KINEMATICA VAN HET MASSAPUNT.

HOOFDSTUK I De RECHTLIJNIGE beweging.

Deel A. De PLAATSFUNCTIE van een MASSAPUNT op een BAAN; DE VERPLAATSING IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL; DE EENPARIGE BEWEGING; DE GEMIDDELDE SNELHEID IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL; DE SNELHEID OP EEN BEPAALD TIJDSTIP.

§ 1) De begrippen MASSAPUNT, BAAN, BAANCOÖRDINAAT en PLAATSFUNCTIE.

Punt 1) MASSAPUNT. Werpt men een voorwerp b.v. een stuk krijt verticaal omhoog dan ziet men dit tot een bepaalde hoogte stijgen en daarna dalen. Tijdens deze beweging ziet men het voorwerp echter ook draaien om zijn zwaartepunt. De totale beweging van het omhoog geworpen voorwerp bestaat dus eigenlijk uit TWEE bewegingen:

1°) de beweging van het zwaartepunt

2°) de draaiing van het voorwerp om zijn zwaartepunt.

Aldus bestaat er bij een beweging van een lichaam vrijwel altijd verschil tussen de beweging van het zwaartepunt en de bewegingen van de diverse onderdelen van het lichaam.
Zolang niet uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld, zullen wij bij de bestudering van de beweging van een lichaam ALTIJD ALLEEN DE BEWEGING VAN HET ZWAARTEPUNT VAN DAT LICHAAM BESCHOUWEN.
Zolang het ons alleen gaat om de beweging van het zwaartepunt van een lichaam, zullen we in de figuur die de beweging in beeld brengt HET GEGEVEN LICHAAM ALTIJD VOORSTELLEN DOOR E E N PUNT, n.l. zijn zwaartepunt, EN DOEN ALSOF DIT WISKUNDIGE PUNT GEWICHT HEEFT, n.l. het gewicht van het gegeven lichaam.
Practisch komt dit hierop neer dat we dan de beweging bestuderen VAN EEN WISKUNDIG-PUNT-MET-GEWICHT.
Welnu, zo'n WISKUNDIG-PUNT-MET-GEWICHT noemt men kortweg een MASSAPUNT (ook wel PUNTMASSA of stoffelijk punt)

> Definitie:
> EEN MASSAPUNT IS EEN WISKUNDIG-PUNT-MET-GEWICHT.

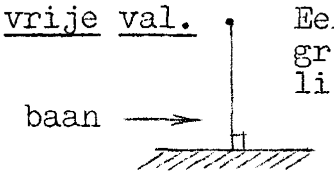
De bewegingsleer die alleen handelt over de beweging van een massapunt noemt men DE KINEMATICA VAN HET MASSAPUNT.

Punt 2) De BAAN van een massapunt.

> Definitie: Onder de baan van een massapunt verstaat men de rechte of kromme lijn die door het massa - punt beschreven wordt.

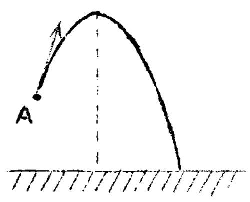
Voorbeelden.

a) De vrije val.



Een massapunt wordt op enige hoogte boven de grond losgelaten. De baan is dan een rechte lijn ⊥ aardoppervlak.

b) De kogelbaan.



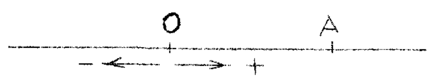
Een massapunt wordt vanuit een punt A schuin opgeworpen. De baan is een gebogen lijn. We zullen later bewijzen dat deze baan een parabool is die in het punt A raakt aan de richting waarin het massapunt wordt opgeworpen.

c) De cirkelbaan.

Een massapunt op het aardoppervlak beschrijft in 24 uur de omtrek van een cirkel die gelegen is in het vlak door het massapunt loodrecht op de aardas.

