aan alle elementaire bollen van AC.

De massapunten van het vlak element door het lijnstuk  $A'C \perp$  op het vlak van tekening staan nu op het punt om met hun eerste trilling te beginnen.

Conclusie: Het vlak element door  $A'C \perp$  vlak van tekening in het nieuwe golffront.

Wat gebeurt er nu verder?

Antwoord: Het vlak element  $A'C$  is een vlak golffront.

Welnu: een vlak golffront blijft in een isotroop medium een vlak golffront.

Conclusie: Het vlakke golffront  $A'C$  plant zich evenwijdig voort in de richting  $AA'$ . Aldus ontstaat de gebroken straal.

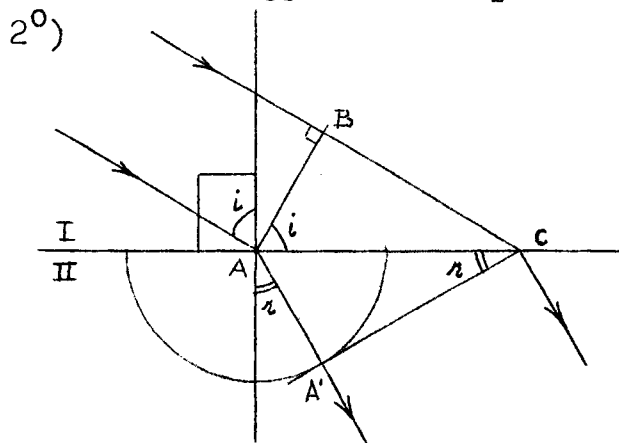
Opmerking: Op gezag van de hogere natuurkunde nemen we aan, dat de trillingsenergie zich voortplant met het vlakke frontelement  $A'C$ , en dat de bolgolven verder geen betekenis meer hebben.

- e) Welk verband bestaat er nu tussen de invallende en de gebroken straal?

Antwoord: zie blz. 83.

Antwoord:

1<sup>o</sup>) Uit het bovenstaande volgt onmiddellijk, dat een golfstraal die vòòr de breking in het vlak van tekening ligt, na de breking weer in het vlak van tekening zal liggen.  
 m.a.w.: De invallende straal, de normaal en de gebroken straal liggen in èèn plat vlak.



$$\left. \begin{aligned} \sin i &= \frac{BC}{AC} \\ \sin r &= \frac{AA'}{AC} \end{aligned} \right\} \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BC}{AA'} = \frac{v_{II}}{v_I}$$

(AA' =  $\frac{v_{II}}{v_I} \cdot BC$ )

conclusie:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_I}{v_{II}}$$

Daar de stoffen I en II isotroop zijn, is  $\frac{v_I}{v_{II}}$  onafhankelijk van  $\angle i$  en  $\angle r$ .

m.a.w.:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constant getal.}$$

Dit constante getal noemt men de brekingsindex voor het geval, dat de trilling van medium I naar medium II gaat =  $n_{I \rightarrow II}$ .

Dus:

$$n_{I \rightarrow II} = \frac{v_I}{v_{II}}$$

De brekingsindex van I  $\rightarrow$  II is gelijk aan de verhouding van de voortplantingssnelheden van de trilling in medium I en II

N.B.: 1<sup>o</sup>) en 2<sup>o</sup>) vormen samen de brekingswet van Snellius.

f) Eindconclusie:

Uitgaande van het beginsel van Huygens kan men de brekingswet van Snellius afleiden. Deze afleiding levert bovendien het winstpunt op, dat men te weten komt waar de brekingsindex  $n_{I \rightarrow II}$  aan gelijk is:

$$n_{I \rightarrow II} = \frac{v_I}{v_{II}}$$

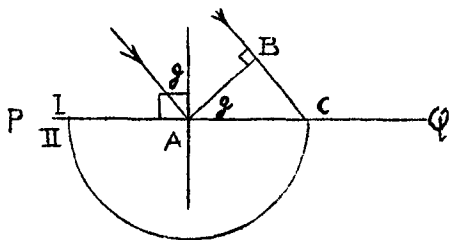
g) Kwesties, die samenhangen met de breking en de brekingsindex.

a) Nadere beschouwing van de mogelijkheden bij de breking

$$n_{I \rightarrow II} = \frac{v_I}{v_{II}}$$

$v_I > v_{II}$ $n_{I \rightarrow II} > 1$ <p><math>r_A &lt; BC</math>                  II is optisch dichter dan I</p>	$v_I = v_{II}$ $n_{I \rightarrow II} = 1$ <p><math>r_A = BC</math>                  II optisch gelijk aan I</p>	$v_I < v_{II}$ $n_{I \rightarrow II} < 1$ <p><math>r_A &gt; BC</math>                  II optisch minder dicht dan I</p>
---	--	---

β) In het geval dat  $v_I < v_{II}$ , kan zich het geval voordoen, dat  $r_A \geq AC$



In nevenstaande figuur is  $r_A = AC$ .  
IN DIT GEVAL VORMT ZICH IN A MEDIUM II GEEN VLAK GOLFFRONT MEER.

De invallende golfstraal wordt dan aan het grensvlak PQ PRECIES TOTAAL TERUG GEKAATST.

De invalshoek waarbij zich deze situatie voordoet heet de grenshoek g.

$$\sin g = \frac{BC}{r_A} = \frac{v_I}{v_{II}} = \frac{v_{\text{klein}}}{v_{\text{groot}}}$$

γ) Opgave: Gegeven:  $n_{I \rightarrow II}$  en  $n_{I \rightarrow III}$

Gevraagd  $n_{II \rightarrow III}$

Oplissing:

$$n_{II \rightarrow III} = \frac{v_{II}}{v_{III}} = \frac{v_{II}}{v_I} \times \frac{v_I}{v_{III}} = n_{II \rightarrow I} \times n_{I \rightarrow III}$$

Conclusie:

$$n_{II \rightarrow III} = n_{II \rightarrow I} \times n_{I \rightarrow III}$$

Dit probleem doet zich voor bij het licht.

Definitie: Onder de absolute brekingsindex van een stof verstaat men de brekingsindex voor het geval, dat de lichtstraal gaat van het vacuüm (lucht) naar de gegeven stof.

Definitie: Onder de relatieve brekingsindex  $n_{I \rightarrow II}$  van twee stoffen I en II verstaat men de brekingsindex voor het geval, dat de lichtstraal van stof I naar stof II gaat.

Uit het bovenstaande volgt:  $n_{I \rightarrow II} = n_{I \rightarrow \text{vac.}} \times n_{\text{vac.} \rightarrow II}$

Getallen-voorbeeld:  $n_{\text{vac} \rightarrow \text{glas}} = \frac{3}{2}$   
 $n_{\text{vac} \rightarrow \text{water}} = \frac{4}{3}$  }  $n_{\text{glas} \rightarrow \text{water}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

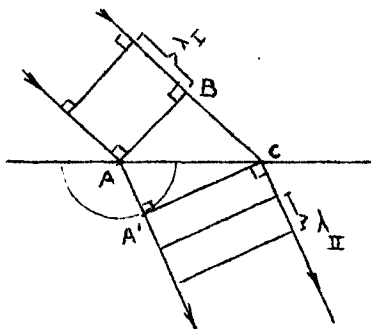
δ) Wat valt er te zeggen van de FREQUENTIE van de gebroken straal?

Antwoord: Omdat we te doen hebben met GEDWONGEN trillingen, is de frequentie van de gebroken straal altijd gelijk aan de frequentie van de invallende straal.

N.B. Welk verband bestaat er tussen de golflengten van de invallende en de gebroken straal?

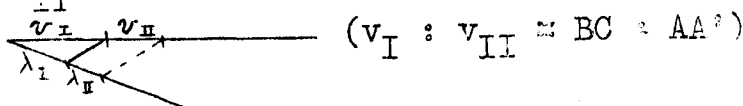
Antwoord:

$$\left. \begin{aligned} v_I &= f \lambda_I \\ v_{II} &= f \lambda_{II} \end{aligned} \right\} \lambda_I : \lambda_{II} = v_I : v_{II}$$



Gevraagd: Construeer  $\lambda_{II}$ .

Constructie:



Conclusie: De golflengten van eenzelfde trilling in verschillende media, verhouden zich als de respectievelijke voortplantingssnelheden van die trilling in deze media.

NB. Een kleur of een toon wordt gekenmerkt door de frequentie, NIET door de golflengte!

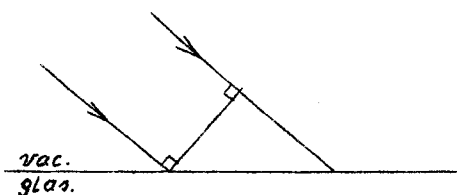
ε) In het vacuüm hebben alle lichtkleuren dezelfde voortplantings snelheid.

In een medium NIET: In ieder medium is

$$v_{\text{rood}} > v_{\text{oranje}} > v_{\text{geel}} > v_{\text{groen}} > v_{\text{blauw}} > v_{\text{violet}}.$$

Gevraagd: Welk gevolg heeft dit, als een straal wit licht (mengsel van alle lichtkleuren) vanuit het vacuüm op een glasoppervlak valt?

Antwoord:



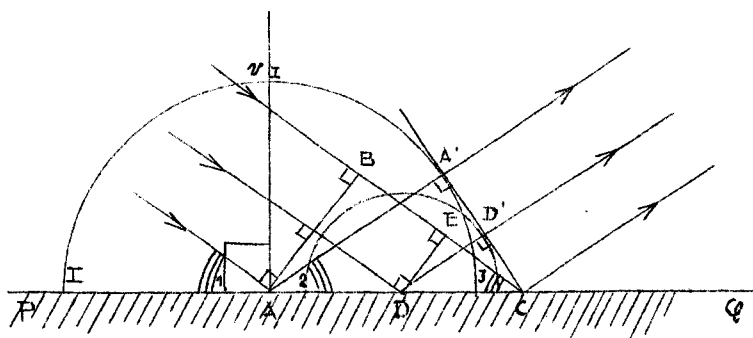
conclusie: kleurschifting.

Ter oriëntatie: In punt I van deze par. 4 werd het probleem aan de orde gesteld om de terugkaatsingswet van Huygens en de brekingswet van Snellius af te leiden, uitgaande van het beginsel van Huygens.

In punt 2 werd de brekingswet van Snellius afgeleid. Deze afleiding voerde tot het inzicht dat de brekingsindex gelijk is aan de verhouding van de snelheden van de trilling in de isotrope media.

Verder werden er een vijftal kwesties behandeld die met de breking en de brekingsindex samenhangen. We vervolgen nu de theorie.

3) De terugkaatsingswet van Huygens; de terugkaatsing van een vlakke golf aan een vlakke wand.



We beginnen de waarneming op het ogenblik dat het vlakke golf-front AB in A raakt aan het vlak FQ.

Op dit ogenblik begint A voor het medium I te fungeren als puntvormige trillingsbron. Op dit ogenblik begint A dus met een bolgolf in het isotrope medium I te sturen.

De punten van AC worden achtereenvolgens voor het medium I middelpunt van elementaire bolgolven.

Analoog aan de redenering in punt 2) volgt:

a) Het vlak door CA'  $\perp$  vlak van tekening, raakt aan de elementaire bollen  $r_A$ ,  $r_D$  enz.

b) Alle punten van CA' hebben aan elkaar gelijke fase.