N.B. In het onderhavige deel A van hoofdstuk I beschouwen we alleen RECHTLIJNIGE bewegingen, dus bewegingen waarvan de baan RECHT is.

Punt 3) De plaatsbepaling op een baan.



A is een punt van een rechte baan. Om de plaats van A op de baan wiskundig te kunnen aanduiden leggen we op de baan een COÖRDINATENSTELSEL vast. Hierbij gaan we als volgt te werk:

1°) We KIEZEN een punt O op deze baan. Dit punt O noemen we de OORSPRONG. De keuze van dit punt O is willekeurig, maar als O eenmaal gekozen is staat de keuze vast.
Ieder punt van de baan heeft nu een bepaalde AFSTAND tot O.

Vraag: Is de afstand van een punt tot O exact aangeduid als we zeggen dat deze b.v. 4 is?

Antw.: NEE, want we weten dan niet IN WELKE LENGTEEENHEID deze afstand is uitgedrukt: 4 cm., 4 m., 4 km?

CONCLUSIE: BIJ HET OPGEVEN VAN DE AFSTAND VAN EEN PUNT VAN DE BAAN TOT HET PUNT O MOET ALTIJD DE LENGTE-EENHEID VERMELD WORDEN WAARIN DEZE AFSTAND IS UITGEDRUKT.

2°) Aan de AFSTAND van een punt van de baan tot O KENNEN WE EEN + OF - TEKEN TOE:

Aan de afstanden v.d. punten RECHTS van O een + teken,
" " " " " LINKS " O " - " .

In principe is deze teken-keuze geheel willekeurig, maar nu de keuze eenmaal gemaakt is zitten we er aan vast!

Nadat het coördinatenstelsel (met vermelding van de gebruikte lengteeenheid) op de baan is vastgelegd, correspondeert met ieder punt van de baan E E N en SLECHTS E E N ALGEBRAÏSCH GETAL, en bepaalt ieder algebraïsch getal E E N en SLECHTS E E N punt op de baan.
DE ABSOLUTE WAARDE van dit algebraïsch getal geeft het aantal (achter dit getal vermelde) lengte-eenheden aan dat dit punt van O verwijderd ligt.
HET TEKEN van dit algebraïsch getal geeft aan of het punt rechts of links van O ligt.

Welnu: DIT ALGEBRAISCH GETAL (waarachter de gebruikte lengte-eenheid dient vermeld te worden) noemt men de BAANCOÖRDINAAT van het beschouwde punt.

Opgave 1.

In nevenstaande figuur heeft het punt A de baancoördinaat + 1 meter.

Gevraagd: Wijs op deze baan de volgende punten aan:

B(-5m); C(+3m); D(+6m); E(-6m); F(+50 cm.).

Punt 4) De baancoördinaat van een massapunt op een bepaald ogenblik.

Beweegt een massapunt langs een baan, dan kunnen we deze beweging wiskundig beschrijven DOOR DE BAANCOÖRDINATEN OP TE NOEMEN VAN DE PUNTEN WAARIN HET MASSAPUNT ZICH OP DE ACHTEREENVOLGENDE OGENBLIKKEN BEVINDT.
De baancoördinaat van het punt van de baan waarin het massapunt zich op het tijdstip t bevindt, noemt men kortweg DE BAANCOÖRDINAAT VAN HET MASSAPUNT OP HET OGENBLIK t.

> Definitie: Onder DE BAANCOÖRDINAAT VAN EEN MASSAPUNT OP HET OGENBLIK t verstaat men de baancoördinaat van het punt van de baan waarin het massapunt zich op het ogenblik t bevindt.

Notatie. De baancoordinaat van een massapunt op het ogenblik t wordt aangeduid door het symbool s_t.
De letter s is de eerste letter van het woord SPATIUM. De baancoördinaat geeft immers DE AFSTAND AAN WAAROP HET MASSAPUNT OP HET OGENBLIK t IN POSITIEVE OF NEGATIEVE RICHTING VAN DE OORSPRONG VERWIJDERD IS.
De index t in het symbool s_t geeft het beschouwde ogenblik aan.
Wij zullen t altijd uitdrukken in SECONDEN:
t = 0 is het ogenblik dat de waarneming begint.
S_0 is dus de baancoördinaat op het tijdstip t = 0;
s_5 is de baancoördinaat op het tijdstip t = 5 sec.

Opgave 2.

0 +1m

Een massapunt beweegt zo langs een rechte baan dat: $s_0 = +5$ m; $s_1 = +6$m; $s_2 = 5$m; $s_3 = +2$m; $s_4 = -3$ m.

Gevraagd: Geef op de baan aan waar het massapunt zich op de achtereenvolgende ogenblikken bevindt.

Punt 5) Het begrip PLAATSFUNCTIE (of BEWEGINGSVERGELIJKING)

In de mechanica beschouwt men alleen bewegingen die EEN LOUTER MECHANISCHE OORZAAK hebben. Zoals ons later zal blijken kunnen deze bewegingen altijd door formules beschreven worden. Zo'n formule bepaalt dan het teken en de grootte van de baancoördinaat van het massapunt op een onbenoemd ogenblik. Exacter gezegd: zo'n formule bepaalt de baancoördinaat van het massapunt als functie van de tijd:

$$\boxed{s_t = f(t) \text{ meter}}$$

Zo'n formule noemt men EEN PLAATSFUNCTIE of ook wel EEN BEWEGINGSVERGELIJKING.

Voorbeelden.

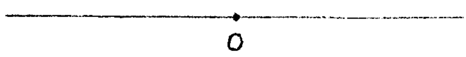
a) $s_t = 2t - 4$ meter.

0

tijdstip	s_t	baanpunt
t = 0		
t = 1		
t = 2		

Opmerking. Het startpunt behoeft dus niet samen te vallen met 0.

b) $s_t = -t^2 + 4t$ meter.



t	s_t	baanpunt.
0		
1		
2		
3		
4		

Opmerking. Op t = 2 keert het massapunt om.
Op t = 4 is het massapunt weer in 0 terug.

Opgave 3. $s_t = 6 \sin(30t)^{\circ}$ meter.
Bepaal de plaats van het massapunt op de ogenblikken:
t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 sec.

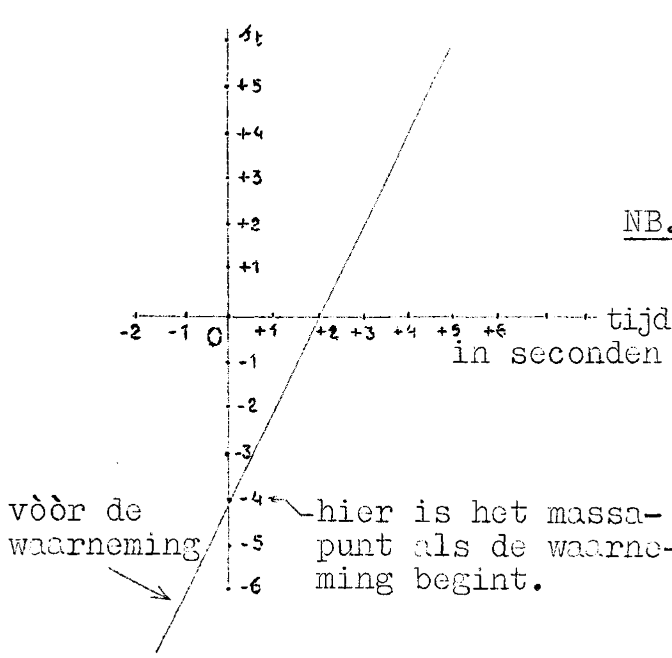
Opmerking. We zullen laten zien hoe men de plaatsfunctie voor een bepaalde beweging opstelt. In dit hoofdstuk gaan we na wat men bij een rechtlijnige beweging uit een gegeven plaatsfunctie kan afleiden.