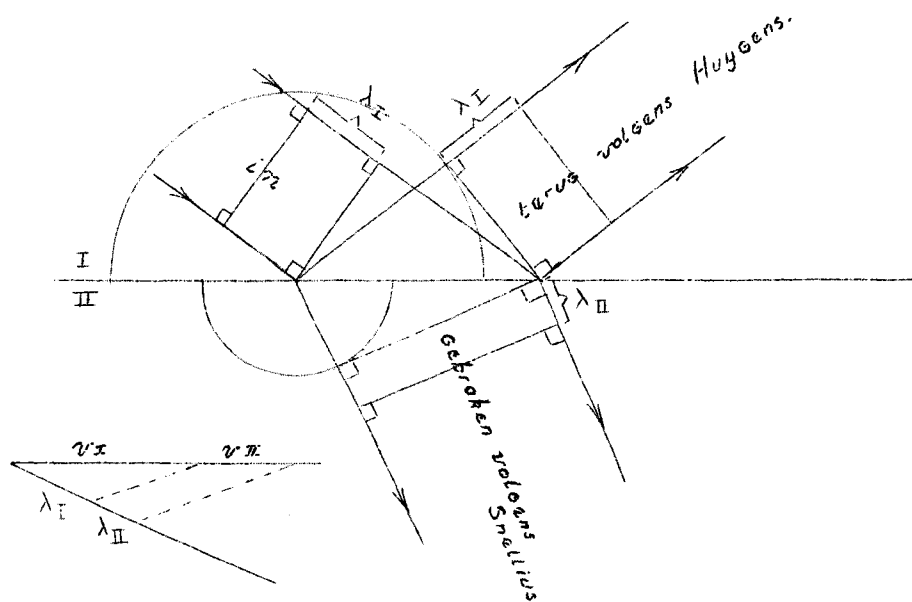
Conclusie: Het vlakelement door CA'  $\perp$  vlak van tekening is een nieuw golffront.

Dit plant zich evenwijdig voort in de richting AA'. De voortplantingssnelheid is  $v_I$  m/sec.

- c) De golfvronten staan vòòr en na de terugkaatsing  $\perp$  vlak van tekening  $\rightarrow$  Een invallende golfstraal, de normaal en de bijbehorende teruggekaatste golfstraal liggen in èèn plat vlak.
- d)  $\angle A_1 = \angle C_1 = \angle A_2 \rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 \rightarrow$  dus ook de complementen gelijk  $\rightarrow$  hoek van inval = hoek van terugkaatsing.

Conclusie: De terugkaatsingswet van Huygens.

- 4) Eindconclusie uit 2) en 3)



- 5) Terugkaatsing van een bolgolf tegen een vlakke wand.  
(zie les)

Par. 5) Buigingsverschijnselen.

- Buiging langs een rand.
- Buiging door een brede opening. (opening groot t.o.v.  $\lambda$ )
- Buiging door een puntvormige opening. (opening zeer klein t.o.v.  $\lambda$ )

Vraag: Waarom kan men wel "om een hoek horen" maar niet om een hoek zien?

-----

DEEL IV.

Golven in het inwendige van vaste stoffen, vloeistoffen en gassen.

Par. 1) Inleiding:

In deel III hebben we de algemene eigenschappen van de driedimensionale golven behandeld. Het deed daarbij niets ter zake of de golven transversaal of longitudinaal waren, en of we te doen hadden met een golfbeweging in een vaste stof, een vloeistof een gas of b.v. een lichtgolf in het vacuum: Het beginsel van Huygens had betrekking op de golfbewegingen ALS ZODANIG.

We vragen nu naar het specifieke van de golfbewegingen in het inwendige van een vaste stof, een vloeistof en een gas.

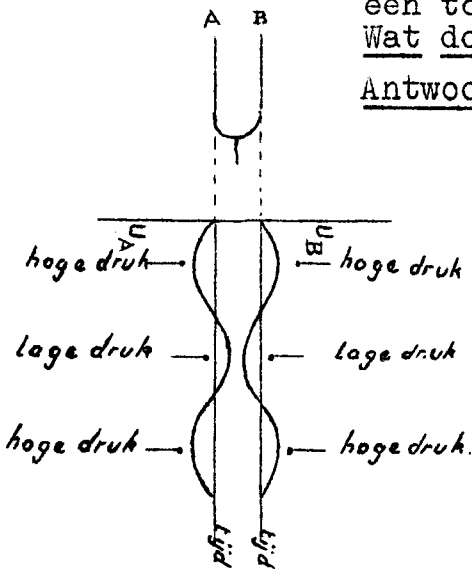
De golfbewegingen in vaste stoffen, vloeistoffen en gassen hebben dit gemeenschappelijk, dat ze bestaan in een periodieke beweging der corpuscula. Er zijn echter ook verschillen, die het gevolg zijn van de verschillende bouw van de vaste stoffen, de vloeistoffen en de gassen.

a) Golfbewegingen in gassen.

Wordt een stemvork aangeslagen, dan horen we een toon.

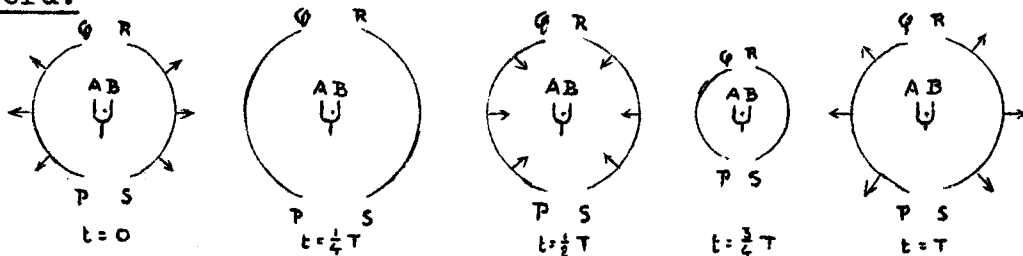
Wat doet de stemvork en wat gebeurt er in de lucht?

Antwoord: Zoals bekend is voeren de uiteinden A en B (in de eerste benadering) een harmonische trilling uit. In nevenstaande grafiek, zijn de uitwijkingen van A en B getekend als functie van de tijd. De grafiek laat zien, dat de benen van de stemvork met hetzelfde rythme aan weerskanten van de stemvork plaatselijk een hoge en een lage druk veroorzaken. Daar een gas er naar streeft op iedere plaats dezelfde druk te hebben, zal deze periodieke drukwisseling zich bolvormig in de ruimte uitbreiden als een lopende golf.



Vraag: Wat doet een luchtlaag in de omgeving van de stemvork?

Antwoord:



*Opmerking: A en B zijn eigenlijk twee coherente trillingsbronnen. In de figuren hebben we het zo voorgesteld alsof alleen trillingsenergie naar links en B alleen trillingsenergie naar rechts stroomt.*

De luchtlagen PQ en RS voeren een periodieke pulserende beweging uit.

Hieruit besluiten we, dat de luchtlagen om de stemvork een LONGITUDINALE trilling uitvoeren.

We krijgen dus in de lucht om de stemvork hetzelfde beeld als bij de LONGITUDINALE lopende golven: verdichtingen gevolgd door verdunningen planten zich voort langs de golfstralen. In de verdichting heeft de snelheid der luchtmoleculen dezelfde richting als de voortplantingsrichting van de golf; in de verdunning is de snelheid der luchtmoleculen tegengesteld gericht aan de voortplantingsrichting van de golf.

Conclusie:

Conclusie: 1<sup>o</sup>) De "elastische koppeling" bestaat bij een gas uit het streven van een gas om op iedere plaats DEZELFDE DRUK te hebben.

Men drukt dit uit door te zeggen, dat men bij een gas te doen heeft met een DRUK-ELASTICITEIT.

2<sup>o</sup>) In het inwendige van een gas kunnen alleen LONGITUDINALE golfbewegingen optreden.

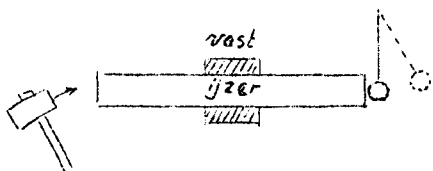
b) Golfbewegingen IN HET INWENDIGE van vloeistoffen.

Evenals de gassen hebben de vloeistoffen alleen DRUK-ELASTICITEIT. In het INWENDIGE van een vloeistof kunnen dus ook alleen maar LONGITUDINALE golfbewegingen optreden.

c) Golfbewegingen in het INWENDIGE van vaste stoffen.

De moleculen (of atomen) van een vaste stof zijn quasi-elastisch met elkaar verbonden. Dit heeft tot gevolg, dat in het INWENDIGE van een vaste stof zowel LONGITUDINALE - (t.g.v. druk elasticiteit) als TRANSVERSALE golfbewegingen kunnen optreden. De voortplantingssnelheid van een LONGITUDINALE golf in een bepaalde vaste stof is altijd GROTER dan de voortplantingssnelheid van een TRANSVERSALE golf in die stof.

Voor ons zijn alleen de LONGITUDINALE golven van belang:



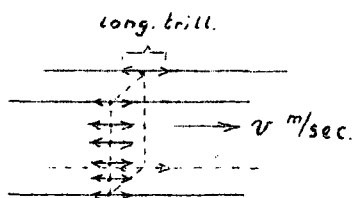
Nevenstaande proef toont aan, dat in een vaste stof inderdaad longitudinale golven kunnen optreden.

Par. 2) De voortplantingssnelheden van LONGITUDINALE golven.

I In vaste stoffen.

In de hogere natuurkunde wordt bewezen:

$$v_{\text{long}} = \sqrt{\frac{E}{s}} \text{ m/sec.}$$



Hierin is:

$v_{\text{long}}$  = snelheid v.d. Long.golf in m/s

$E$  = de elasticiteitsmodulus in  $\frac{N}{m^2}$   
(zie wet van Hooke)

$s$  = soortelijke massa v.d. stof in  $\frac{kg^*}{m^3}$

N.B. Vraag! Kloppen de dimensies?

Antwoord:  $\left[ \sqrt{\frac{E}{s}} \right] = \sqrt{\frac{N}{m^2} \cdot \frac{m^3}{kg^*}} = \sqrt{\frac{kg^* \cdot m}{sec^2} \cdot \frac{m}{kg^*}} = \sqrt{\frac{m^2}{sec^2}} = \frac{m}{sec}$

Opmerkingen: 1) Hoe groter de elasticiteitsmodulus is, m.a.w. hoe elastischer de stof is, des te groter is de voortplantingssnelheid van de longitudinale golf.

2)  $v_{\text{long}}$  hangt af van de temperatuur!

$$\text{Immers: } s_t = \frac{s_0}{1 + \gamma t} \frac{kg^*}{m^3}$$

II In vloeistoffen:  $v = \sqrt{\frac{E}{s}}$  m/sec.

$E$  is het omgekeerde van de z.g. SAMENDRUKBAARHEIDSCOEFFICIENT

NB. III In gassen.

1) De formule voor de voortplantingssnelheid van een (longitudinale) golf in een gas is het eerst afgeleid door Pierre Simon LAPLACE (1749 - 1827)

We zullen deze formule niet bewijzen.



$$\text{Laplace I} \quad v = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{P}{S}} \quad \text{m/sec.}$$

Hierin is  $v$  = de voortplantingssnelheid v.d. longitudinale golf, in m/sec.

$C_p$  = de soortelijke warmte bij constante druk.

$C_v$  = de soortelijke warmte bij constant volume.

$P$  = de druk van het gas, in  $\frac{N}{m^2}$

$S$  = de soortelijke MASSA van het gas, bij DEZE DRUK en DE HEERSENDE TEMP., in  $\frac{kg^*}{m^3}$

Vraag: Kloppen de dimensies?