§ 2. Het S - t diagram.

Onder het S - t diagram van een beweging verstaat men DE GRAFIEK die in beeld brengt HOE DE BAANCOÖRDINAAT VERANDERT ALS FUNCTIE VAN DE TIJD.

Voorbeelden.

a) $s_t = 2t - 4$ meter.



In nevenstaande grafiek stelt de verticale as de baan van het massapunt voor, de horizontale as is de tijdsas.
Op t = 0 (dus als de waarneming begint) is de baancoördinaat -4 meter.
Op t = 2 passeert het massapunt de oorsprong.

NB. Uit de grafiek valt af te lezen dat het massapunt bij deze beweging IN IEDERE SECONDE EEN EVEN GROOT STUK VAN DE BAAN AFLEGT.
Zo'n beweging noemt men een EENPARIGE beweging.

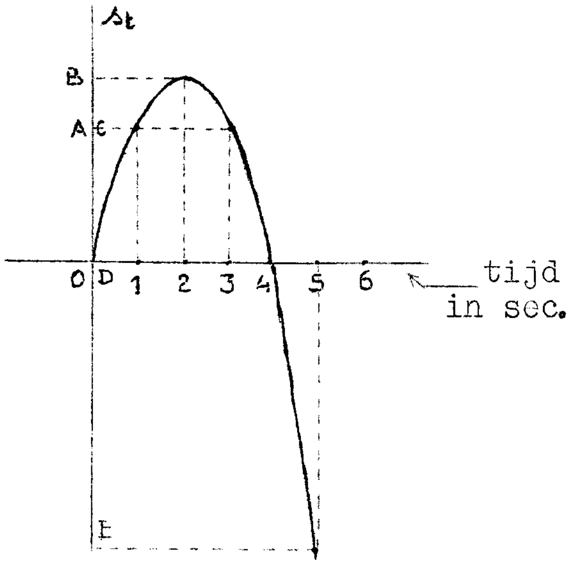
Vraag. Op t = 0 begint de waarneming. Begint het massapunt ook op t = 0 met zijn beweging?

Antw.: Volgens de vergelijking $s_t = 2t - 4$ meter is het massapunt van eeuwigheid aan het bewegen. Op het ogenblik dat de waarneming begint passeert het massapunt het punt -4 meter op de baan.
EEN PLAATSFUNCTIE ZEGT NOOIT WANNEER HET MASSAPUNT BEGINT TE BEWEGEN; WEL WAAR HET MASSAPUNT IS ALS DE WAARNEMING BEGINT.

b)

zie blz. 5.

b) $S_t = - t^2 + 4t$ meter.



t	s_t	Baanpunt.
0	$S_0 = 0$	0
1	$S_1 = +3$	A
2	$S_2 = +4$	B
3	$S_3 = +3$	C = A
4	$S_4 = 0$	D = 0
5	$S_5 = -5$	E

Deze grafiek brengt ons in beeld hoe het massapunt langs de rechte baan beweegt. Wij moeten deze grafiek echter nog leren LEZEN.

Uit de grafiek blijkt:

1°) Op het ogenblik dat de waarneming begint passeert het massapunt de oorsprong.

2°) Op t = 2 keert het massapunt om.

3°) Bij het naderen van het omkeerpunt neemt de snelheid van het massapunt AF.

4°) In het omkeerpunt is de snelheid NUL.

5°) Daarna neemt de snelheid in de andere richting weer toe.

6°) Op t = 4 passeert het massapunt weer de oorsprong.

Opgave 4. Schets het S - t diagram van de beweging waarvan $s_t = 6 \sin (30t)^\circ$ meter. (Sinuslijn !)

§ 3. Het begrip TIJDSINTERVAL.

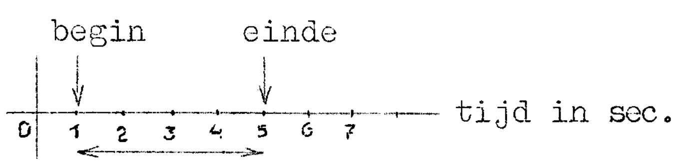
Punt 1)

> Definitie. Onder een tijdsinterval verstaat men de tijdsduur die verstrijkt tussen twee tijdstippen.

Vraag. Wat verstaat men onder het tijdsinterval van t = 1 tot t = 5 sec?

Antwoord.

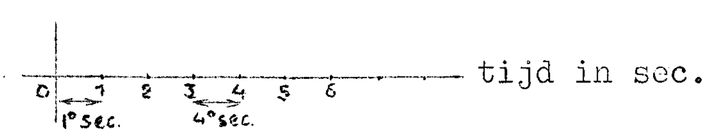
Dit is de tijdsduur die verstrijkt tussen de tijdstippen: t = 1 sec. en t = 5 sec.



Vraag. Wat verstaat men onder het tijdsinterval van de EERSTE sec?

Antwoord.

De waarneming BEGINT op t = 0
De EERSTE seconde van onze waarneming is verstreken op t = 1 sec.



Conclusie: Onder het tijdsinterval van de EERSTE seconde verstaat men de tijdsduur die verstrijkt tussen de tijdstippen: t = 0 en t = 1 sec.

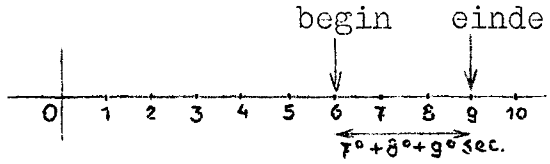
Vraag. Wat verstaat men onder het tijdsinterval van de 4^o seconde?

Antw.: Dit is de tijdsduur die verstrijkt tussen de tijdstippen:
$t = 3$ en $t = 4$ sec.

Met nadruk wijzen we er op dat het tijdsinterval van de 4^o seconde
BEGINT op $t = 3$, en
EINDIGT op $t = 4$ sec.

Vraag. Wat verstaat men onder het tijdsinterval dat gevormd wordt door de $7^o + 8^o + 9^o$ seconde van onze waarneming?

Antw.:



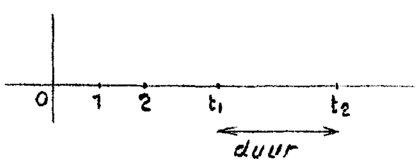
De 7^o sec. BEGINT op $t = 6$ sec.
De 9^o sec. EINDIGT op $t = 9$ sec.

Het tijdsinterval van de $7^o + 8^o + 9^o$ seconde is dus de tijdsduur die verstrijkt tussen de ogenblikken $t = 6$ en $t = 9$ sec.

Punt 2) Van een tijdsinterval moet men twee dingen goed onderscheiden:

1^o) de DUUR van het tijdsinterval

2^o) de PLAATS OP DE TIJD-AS.



Het in nevenstaande figuur aangegeven tijdsinterval begint op $t = t_1$ en eindigt op $t = t_2$

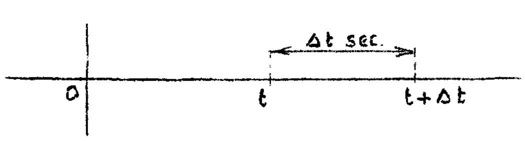
De DUUR van dit tijdsinterval is $(t_2 - t_1)$ sec.

N.B. Met nadruk wijzen we er op, dat de natatie t_1 NIET het tijdstip $t = 1$ aanduidt, en t_2 NIET het tijdstip $t = 2$ sec. De indices 1 en 2 bij t_1 en t_2 slaan op de nummering van de tijdstippen.