Antwoord:

$$\left[ \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{P}{S}} \right] = \sqrt{\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg^*}{m^3}}} = \sqrt{\frac{N \cdot m}{kg^*}} = \sqrt{\frac{kg^* \cdot m}{sec^2} \cdot \frac{m}{kg^*}} = \sqrt{\frac{m^2}{sec^2}} = \frac{m}{sec.}$$

2) We gaan de formule Laplace I omwerken.

$$v = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{P}{d \times 0,09 \times \frac{P}{76 \times 136 \times g} \times \frac{273}{T}}}$$

dus:

$$v = \sqrt{\frac{76 \times 136 \times g}{273} \times \frac{1}{0,09} \times \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}}}$$

$$\text{nu is: } R_{\text{H}} = \frac{76 \times 136 \times g}{273} \times \frac{m}{dx 0,09} \quad \frac{\text{Joule}}{OK}$$

$$\frac{*}{\text{mol}} R_{\text{gram}} = \frac{76 \times 136 \times g}{273} \times \frac{2 \cdot d \cdot 10^{-3}}{dx 0,09} = \frac{76 \times 136 \times g}{273} \times \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,09}$$

$$\text{dus: } v = \sqrt{\frac{R^* \cdot 10^3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}} \quad \text{m/sec.}$$

$$\sqrt{\frac{R^* \cdot 10^3}{2}} = 64,2 = C$$

dus:

$$\text{Laplace II} \quad v = C \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}} \quad \text{m/sec}$$

Deze formule moet onvoorwaardelijk van buiten gekend worden!

Par. 3) Nadere beschouwing van de formule Laplace II.

1) Voor eenzelfde gas bij verschillende temperaturen geldt:

$$v_{T_I} : v_{T_2} = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2}$$

2) Voor gelijk atomige gassen heeft  $\frac{C_p}{C_v}$  dezelfde waarde. Voor twee gelijk atomige gassen -  $C_v$  - bij dezelfde temp. geldt dus:

$$v_I : v_{II} = \sqrt{\frac{1}{d_I}} : \sqrt{\frac{1}{d_{II}}}$$

Hieruit volgt:

a) Zijn de snelheden van het geluid in gelijk-atomige gassen bij eenzelfde temp. bekend, alsmede  $d_I$  dan kan men  $d_{II}$  berekenen.

b) Is de snelheid van het geluid in lucht bij een bepaalde temp. bekend, alsmede  $d_I$ , dan kan men de snelheid van het geluid in ieder twee atomig gas<sup>II</sup> waarvan  $d_{II}$  bekend is, voor deze temp. berekenen.

3) Bij een bepaald gas, bij een bepaalde temperatuur is de snelheid van het geluid ONAFHANKELIJK van de druk die het gas heeft!

Dit is ook logisch, want de formule geldt voor een ideaal gas, en bij een ideaal gas zijn de botsingen der molec. tijdloos en volkomen veerkrachtig.

NB 4) Is de snelheid van het geluid in een gas uit proeven bekend, dan kan men met behulp van de formule van Laplace  $\frac{C_p}{C_v}$  berekenen:

Uit de waarde van  $\frac{C_p}{C_v}$  kunnen we besluiten of het gas èèn of twee of meer -  $\frac{C_p}{C_v}$  - atomig is.

voor 1- atomige gassen is  $\frac{C_p}{C_v} = 1,67$

" 2- " " " " "  $\frac{C_p}{C_v} = 1,4$  enz.

$C_p$  kan men vrij eenvoudig direct proefondervindelijk bepalen.

Is nu  $\frac{C_p}{C_v}$  ook bekend, dan kan men  $C_v$  berekenen.

Zijn  $C_p$  en  $C_v$  bekend, dan volgt UIT DE FORMULE VAN ROBERT MAYER DE ARBEIDSWAARDE VAN EEN CALORIE.

Opmerking:

Verwar de formule van Laplace  $v = c \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \frac{T}{d}}$  m/sec., die ons leert hoe groot de snelheid van het geluid in een gas is, niet met de formule:

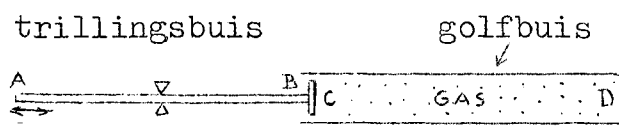
$v = \sqrt{\frac{3}{2} R^* \cdot 1000} \sqrt{\frac{T}{d}}$  m/sec. die ons leert, hoe groot de gemiddelde snelheid van de moleculen van een gas is.

Par. 4) Directe bepaling van de snelheid van het geluid in de lucht.  
(zie les)

Par. 5) DE PROEF VAN KUNDT. ( $\pm 1870$ ): Een gaskolom in staande trilling; Analogie met de proef van Melde.

NB.

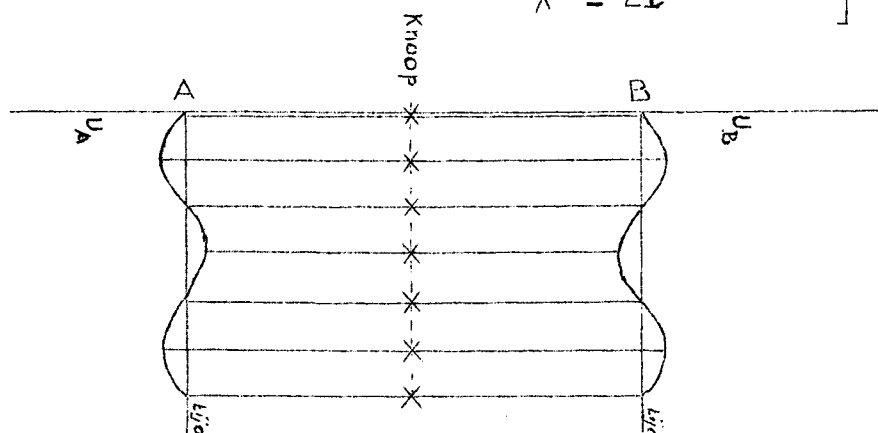
1) De proef.



AB is een glazen of metalen staaf, die in het midden is geklemd.

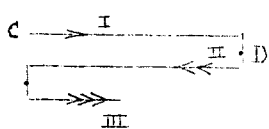
De trillingsbuis wordt in longitudinale staande trilling gebracht. (in lengte-richting wrijven met vochtige doek): In de klem een knoop; in de uiteinden buiken.

$$\left. \begin{aligned} v_{tr.buis} &= f_{tr.} \cdot \lambda_{tr.} \\ \lambda &= 2l \end{aligned} \right\} \text{ dus } f_{tr.buis} = \frac{v}{2l}$$



nevenstaande grafiek brengt in beeld hoe de lengte van de trillingsbuis verandert als functie van de tijd.

B stuurt een longitudinale lopende golf in de golfbuis (I), deze kaatst terug tegen het vaste uiteinde D, fase sprong  $180^\circ$ , de reactiegolf II kaatst bij C weer terug tegen een vast uiteinde III  $\rightarrow$  enz.



Gevr: Onder welke voorwaarde raakt de gaskolom CD in staande trilling?

Antw: Als III bij vertrek uit C dezelfde fase heeft als de op dat ogenblik vertrekkende golf I

$$\Delta S = 2CD + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\lambda\right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{en } \Delta S = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad CD = 0, \frac{1}{2}\lambda, 2\left(\frac{1}{2}\lambda\right), 3\left(\frac{1}{2}\lambda\right), \dots$$

Conclusie: De lengte van de gaskolom in de golfbuis met een geheel aantal halve golflengten zijn.

Vraag: Wat is de frequentie van de staande trilling in de gaskolom?

Antw.:  $f_{\text{gaskolom}} = f_{\text{trillingsbuis}}$  gedwongen trilling!

Vraag: Waaraan ZIET men, dat de gaskolom CD in staande trilling verkeert?

Antw.:



NB: Men kan dus de golflengte meten!

Vraag: Waaraan hoort men, dat de gaskolom CD in staande trilling verkeert.

Antw.: Geluid van trillingsbuis versterkt!  $\therefore$  gaskolom resoneert!

Vraag: Wat gebeurt er als de lengte van de gaskolom niet gelijk is aan een geheel aantal  $\frac{1}{2}\lambda$ ?

Antw.: I en II willen altijd een staande golf vormen, maar III stuurt de knoopvorming in de war  $\therefore$  wel beweging maar geen staande golf.

Vraag: Wat moet men dus bij de proef van Kundt doen?

Antw.: 1) De lengte van de gaskolom zo lang veranderen tot de Kundtse figuren zichtbaar worden.

2)  $\lambda_{\text{gas}}$  meten.

2) Berekening:

<u>Trillingsbuis.</u>	<u>Golfbuis.</u>
$v_{\text{tr.}} = \sqrt{\frac{E}{S}} \text{ m/sec.}$	$v_{\text{gas}} = 64,2 \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}} \text{ m/sec.}$
$v_{\text{tr.}} = f_{\text{tr.}} \cdot 2l$	$v_{\text{gas}} = f_{\text{gas}} (2 \text{ fig.})$
dus: $f_{\text{tr.}} = \frac{v_{\text{tr.}}}{2l}$	dus: $f_{\text{gas}} = \frac{v_{\text{gas}}}{2 \text{ fig}}$
verband: $f_{\text{tr.}} = f_{\text{gas}}$	

dus:  $\frac{v_{\text{tr.}}}{2l_{\text{buis}}} = \frac{v_{\text{gas}}}{2 \text{ fig.}}$

In deze vergelijking 4 grootheden; als er drie bekend zijn,.....

3) Toepassingen van de proef van Kundt.

I Bepaal met Kundt  $v_{\text{gas}}$  als gegeven is  $v_{\text{ijzer}}$ .

Antw.

$$\frac{v_{\text{tr.}}}{2l} = \frac{v_{\text{gas}}}{2 \text{ fig.}} \rightarrow v_{\text{gas}} \rightarrow \text{Laplace!}$$

II Bepaal met Kundt  $v_{\text{gas}}$  als  $v_{\text{lucht}}$  gegeven is.

Antw.:



vul buis eerst met lucht  $\rightarrow 2 \text{ fig}_{\text{lucht}}$   
 daarna met gas  $\rightarrow 2 \text{ fig}_{\text{gas}}$

$$\therefore \frac{v_{\text{lucht}}}{2 \text{fig}_{\text{lucht}}} = \frac{v_{\text{gas}}}{2 \text{fig}_{\text{gas}}} \rightarrow v_1 : v_2 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} : \frac{1}{\sqrt{d_2}}$$

$$v_{t_1} : v_{t_2} = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2}$$

III a) Bepaal met Kundt  $v_{\text{ijzer}}$  als  $v_{\text{lucht}}$  gegeven is.

NB b) Bespreek een proef ter bepaling van de elasticiteitsmodulus van ijzer.

Antw. Bepaal met Kundt  $v_{\text{ijzer}} \rightarrow v_{\text{ijzer}} = \sqrt{\frac{E}{S}}$  m/sec.  $\rightarrow E$

Par. 6) Overzicht van de formules van de voortplantingssnelheid van golven.

Transversale golven.

Treden op:

- 1) aan het oppervlak van lichamen.
- 2) in gespannen draden.
- 3) in inwendige van vaste stoffen.

Voor gespannen draden geldt:

$$v_{\text{tr}} = \sqrt{\frac{\text{Spanning.}}{\text{Massa per meter}}} \text{ m/sec}$$

Longitudinale golven.

Treden op in het inwendige van de stoffen.

vaste stoffen:  $v_{\text{long}} = \sqrt{\frac{E}{S}}$  m/sec.

gassen.  $v_{\text{long}} = 64,2 \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}}$  m/sec

-----

HOOFDSTUK XIII

G E L U I D .

D E E L I. De waarneming door middel van het oor.

Par. 1) Voorwaarden voor het waarnemen van geluid.

- I Trillingsbron.
- II Medium {
  - vast
  - vloeistof
  - gas

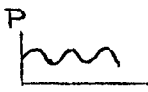
Het trommelvlies kan alleen transversaal trillen → de trillingen, die het trommelvlies in trilling brengen moeten dus longitudinaal zijn.

Nu kunnen zich in gasen en vloeistoffen alleen longitudinale golven uitbreiden. ∴ Het gehoororgaan is dus inderdaad op de longitudinale golven in gasen en vloeistoffen ingesteld.

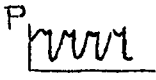
Par. 2) Toon.

- 1) Beschrijf een proef om de drukwisseling van de lucht tegen het trommelvlies bij de waarneming van geluid in beeld te brengen.


Antwoord: zie les.

- 2) Onderscheid: enkelvoudige toon  → harmonische wisseling.


klank

 → periodieke druk wisseling  
= { harm. wisselingen  
= meerdere tonen tegelijk.

geruis

 → onregelmatige drukverandering

knal

 → één stoot.

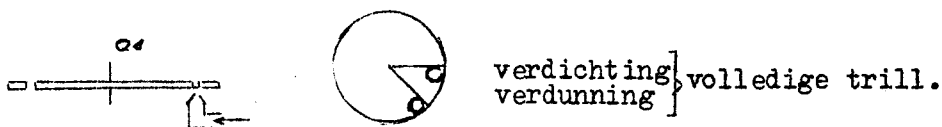
3) Nadere beschouwing van de toon.

We nemen dus een toon waar, als de trilling van de lopende golf in het medium een enkelvoudige harmonische trilling is.

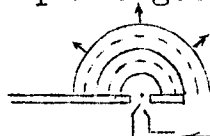
- Men onderscheidt: I de hoogte van de toon.  
II de sterkte van de toon.

ad I: De hoogte.

Proef met sirene.



In de lucht breiden zich, met de snelheid van het geluid, regelmatig verdichtingen en verdunningen uit, dus een lopende golf.



Heeft de schijf p openingen } →  $f = p \cdot n$  Hertz  
n omwent. per sec. }  
 $v_{\text{lucht}} = f \cdot \lambda$

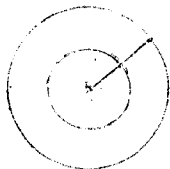
- De proef leert: 1)  $f$  groot  $\rightarrow$  toon hoog  
 $f$  klein  $\rightarrow$  toon laag  
 2) opdat zich in de lucht een lopende golf kan vormen moet  $f > 20$ .

ad II: De sterkte.

zie les.

De sterkte wordt bepaald door de amplitudo der waargenomen trilling.

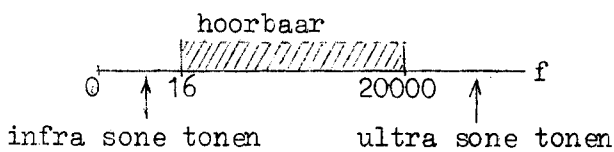
Opmerking:



De trillingsenergie die de bron aan het medium geeft, plant zich bolvormig uit.  
 $O = 4\pi r^2$   
 Sterkte van de waargenomen toon is omgekeerd evenredig met  $r^2$ .

Par: 3) Grenzen der hoorbaarheid.

I) Vanwege  $f$ .



II) Vanwege de sterkte  $\rightarrow$  gehoordrempel (zie les)

Par: 4) Interval = Verhouding der trillingsgetallen.

*Onder het interval tussen twee tonen merkt men het VERHOUDINGSgetal tussen de frequenties van de tonen.*

*Sommige intervallen geeft men een naam:*

- 1 : 2  $\rightarrow$  octaaf
- 2 : 3  $\rightarrow$  kwint
- 3 : 4  $\rightarrow$  kwart
- 4 : 5  $\rightarrow$  terts

$a' = 435$  Hertz.

Par: 5) Timbre. Schw. bl. 216

Par: 6) Terugkaatsing en breking van het geluid. Schw. bl. 219

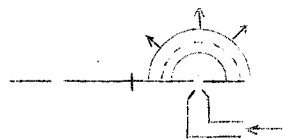
Par: 7) Buiging van het geluid. Schw. bl. 224

Buiging sterker naarmate spleetbreedte kleiner is t.o.v.  $\lambda$ .

D E E L II: Geluidsbronnen. (toon en klankinstrumenten)

Par, 1) De sirene.

In lucht longitudinale lopende bolgolf.



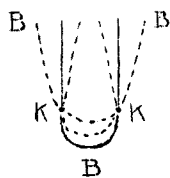
$$v = 64,2 \sqrt{\frac{C_p \cdot T}{C_v \cdot d}} \left. \vphantom{\frac{C_p \cdot T}{C_v \cdot d}} \right\} v = f \cdot \lambda_{\text{lucht.}}$$

$f = n \cdot p$

Vraag: Waarom een toon?

Opm.: De sirene is de enige geluidsbron, die niet berust op interferentie.

Par: 2) De stemvork.

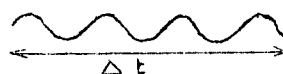


- 1) Trilling berust op interferentie. Staande transversale golf in gebogen metalen staaf.
- 2) Elk been van de stemvork veroorzaakt in de lucht een longitudinale lopende bolgolf.

$$v = 64,2 \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}} \left. \vphantom{\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T}{d}} \right\} v_l = f_{\text{stemv.}} \cdot \lambda_{\text{lucht}}$$

$f_{\text{stemvork}}$  bepaald.

- 3) Bepaling  $f$  stemvork (1<sup>o</sup> bepaling)
- 4) Cohaerente trillingsbronnen.



Par. 3) Snaren:

Gespannen draden, die door strijken, aanslaan of tokkelen in staande transversale trilling worden gebracht.

Proef: sonometer.

Gevr: Waarom kan een snaar alleen een toon geven als de snaar in staande trilling verkeert?

Gevr: Wat verstaat men onder een trillingsgetal (eigen frequentie) van de snaar?

Antw: Onder een trillingsgetal van een snaar verstaat men de frequentie als de snaar in een staande trilling verkeert.

N.B. Gevr: Hoeveel trillingsgetallen heeft een snaar? Welk verband bestaat er tussen deze trillingsgetallen?

Antw: De theorie der interferentie (Melde!) leert, dat een draad alleen in staande trilling kan verkeren, als de lengte = geheel aantal halve golflengten.

We krijgen derhalve de volgende mogelijkheden:

Geval I

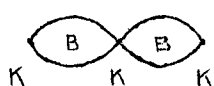


Dit is de eenvoudigste trillingswijze. De toon, die bij deze trillingswijze behoort heet de grondtoon van de snaar.

Hoe groot is de frequentie van de grondtoon?

$$\left. \begin{aligned} \text{Antw: } v &= \sqrt{\frac{S}{m_{pm}}} \\ v &= f \cdot \lambda \\ \lambda &= 2 \ell \end{aligned} \right\} f_{gr} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{S}{m_{pm}}} \text{ Hertz}$$

Geval II



eerste boventoon.  
 $\lambda_{I} = \frac{1}{2} \lambda_{gr} \rightarrow f_{I} = 2 f_{gr}$

Geval III



tweede boventoon.  
 $\lambda_{II} = \frac{1}{3} \lambda_{gr} \rightarrow f_{II} = 3 f_{gr}$   
 enz.

Conclusie: I Een snaar heeft oneindig veel eigen frequenties.

II  $f_{gr} : f_{I} : f_{II} : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$

o  $f_{gr} \quad f_{I} \quad f_{II}$       b.v.  $f_{gr} = 400 \text{ Hertz}$   
 $f_{I} = 800 \text{ Hertz}$   
 $f_{II} = 1200 \text{ Hertz}$


Tussen liggende tonen kan deze snaar bij deze spanning niet geven!

Nadere beschouwing van de grondtoon.

$$f_{gr} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{S_p}{m_{pm}}} \text{ Hertz.}$$

l is de lengte in meter  
 S<sub>p</sub> is de spanning in Newton  
 m<sup>p</sup> is de massa per meter in kg\* } reflexie op variaties van S, l, m  
Proef Sonometer.


Opmerkingen:

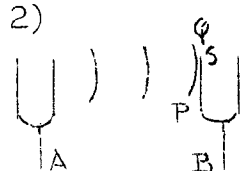
- 1) De staande trilling van de snaar is een gevolg van interferentie.
- 2) Snaar zelf geeft een zeer zwak geluid  → klankkast.

- 3) Welke van haar eigen frequenties een snaar heeft hangt af van de wijze en de plaats waarop de snaar wordt aangeslagen.
- 4) Een snaar kan tegelijk haar grondtoon en een of meerdere boventonen geven:  
 $\therefore$  de klank van de snaar.
- 5) Bij de proef van Melde voert de draad een gedwongen trilling uit.  
 De draad raakt echter alleen in staande trilling als de frequentie van de stemvork gelijk is aan een van de eigen frequenties van de draad bij de gegeven spanning.

Par. 4) Resonantie.

1) Het verschijnsel.

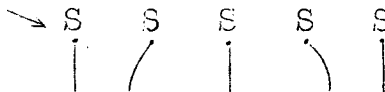
Proef 1)  als  $f_B = f_A \rightarrow$  B gaat slingeren, amplitudo wordt groter.  
 opm:  $f_B = n f_A \rightarrow$  B gaat ook trillen.  
 als  $f_B \neq f_A$   
 $\neq n f_A$  } B resoneert niet.

Proef 2)  A stuurt een longitudinale lopende bolgolf in het medium.  
 Voor het medium geldt dus:  
 $v_{\text{medium}} = f_A \cdot \lambda_{\text{medium}}$

De luchtlagen om A voeren dus een pulserende harmonische trilling uit.

De luchtlaag PQ trilt dus harmonisch met frequentie  $f_A$

Als de luchtlaag PQ naar rechts gaat, wordt B zacht aangeslagen. De stemvork B begint dus op zijn manier te trillen, dus met zijn eigen frequentie, dus



De stemvork A onderhoudt de trilling van de luchtlaag PQ. B blijft dus stootjes ontvangen.

Als  $f_B = f_A \rightarrow$  S en PQ gaan dan op hetzelfde moment in dezelfde richting door de oorsprong.  
 B ontvangt dus op het juiste moment een stootje  $\rightarrow$  amplitudo van B wordt groter  $\rightarrow$  B gaat zelf als geluidsbron fungeren, d.w.z. B resoneert met A.

Bij RESONANTIE is gedwongen trilling = eigen trilling.

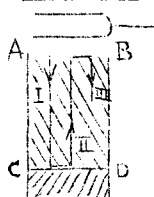
Als  $f_B = n f_A \rightarrow$  zwakke resonantie.

Als  $f_B \neq f_A$   
 $\neq n f_A$  }  $\rightarrow$  De trilling van PQ dempt trilling van B

- 2) Definitie resonantie: Verschijnsel, dat een geluidsbron A, door middel van een medium een ander klankinstrument B in staande trilling brengt, zodat B voor het medium als werkende geluidsbron gaat fungeren.

Par. 5) Resonantie van gaskolommen.

1) Proef.



ABCD is een gaskolom.  $AC = 1$  meter.

De stemvork stuurt een longitudinale lopende bolgolf in de lucht.

De gaslaag AB wordt dus in harmonische trilling gebracht.

De trilling van AB veroorzaakt in de gaskolom ABCD een longitudinale lopende golf.



$$v_{\text{gas}} = N_{\text{stemv.}} \cdot \lambda_{\text{gas}}$$

De golflengte in de gasvulling heeft dus bij deze stemvork en deze temperatuur een heel bepaalde waarde. Deze longitudinale lopende golf kaatst bij CD terug tegen een vast uiteinde, (sprong  $180^\circ$ ) loopt terug, kaatst bij AB terug tegen een vrij uiteinde (geen sprong) en loopt weer terug in ABCD enz.

De gaskolom ABCD zal in staande trilling geraken als III bij vertrek uit AB dezelfde fase heeft als de op dat ogenblik uit AB vertrekkende golf I.