Notatie. De DUUR van een tijdsinterval wordt aangegeven door het symbool Δt sec.

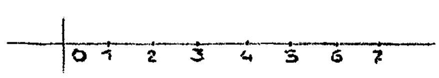
Voor het in bovenstaande figuur bedoelde tijdsinterval is dus $\Delta t = t_2 - t_1$ sec.

Punt 3) In de theorie zullen we vaak te maken hebben met een tijdsinterval dat BEGINT op een ONBENOEMD OGENBLIK t en waarvan de DUUR gelijk is aan een ONBENOEMD AANTAL SECONDEN Δt.



Dit tijdsinterval BEGINT dus op het ogenblik t sec, en
EINDIGT op het ogenblik $t + \Delta t$ sec.
We zeggen dan kortweg "het tijdsinterval van t tot $t + \Delta t$ sec".

Opgave 5.



Wijs op nevenstaande tijd-as de volgende tijdsintervallen aan:

a) het tijdsinterval van $t = 2$ tot $t = 6$ sec.

b) het tijdsinterval van de derde seconde.

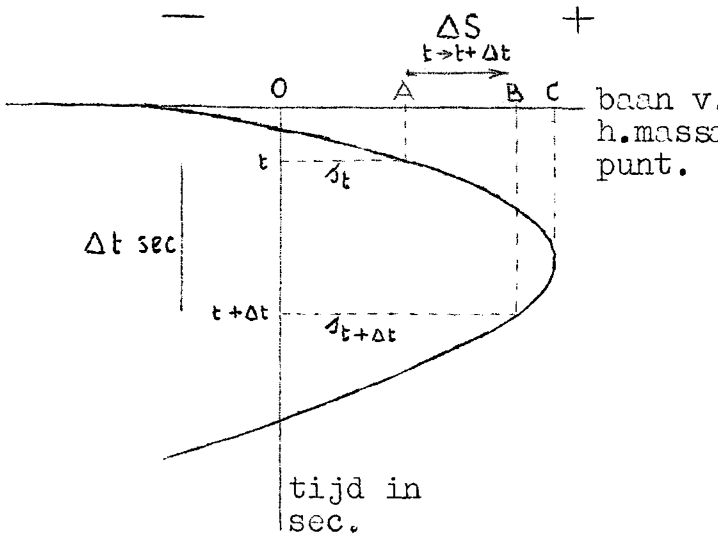
c) het tijdsinterval van de $3^o + 4^o + 5^o + 6^o$ seconde.

d) het tijdsinterval dat begint op $t = 2$ sec. en dat 4 sec. duurt.

Opmerking. Opgave 5 illustreert dat eenzelfde tijdsinterval op verschillende manieren kan aangeduid worden. Let er bij de sommen goed op HOE het tijdsinterval is aangeduid. De ervaring leert, dat de meeste fouten gemaakt worden doordat men zich niet realiseert dat b.v. de 7° seconde BEGINT op het TIJDSTIP t = 6 sec.

§ 4) DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL.

punt 1)



In nevenstaande figuur stelt de horizontale as de rechte baan voor waarlangs een massa punt beweegt. De verticale as stelt de tijd-as voor (naar beneden positief) De grafiek stelt het S - T diagram voor van het langs de baan bewegende massapunt. We beschouwen de beweging van het massapunt in het tijdsinterval van t tot t + Δ t sec.

Op het tijdstip t sec. is de baancoördinaat s_t en bevindt het massapunt zich in A; op het tijdstip t + Δ t sec. is de baancoördinaat $s_{t+\Delta t}$ en bevindt het massapunt zich in B.