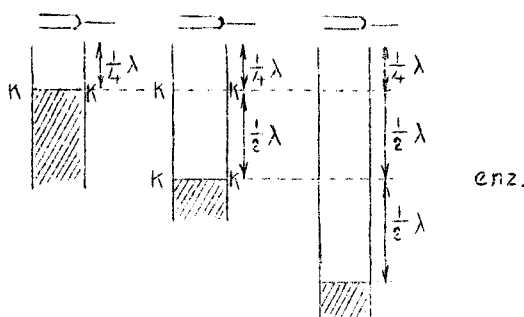
Vraag: Welke lengte moet de gaskolom hebben opdat deze in staande trilling zal geraken?

Opl:  $\Delta S = 2l + \frac{1}{2} \lambda_{\text{gas}} \text{ cis } \lambda_{\text{gas}}, 2 \lambda_{\text{gas}}, 3 \lambda_{\text{gas}} \dots$

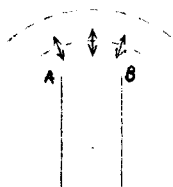
dus  $2l = \frac{1}{2} \lambda_{\text{gas}}, \frac{3}{2} \lambda_{\text{gas}}, \frac{5}{2} \lambda_{\text{gas}}$

dus  $l = \frac{1}{4} \lambda_{\text{gas}}, \frac{3}{4} \lambda_{\text{gas}}, \frac{5}{4} \lambda_{\text{gas}}, \dots$

Dus een van de volgende gevallen:



Heeft de gaskolom èn van deze lengten, dan raakt deze bij het trillen van de stemvork in longitudinale staande trilling.



De laag AB stuurt nu zelf een longitudinale lopende golf in de ruimte met constante frequentie. d.w.z.: de gaskolom gaat zelf als geluidsbron fungeren. M.a.w. de gaskolom resoneert met de stemvork.

Opmerking: Buiging. *Op AB heeft ook buiging plaats, met het gevolg dat de schakel trilt iets boven de opening van de buis ligt. Bij de tonnen wordt deze buiging verwaarloosd.*

2) We geven de gaskolom een willekeurige lengte.

Gevr: Hoe verhouden zich de frequenties waarbij de gaskolom zal resoneren?

Opl.:  $v_{\text{gas}} = f \cdot \lambda_{\text{gas}}$

voor resonantie moet:

$l = \frac{1}{4} \lambda, \frac{3}{4} \lambda, \frac{5}{4} \lambda, \dots$

dus  $\lambda = 4l, \frac{4}{3}l, \frac{4}{5}l$

$f_{\text{gr}} = \frac{v_{\text{gas}}}{4l}$

$f_{\text{I}} = 3 \cdot \frac{v_{\text{gas}}}{4l}$

$f_{\text{II}} = 5 \cdot \frac{v_{\text{gas}}}{4l}$

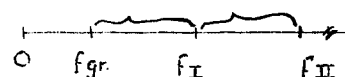
enz.

$\therefore f_{\text{gr}} : f_{\text{I}} : f_{\text{II}} \text{ enz.} = 1 : 3 : 5 \dots$

Conclusie:

I  $f_{\text{gr}} = \frac{64,2 \sqrt{\frac{C_p}{C_v}} \frac{T}{d}}{4l}$

II  $f_{\text{gr}} : f_{\text{I}} : f_{\text{II}} = 1 : 3 : 5 : 7$



Reflexie:  $l \rightarrow$  hoe langer  $l$  des te lager is de grondtoon.

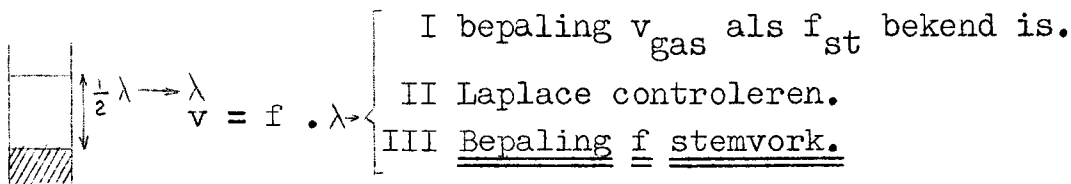
$T \rightarrow$  " hoger  $T$  " " hoger " " " "

$d \rightarrow$  " groter  $d$  " " lager " " " "

N.B. zie blz. 98.

N.B. De gaskolom resoneert alleen met die tonen, die de gaskolom zelf kan geven als deze in staande trilling verkeert.  
 Het resoneren van een gaskolom is selectieve resonantie.

3) Toepassing proef resonantie gaskolom.



4) Toepassing resonantie: klankkast Stemvork.

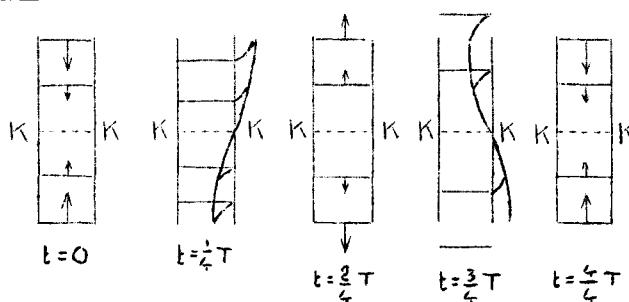
Par. 6) De eigenfrequenties van gaskolommen.

A Open gaskolommen.



Trillingsmogelijkheden:

I Grondtoon.



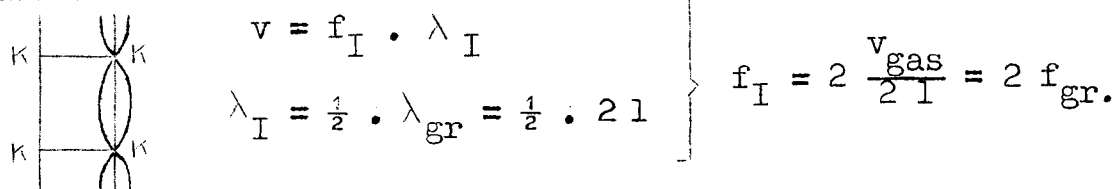
Opmerking: 1) We zien af van de buiging.

2) In buik heftige gasbeweging maar kleine spanningsvariatie  
 In knoop gas in rust maar grote spanningsvariatie.

3) gaskolom veroorzaakt in ruimte regelmatige verdunningen en verdichtingen → toon.

De frequentie van de grondtoon:  $v = f_{gr} \cdot \lambda$   
 $\lambda = 2 l$  }  $f_{gr} = \frac{v_{gas}}{2 l}$

II 1° Boventoon.



III 2° Boventoon.

$v = f_{II} \cdot \lambda_{II}$   
 $\lambda_{II} = \frac{1}{3} \lambda_{gr}$  }  $f_{II} = 3 \frac{v_{gas}}{2 l} = 3 f_{gr}$

enz.

Concl: I Een open gaskolom heeft oneindig veel eigen frequenties

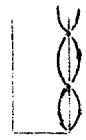
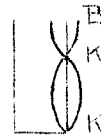
II  $f_{gr} : f_I : f_{II} : \dots = 1 : 2 : 3 : 4$



B Gesloten gaskolommen.

B Gesloten gaskolommen.

Eigen frequenties:  
zie par. 5 punt 2



$$\bar{f}_{gr} = \frac{v_{gas}}{4l}$$

$$\bar{f}_I = 3 f_{gr}$$

$$\bar{f}_{II} = 5 f_{gr}$$

Conclusie:  $\bar{f}_{gr} : \bar{f}_I : \bar{f}_{II} : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots$

$$\bar{f}_{gr} = \frac{v_{gas}}{4l}$$

Eindconclusie:

OPEN



GESLOTEN



$$f_{gr} = \frac{v_{gas}}{2l}$$

$$\bar{f}_{gr} = \frac{v_{gas}}{4l}$$

$$f_{gr} : f_I : f_{II} \dots = 1:2:3:4 \dots$$

$$\bar{f}_{gr} : \bar{f}_I : \bar{f}_{II} \dots = 1:3:5:7 \dots$$

N.B. Bij buizen van gelijke lengte is  $f_{gr}$  het octaaf van  $\bar{f}_{gr}$

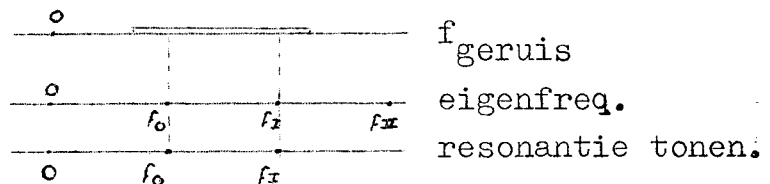
Par. 7) Orgelpijpen.

1) Principe.

Proef:



Gasvlam veroorzaakt geruis.  
De gaskolom resoneert met de eigenfrequenties die in het geruis voorkomt.



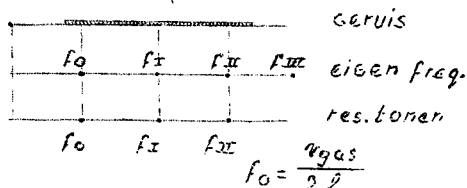
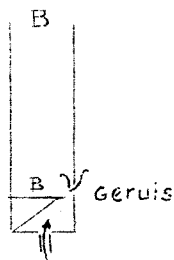
2) Bouw van orgelpijp.

3) De experimentele bepaling van de ligging van de knopen en buiken.

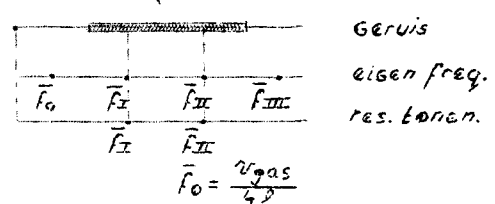
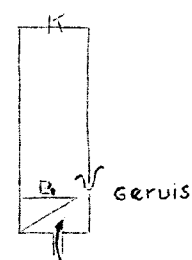
Conclusie: Bij het onderste uiteinde, waar de pijp wordt aangeblazen bevindt zich altijd een buik.

4) Open en gesloten orgelpijpen.

OPEN



GESLOTEN



Zit in het geruis een van de eigen-frequenties van de gaskolom, dan raakt de gaskolom in staande trilling. Daarna treedt er een terugwerking op van de eigen-trilling van de gaskolom op de geruisveroorzaking van de lip: de lip gaat alleen die tonen veroorzaken die de gaskolom graag heeft!

5) Trillingstoestanden van de luchtlagen in de pijp.

6) Spanningsvariaties in de knopen.

Par. 8) Tongpijpen.

Par. 9) Platen en vliezen. aperiodische resonantie.

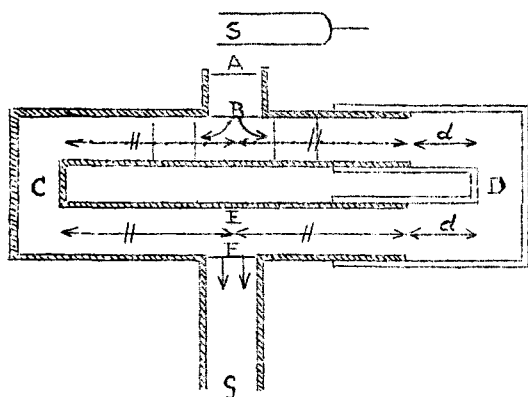
Par.10) Klankkast bij viol.

-----

## D E E L III

Interferentie-verschijnselen in het medium  
BUITEN de trillingsbron .

- Par. 1) De proef van Quincke: (Georg Quincke, 1834-1924, Heidelberg)  
1) Het toestel en de opstelling van de proef.



Nevenstaande figuur geeft een schematisch beeld van de interferentiebuis van Quincke: De buis AB vertakt zich bij B in twee buizen, die zich bij E weer verenigen tot de buis FG. De buis D kan "trombone-achtig" uitgeschoven worden, zodat men de weg BDE langer kan maken dan de weg BCE. Is de buis D het stuk  $d$  uitgeschoven (zie figuur) dan is het WEGVERSCHIL BDE - BCE gelijk aan  $2d$ .

Dus:  $\Delta l = 2d$

S is een geluidsbron, die EEN enkele toon geeft (b.v. een stemvork, een sirene of een trillingsbuis van Kundt).

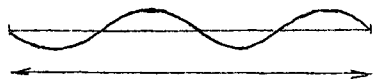
S stuurt een longitudinale lopende golf bij A in de buis. BIJ B SPLITSZEN DE GOLFFRONTEN ZICH IN TWEE DELEN: Het ene deel volgt de weg BCE, het andere deel volgt de weg BDE.

Bij F komen de golven weer samen.

DE GASLAGEN IN DE BUIS FG GAAN NU TRILLEN ONDER INVLOED VAN TWEE IN DEZELFDE RICHTING VOORTLOPENDE LONGITUDINALE GOLVEN MET DEZELFDE FREQUENTIE EN (VRIJWEL) DEZELFDE AMPLITUDO.

2) Mogelijke gevallen.

Geval I. Het wegverschil  $\Delta l$  is een EVEN aantal HALVE GOLFLINGTEN



$$\Delta l = 2d$$

$$\text{b.v. } \Delta l = 4 \left(\frac{1}{2}\lambda\right)$$

De in F samenkomende golffronten hebben dan OP IEDER OGENBLIK AAN ELKAAR GELIJKE FASEN.

De lopende golven in FG zullen elkaar dus maximaal versterken. (zie blz 46 en verder)

Geval II. Het wegverschil  $\Delta l$  is een ONEVEN aantal HALVE GOLFLINGTEN.



$$\Delta l = 2d$$

$$\text{b.v. } \Delta l = 3 \left(\frac{1}{2}\lambda\right)$$

De in F samenkomende golffronten hebben OP IEDER OGENBLIK TEGENGESTELDE FASEN.

De lopende golven in FG doven elkaar dus uit.

Geval III. Het wegverschil  $\Delta l \neq k\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$   $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Hebben de in F samenkomende golffronten een faseverschil dat ligt tussen  $120^\circ$  en  $240^\circ$ , dan zullen de lopende golven in FG elkaar verzwakken; ligt het faseverschil tussen  $0^\circ$  en  $120^\circ$  of tussen  $240^\circ$  en  $360^\circ$ , dan zullen de lopende golven in FG elkaar versterken.

N.B.3) Stelling: Met behulp van de interferentiebuis van Quincke kan men de GOLFLENGTE bepalen van een bij een bepaalde toon behorende geluidsgolf in het gas waarmee de buis gevuld is, bij de temperatuur van de buis.

Bewijs: Stel de interferentiebuis van Quincke in op uitdoving. Verschuif daarna D zover naar buiten tot er VOOR HET EERST weer uitdoving optreedt.  
HET WEGVERSCHIL IS DAN EEN GOLFLENGTE GROTER GEWORDEN.

Hebben we D daartoe  $\Delta d$  meter moeten uitschuiven, dan is dus

$$\lambda = 2 \Delta d \text{ meter.}$$

Is  $\Delta d$  gemeten, dan kan men dus de golflengte berekenen van de bij de gegeven toon behorende geluidsgolf in het gas waarmee de buis gevuld is.

CONCLUSIE: DE INTERFERENTIEBUIJS VAN QUINCKE DIENT OM GOLFLENGTTEN VAN GELUIDSGOLVEN IN GASSEN TE BEPALEN.

- 4) Berekeningen:  $v_{\text{gas}} = f_{\text{bron}} \cdot \lambda_{\text{gas}}$   
 $\lambda_{\text{gas}}$  kan bepaald worden doormiddel van de proef van Quincke.
- a) Is bovendien  $v_{\text{gas}}$  bekend  $\rightarrow f_{\text{bron}}$
- b) Is  $f_{\text{bron}}$  bekend  $\rightarrow v_{\text{gas}} \rightarrow$  Laplace controleren!

5) Opgaven:

I. De interferentiebuis van Quincke is ingesteld op uitdoving. Men trekt de schuifbuis D 4 cm. uit en neemt dan voor het eerst maximale versterking waar.

Gevraagd: a) De golflengte van de geluidsgolf. (antw. 16 cm.)

b) Hoever moet men D verder uittrekken om weer maximale versterking te krijgen. (Antw. 8, 16, 24...cm)

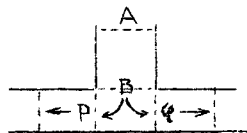
II. De interferentiebuis van Quincke is voor een bepaalde stemvork ingesteld op uitdoving. Men verandert niets meer aan de stand van de schuifbuis en houdt nu andere stemvorken van hogere toon voor de inlaatbuis.

Gevraagd: Hoe verhouden zich de frequenties van de stemvorken waarbij uitdoving plaats heeft. (Antw. 1:3:5...)

III. Dezelfde vraag voor het geval, dat de interferentiebuis op maximale versterking is ingesteld. (Antw. 1:2:3:4.....)

6) Opmerkingen:

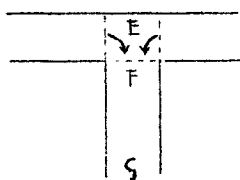
a)



De golffronten die bij A de interferentiebuis van Quincke binnen komen, splitsen zich bij B in twee delen: het ene deel treedt de linker tak, het andere deel de rechter tak binnen. De golven die vanuit P en Q in de respectievelijke takken lopen zijn: gelijkgepolariseerd, hebben dezelfde frequentie,

hebben dezelfde amplitudo en hebben in P en Q op ieder ogenblik onderling gelijke fasen.

De gaslagen P en Q fungeren dus in de interferentiebuis als COHAERENTE TRILLINGSBRONNEN.



In F komen dus golffronten samen afkomstig van cohaerente trillingsbronnen.

Is het wegverschil voor deze golffronten een ONEVEN aantal halve golflengten, dan BLIJFT het gas in E, F en FG in rust.

Algemeen: Opdat de trillingen, afkomstig van twee cohaerente trillingsbronnen, elkaar in een punt van het medium BLIJVEND zullen uitdoven, is nodig en voldoende, dat het wegverschil van de in dit punt samenkomende golven een ONEVEN aantal HALVE GOLFLENGTTEN is.

We zullen hier op terugkomen bij de behandeling van de interferentieverschijnselen van het licht (zie proef van Fresnel).

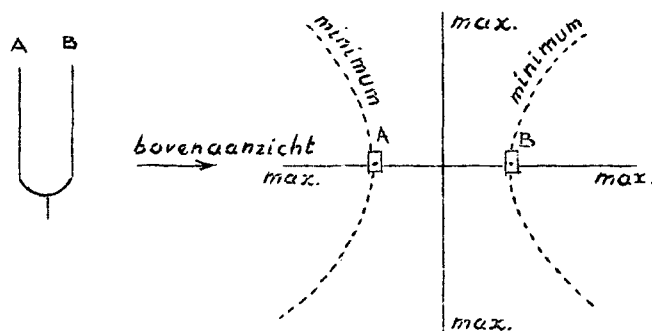
b) Uit het feit, dat bij de proef van Quincke interferentieverschijnselen optreden, volgt zonneklaar, dat we bij het geluid te doen hebben met GOLFBEWEGINGEN.

c) Als de in F samenkomende golffronten tegengestelde fase hebben, blijven de gaslagen in FG in rust. Men zegt dan wel dat "geluid + geluid  $\rightarrow$  stilte"

Strikt genomen is deze zegswijze onwaar en onzinnig, want er lopen dan helemaal geen geluidsgolven in FG (zie blz. 51 ad B)

- d) Als de in F samenkomende golffronten elkaar versterken, loopt er in FG een longitudinale golf van F naar G. Bij G heeft er terugkaatsing aan een vrij uiteinde plaats. Als de lengte van FG dan bovendien gelijk is aan  $n(\frac{1}{2} \lambda)$ , zal de gaslaag FG in staande trilling geraken. (Ga dit na!)

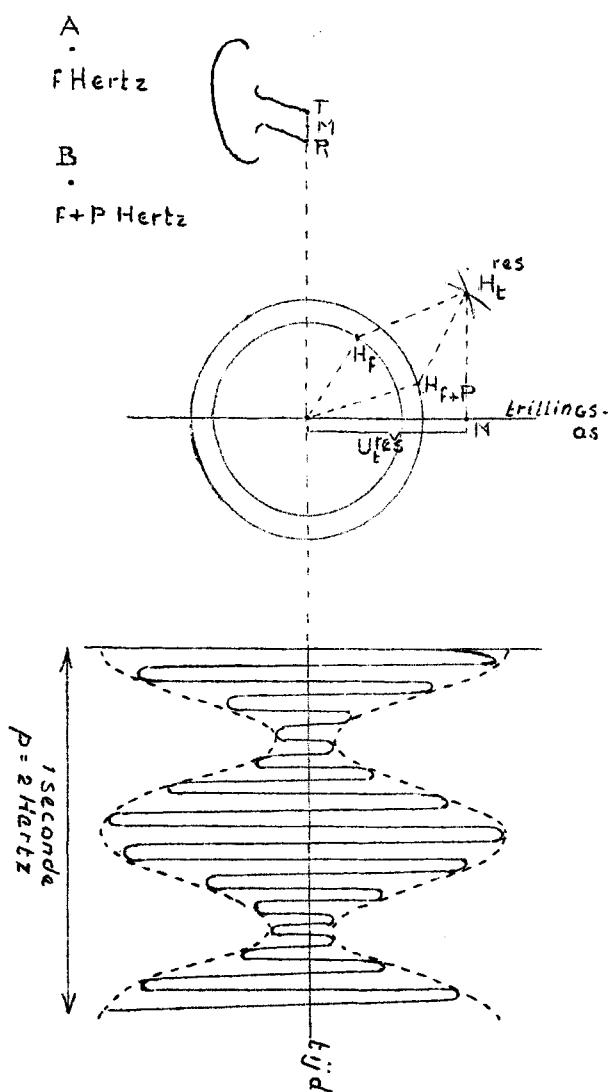
Par. 2) De stilte hyperbolen bij een stemvork.



De uiteinden A en B van de trillende stemvork zijn cohaerente trillingsbronnen  $\rightarrow$  interferentie in de ruimte  $\rightarrow$  stilte-hyperbolen.

Deze stilte-zônes kan men duidelijk waarnemen als men om een aan geslagen stemvork heen loopt of als men een aangeslagen stemvork voor het oor ronddraait.

Par. 3) Zwevingen:



A en B zijn twee trillingsbronnen met een KLEIN verschil in frequentie:  $p$  Hertz.

TR is het trommelvlies v.e. oor. TR trilt dan o.i.v. TWEE harmonische trillingen met verschillende frequenties n.l.  $f$  en  $f+p$  Hertz.

We beschouwen nu de trilling van het middelpunt M van het trommelvlies.

Dit voert een trilling uit langs de in nevenstaande figuur aangegeven horizontale trillingsas.

We construeren de hulpcirkels en de hulppunten van de twee harm. trillingen:

M bevindt zich op ieder oogenblik in de projectie van  $H_t^{res}$  op de trillingsas.

Omdat de hulppunten een frequentie-verschil van  $p$  Hertz hebben, zullen de hulppunten  $p \times$  per sec. in conjunctie en  $p \times$  per sec. in oppositie zijn.

De trillingen zullen elkaar dus  $p \times$  per sec. MAX. versterken en  $p \times$  per sec. MAX. verzwakken.

In nevenstaande figuur stelt de getrokken lijn het U-t-diagram voor van de resulterende uitwijking van M als functie van de tijd.

In dit diagram is verondersteld, dat  $p = 2$  Hertz. In het tijdsinterval van 1 sec. is de resulterende amplitudo van M twee maal gelijk aan  $r_1 + r_2$  en twee maal gelijk aan  $|r_1 - r_2|$

De trillingsENERGIE van het trommelvlies is dus  $p \times$  per sec. groot en  $p \times$  per sec. klein.

DEZE PERIODIEKE WISSELING VAN DE TRILLINGSENERGIE VAN HET TROMMELVLIES geeft de waarnemer een gewaarwording, die los staat van de waargenomen tonen.

Deze periodieke wisseling van de trillingsenergie van het trommelvlies noemt men ZWEVINGEN.

Onder èèn zweving verstaat men dan een versterking + een verzwakking. In het door de grafiek aangegeven geval, neemt het oor dus twee zwevingen per seconde waar.

Conclusie: Het aantal zwevingen per seconde is gelijk aan HET VERSCHIL IN FREQUENTIE van de twee trillingsbronnen.

Vraag: Welke toon hoort het oor?

Antw.: Het oor blijft TWEE tonen horen, maar de INTENSITEIT van deze twee tonen wordt  $p \times$  per sec. versterkt en  $p \times$  per sec. verzwakt.

Vraag: Stel dat we èèn stemvork aanslaan en de gehoorgang  $p \times$  per sec. dicht drukken. Horen we dan ook  $p$  zwevingen per seconde?

Antw: Hier is wel een periodieke variatie van de geluidsintensiteit, maar deze variatie wordt niet door de geluidsgolf ZELF veroorzaakt. Deze waarneming heeft dus niets te maken met ZWEVINGEN.

Vraag: Wat is dus het wezenlijke van het verschijnsel der zwevingen?

Antw.: Het wezenlijke van het verschijnsel der zwevingen bestaat hierin, dat twee lopende golven DOOR INTERFERENTIE de trillingsENERGIE van ieder massapunt van het medium  $p \times$  per seconde vergroten en  $p \times$  per seconde verkleinen.

Examenvraag: Hoe kan men met behulp van een sirene het trillingsgetal van een stemvork bepalen?

Examenvraag: Noem VIER verschillende methoden om het trillingsgetal van een stemvork te bepalen.

Antwoord:

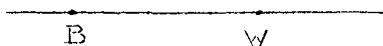
- 1) Proef met beroete plaat.
- 2) Proef, resonantie gaskolom.
- 3) Proef van Quincke.
- 4) Het toerental van een sirene opvoeren tot het aantal zwevingen per seconde tot nul is teruggebracht.

-----



HET DOPPLEREFFECT .

(Christiaan Doppler, 1803 - 1853, wiskundige, prof. te Praag en Wenen.)

1) Het probleem.

B is een trillingsbron die een enkelvoudige toon uitzendt, W een waarnemer.

Doppler beschouwt drie gevallen:

I De bron en de waarnemer hebben een vaste plaats in het medium.

II De bron heeft een vaste plaats; W beweegt EENPARIG en RADIAAL naar de bron toe of van de bron af.

III W heeft een vaste plaats, de bron beweegt EENPARIG en RADIAAL naar de waarnemer toe of van de waarnemer af.

Doppler stelt nu het volgende probleem aan de orde:

||| ZAL DE WAARNEMER IN ELK VAN DEZE GEVALLEN DEZELFDE TOON HOREN ALS DE BRON UITZENDT? Zo niet: WELK VERBAND BESTAAT ER DAN IN ELK VAN DEZE GEVALLEN TUSSEN DE UITGEZONDEN EN DE WAARGENOMEN TOON?

2) Oplossing van het probleem.

Deel I: HET ALGEMENE VERBAND TUSSEN DE UITGEZONDEN EN DE WAARGENOMEN TOON.

a) Welke toon hoort de waarnemer in het algemeen?



golfcaravaan die het oor per sec. treft. (hulpsinuslijn)

$$f_{\text{oor}} = \frac{\text{lengte v.d. golfcaravaan die het oor PER SEC. treft}}{\lambda_{\text{medium}}}$$

b) Hoe groot is de golflengte in het medium in het algemeen?



golfcaravaan die de bron PER SEC. in de richting v.d. waarnemer stuurt.

$$\lambda_{\text{medium}} = \frac{\text{lengte golfcar. die de bron PER SEC in de richting van W stuurt.}}{f_{\text{bron}}}$$

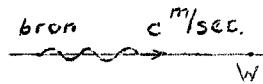
c) Uit a) en b) volgt:

$$f_{\text{oor}} = \frac{\text{de l. v.d. g.carav. die het oor PER SEC treft.}}{\text{de l. v.d. g.carav. die de bron PER SEC i.d.richt. van W stuurt.}} \times f_{\text{BRON}}$$

NB. Deze formule geeft ons dus het algemene verband tussen de frequentie van de uitgezonden trilling ( $f_{\text{BRON}}$ ) en de frequentie van de waargenomen toon ( $f_{\text{oor}}$ )  
Voor de bijzondere gevallen behoeven we dus alleen nog maar de lengten van de PER SEC. door het oor ontvangen - en de PER SEC. door de bron in de richting van de waarnemer gezonden golfcaravanen te bepalen.

Deel II. DE TOEPASSING VAN DEZE ALGEMENE FORMULE OP DE BIJZONDERE GEVALLEN.

Geval I: De bron en de waarnemer hebben een vaste plaats in het medium.



Notatie: De voortplantingssnelheid van de geluidstrilling in het medium wordt aangegeven door de letter C.

Deze voortplantingssnelheid is dus C m/sec.

In dit geval is:

de lengte van de golfcaravaan die het oor PER SEC treft = C meter.

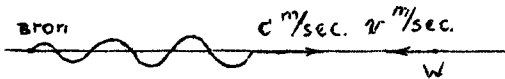
De lengte v.d. golfcaravan die de bron PER SEC. in richting van W stuurt = C meter.

Dus:

$$f_{\text{oor}} = \frac{C}{C} \cdot f_{\text{BRON}} = f_{\text{BRON}}.$$

W hoort dus dezelfde toon als de bron uitzendt.

Geval II a) De bron heeft een vaste plaats in het medium, de waarnemer beweegt eenparig en radiaal met een snelheid v m/sec. NAAR DE BRON TOE.



In dit geval is:

de lengte van de golfcaravaan die het oor PER SEC. treft = C + v meter.

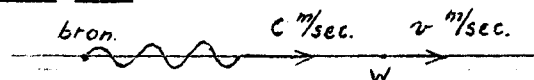
de lengte van de golfcaravaan die de bron PER SEC. in richting W stuurt = C meter,

dus:

$$f_{\text{oor}} = \frac{C + v}{C} \cdot f_{\text{BRON}}$$

In dit geval hoort de waarnemer dus een CONSTANT HOGERE TOON dan de bron uitzendt.

b) De bron heeft een vaste plaats in het medium, de waarnemer beweegt eenparig en radiaal met snelheid v m/sec VAN DE BRON AF.



In dit geval is:

de lengte van de golfcarav. die het oor PER SEC. treft = c - v meter.

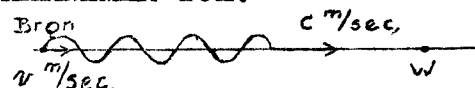
de lengte van de golfcarav. die de bron PER SEC. in de richting van W stuurt = C meter.

Dus:

$$f_{\text{oor}} = \frac{C - v}{C} \cdot f_{\text{bron}}$$

In dit geval hoort de waarnemer dus een CONSTANT LAGERE TOON dan de bron uitzendt.

Geval III a) De waarnemer heeft een vaste plaats in het medium, de bron beweegt eenparig en radiaal met snelheid v m/sec. NAAR DE WAARNEMER TOE.



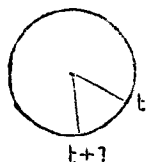
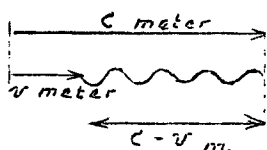
① → De lengte van de golfcaravaan die het oor PER SEC. treft = C meter.

Immers: De elastische koppeling tussen de massadelen van het medium wordt door de beweging van de bron niet veranderd: de voortplantingssnelheid van de geluidstrilling in het medium hangt dus niet af van de beweging van de bron. De geluidstrilling plant zich dus ook nu voort met de snelheid C m/sec, zodat

het oor van de waarnemer PER SEC. getroffen wordt door een golfcaravaan ter lengte van C meter.

- ② → De lengte van de golfcaravaan die de bron PER SEC. in de richting van de waarnemer stuurt. } = C - v meter

Immers:



De trilling die op een willekeurig ogenblik t de bron verlaat, heeft zich op het ogenblik t+1 over een weg van C meter in de richting van de waarnemer voortgeplant. In het tijdsinterval van t → t+1 heeft de bron een weg van v meter in de richting van de waarnemer afgelegd. Het wegverschil tussen de trilling die op het ogenblik t vanuit de bron in de richting van de waarnemer vertrokken is en de trilling die op het ogenblik t+1 uit de bron in de richting van de waarnemer vertrekt, is dus C - v meter.

Daar deze trillingen zich met dezelfde snelheid (C m/sec.) in de richting van de waarnemer voortplanten, blijft dit wegverschil C - v meter.

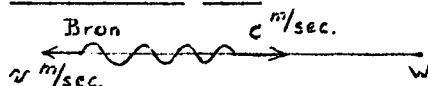
Conclusie: De lengte van de golfcaravaan die de bron in ieder tijdsinterval van 1 sec. in de richting van de waarnemer stuurt is C - v meter.

Substitueren we de gevonden lengten der golfcaravanen ① en ② in de algemene formule, dan vinden we:

$$f_{\text{oor}} = \frac{C}{C - v} \cdot f_{\text{bron}}$$

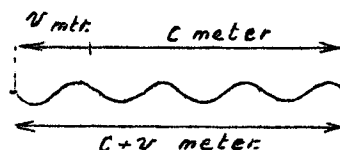
De waarnemer hoort dus een CONSTANT HOGERE toon dan de bron uitzendt.

Geval III b) De waarnemer heeft een vaste plaats in het medium, de bron beweegt cenparig en radiaal met een snelheid v m/sec. VAN DE WAARNEMER AF.



- ① → De lengte van de golfcaravaan die het oor per sec. kreet = C meter.  
 ② → De lengte van de golfcaravaan die de bron PER SEC in de richting van de waarnemer stuurt } = C + v meter

Immers:



Substitueren we de gevonden lengten der golfcaravanen ① en ② in de algemene formule, dan vinden we:

$$f_{\text{oor}} = \frac{C}{C + v} \cdot f_{\text{bron}}$$

De waarnemer hoort dus een CONSTANT LAGERE toon dan de bron uitzendt.

Eindconclusie: blz. 108.

Eindconclusie:

$$f_{\text{oor}} = \frac{\text{lengte v.d. golfcarav. die het oor PER SEC. treft}}{\text{lengte v.d. golfcarav. die de bron PER SEC. in richting W stuurt.}} \cdot f_{\text{bron}}$$

Geval I	Geval II	Geval III
$\frac{\text{vast}}{B} \quad \frac{\text{vast}}{W}$	$\frac{\text{vast}}{B} \quad \frac{v \text{ m/sec.}}{W}$	$\frac{v \text{ m/sec.}}{B} \quad \frac{\text{vast}}{W}$
$f_{\text{oor}} = f_{\text{bron}}$	a) W eenparig naar B <u>toe.</u>  $f_{\text{oor}} = \frac{C+v}{C} \cdot f_{\text{bron}}$	a) B eenparig naar W <u>toe.</u>  $f_{\text{oor}} = \frac{C}{C-v} \cdot f_{\text{bron}}$
	b) W eenparig van B <u>af.</u>  $f_{\text{oor}} = \frac{C-v}{C} \cdot f_{\text{bron}}$	b) B eenparig van W <u>af.</u>  $f_{\text{oor}} = \frac{C}{C+v} \cdot f_{\text{bron}}$

3) Opmerkingen:

- Bij de afleiding van de formules van Doppler is uitdrukkelijk verondersteld dat:
  - de snelheid van de bron of de waarnemer RADIAAL gericht is
  - de bron of de waarnemer EENPARIG beweegt.
- Zolang de bron of de waarnemer EENPARIG beweegt, hoort de waarnemer een CONSTATE TOON: De frequentie van de bron wordt immers met een CONSTANT GETAL vermenigvuldigd.
- Met nadruk wijzen we er op, dat de formules van Geval II andere zijn dan de formules van Geval III: Het maakt dus verschil of de waarnemer of dat de bron beweegt!
- We hebben de formules van Doppler afgeleid voor het geval, dat we te doen hebben met GELUIDSGOLVEN.

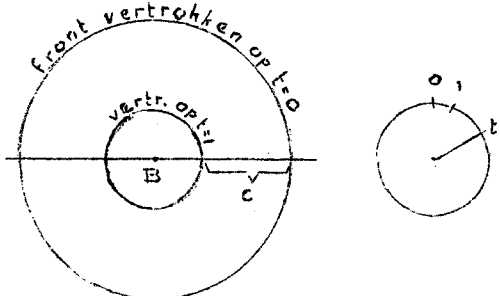
Deze zelfde afleiding is echter ook geldig voor het geval, dat we b.v. te doen hebben met LICHTGOLVEN. Dan is C de snelheid van het licht en v de snelheid van een lichtbron of van een waarnemer.

4) Opgaven:

- Construeer de golffronten op een ogenblik t van de trillingen die de bron op de ogenblikken t = 0 en t = 1 heeft uitgezonden
  - Als de bron een vaste plaats heeft in het medium.
  - Als de bron eenparig beweegt met snelheid v m/sec.

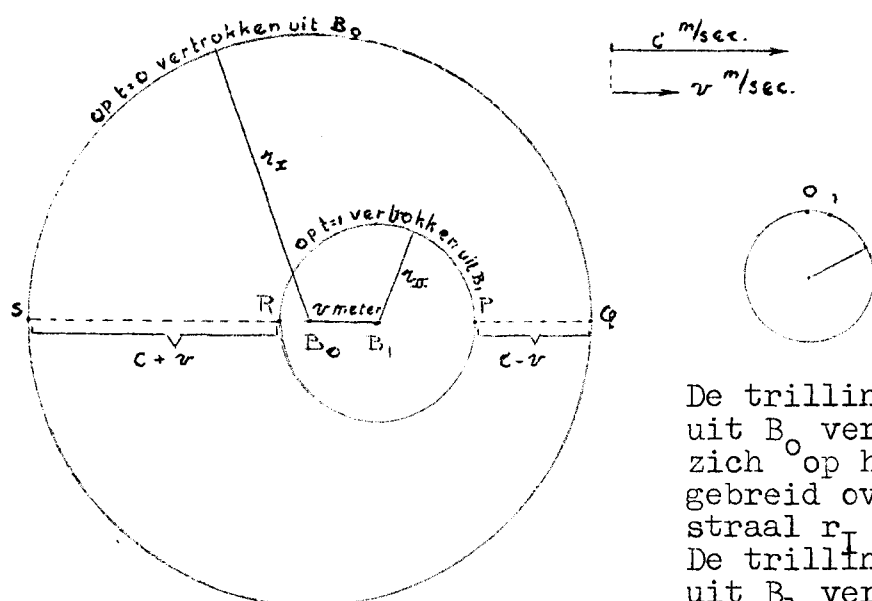
Oplossing:

- De bron heeft een vaste plaats.



De trilling, die op het ogenblik t = 0 uit de bron vertrokken is, heeft zich op het ogenblik t uitgebreid over een bol met straal C.t meter. De trilling, die op het ogenblik t = 1 uit de bron vertrokken is, heeft zich op het ogenblik t uitgebreid over een bol met straal C(t-1) meter. Het verschil van deze stralen is C meter.

b) Als de bron eenparig beweegt met snelheid  $v$  m/sec.



De trilling, die op  $t = 0$  uit  $B_0$  vertrokken is heeft zich op het ogenblik  $t$  uitgebreid over een bol met straal  $r_I = ct$  meter.  
De trilling, die op  $t = 1$  uit  $B_1$  vertrokken is heeft zich op het ogenblik  $t$  uitgebreid over een bol met straal:

$$r_{II} = C(t-1) = Ct - C \text{ meter.}$$

Nemen we  $r_I$  willekeurig groot, dan vinden we  $r_{II}$  door van  $r_I$  het lijnstuk  $C$  af te trekken.

Opmerking:  $\alpha$ )  $PQ = B_0Q - v - r_{II} = Ct - v - C(t-1) = C - v$  meter.

en  $RS = B_0S + v - r_{II} = Ct + v - C(t-1) = C + v$  meter.

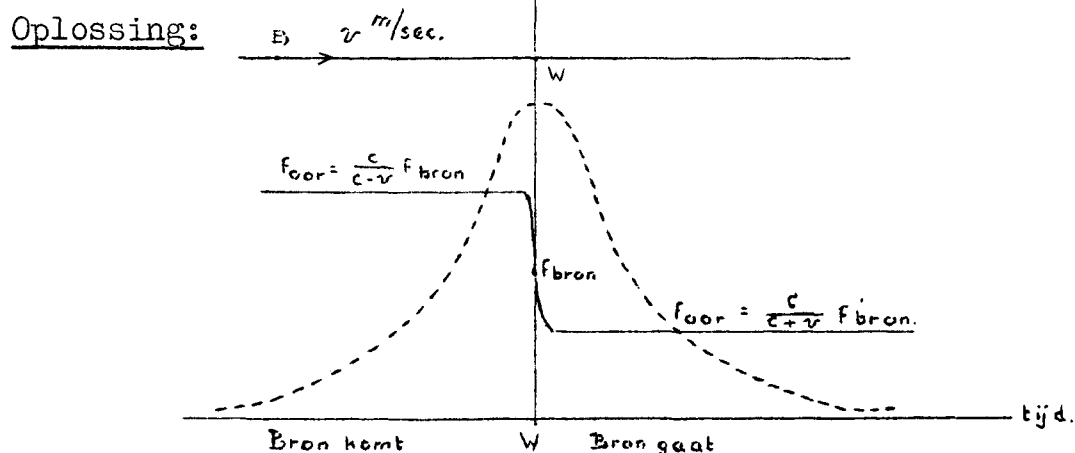
$\beta$ ) Deze excentrische ligging van de golffronten hebben we ook geconstateerd bij de proef met de golfbak.

II Een trillingsbron nadert een waarnemer eenparig en radiaal met snelheid  $v$  m/sec.

Gevraagd: Teken in èèn figuur de grafieken van:

a)  $f_{\text{oor}}$  als functie van de tijd.

b) de intensiteit van het geluid als functie van de tijd.



\_\_\_\_\_ hoogte van de toon.

----- intensiteit.

Opmerking:  $f_{\text{BRON}}$  is niet het gemiddelde van  $\frac{C}{C-v} f_{\text{bron}}$  en  $\frac{C}{C+v} f_{\text{br.}}$

III.

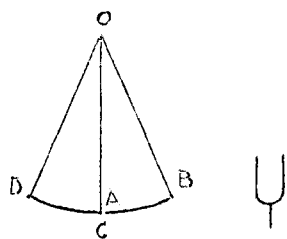
III Twee vliegtuigen A en B vliegen op èèn lijn. B heeft twee motoren, waarvan de ene een frequentie  $f$  Hertz en de andere een frequentie  $f + 3$  Hertz heeft.



- Gevraagd: a) A en B hebben dezelfde snelheid.  
Wat zal men in A waarnemen t.g.v. het frequentie verschil van de motoren van B?
- b) B heeft een grotere snelheid dan A.  
Kan een waarnemer in A constateren dat de snelheid van B groter is dan de snelheid van A?

IV

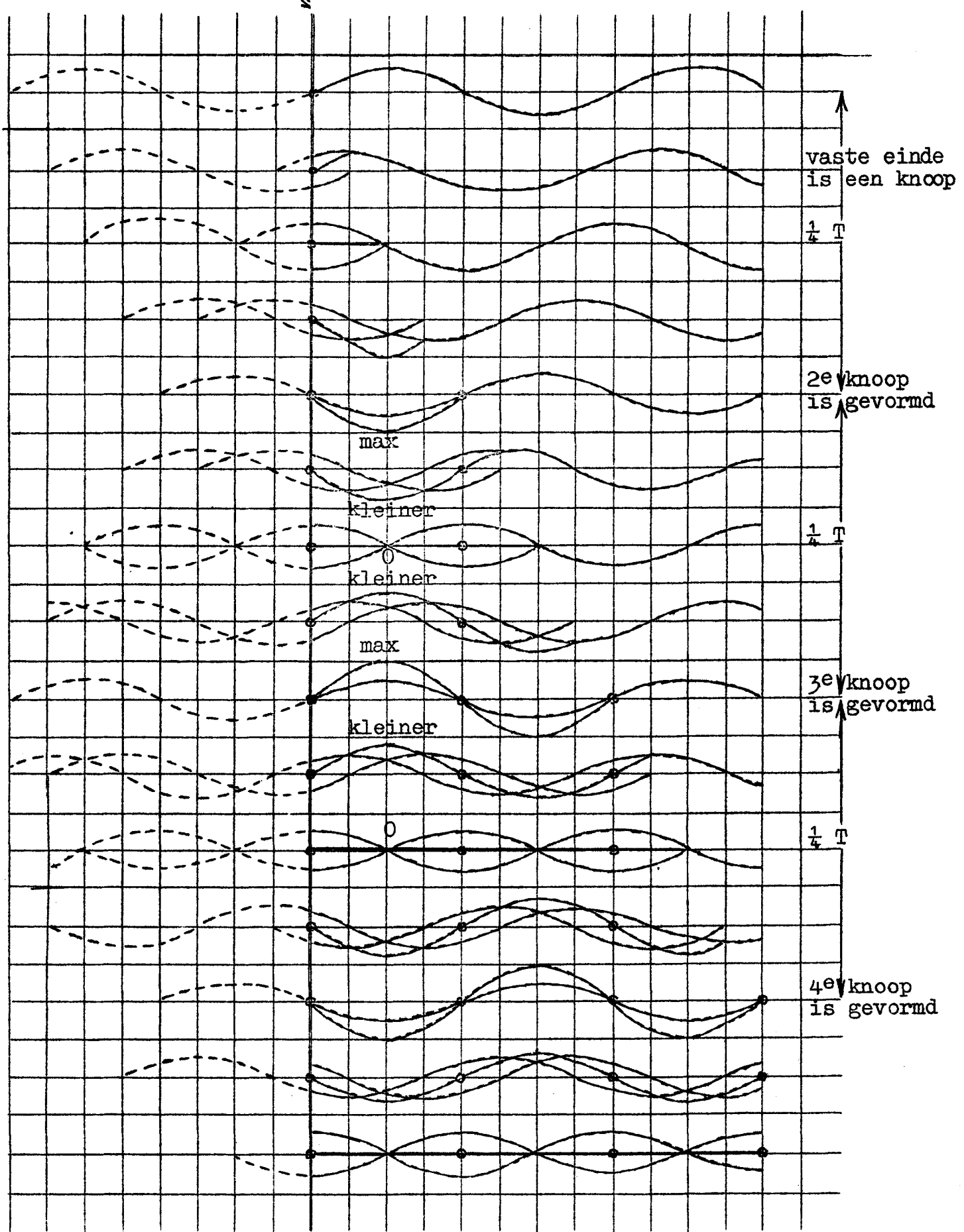
Een waarnemer W neemt plaats op een schommel.



- Gevr: a) Wat valt er te zeggen van de toon die de waarnemer hoort t.g.v. de aangeslagen stemvork.
- b) Op welk moment hoort hij de hoogste toon?
- c) Op welke momenten hoort hij de toon die de stemvork geeft?

-----

MAST einde



Terugkaatsing van golfberg tegen een vast uiteinde.