WE VRAGEN NU NAAR HET

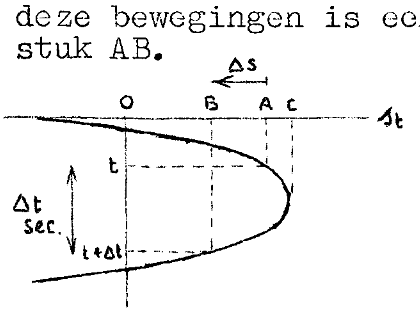
ALGEBRAISCH VERSCHIL

$$S_{t+\Delta t} - S_t \quad \text{meter}$$

$S_{t+\Delta t}$	S_t
baancoördin. aan het EINDE van het tijdsinterv.	baancoördin. aan het BEGIN van het tijdsinterv.

Dit verschil geeft ons de GROOTTE en HET TEKEN van de RESULTERENDE VERPLAATSING die het massapunt in het tijdsinterval t → t + Δ t LANGS DE (RECHTE) BAAN heeft ondergaan.

De nadruk ligt hier op RESULTERENDE VERPLAATSING LANGS DE BAAN:
In het tijdsinterval van t → t + Δ t legt het massapunt (zie bovenstaande figuur) het baanstuk AC in POSITIEVE- en het baanstuk CB in NEGATIEVE RICHTING af. Het EINDRESULTAAT van deze bewegingen is een POSITIEVE VERPLAATSING over het baanstuk AB.



Is, zoals in nevenstaande figuur, CB groter dan AC, dan is het eindresultaat een NEGATIEVE verplaatsing over het baanstuk AB.

Conclusie. Het algebraïsche verschil $s_{t+\Delta t} - s_t$ geeft ons de grootte en het teken van DE RESULTERENDE VERPLAATSING die het massapunt in het tijdsinterval $t \to t + \Delta t$ LANGS DE (rechte) BAAN heeft ondergaan.

Deze RESULTERENDE VERPLAATSING LANGS DE BAAN noemt men kortweg DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN IN HET BESCHOUWDE TIJDSINTERVAL.

> Definitie. Onder DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN VAN EEN MASSAPUNT IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL verstaat men
>
> de ALGEBRAÏSCHE waarde van
>
> DE BAANCOÖRDINAAT AAN HET E I N D E VAN HET TIJDSINTERVAL
>
> VERMINDERD MET
>
> DE BAANCOÖRDINAAT AAN HET B E G I N VAN HET TIJDSINTERVAL.

Notatie. De verplaatsing langs de baan in het tijdsinterval $t \to t + \Delta t$ wordt aangegeven door het symbool:

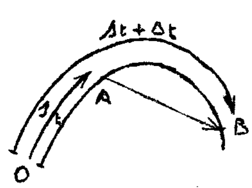
$$\Delta S_{t \to t+\Delta t}$$

Dus:

$$\boxed{\Delta S_{t \to t+\Delta t} = \underset{\text{EINDE}}{S_{t+\Delta t}} - \underset{\text{BEGIN}}{S_t} \text{ meter}}$$

Opmerkingen. a) Indien er geen vergissing mogelijk is schrijft men voor $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ kortweg ΔS.

b) Met nadruk wijzen we er op, dat in de definitie van $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ gesproken wordt over de verplaatsing LANGS DE BAAN.

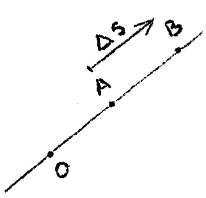


Deze toevoeging wordt van belang als we het later zullen hebben over een beweging langs een KROMLIJNIGE baan.
Is (zie nevenstaande fig.) het massapunt op het tijdstip t in A en op het tijdstip $t + \Delta t$ in B, dan is DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN in het tijdsinterval $t \to \Delta t$ gelijk aan

$$s_{t+\Delta t} - s_t = + \text{boog AB meter.}$$

DE VERPLAATSING IN HET PLATTE VLAK is dan echter gelijk aan de BAANKOORDE AB (beter: de VECTOR AB) We gaan daar nu niet verder op in.

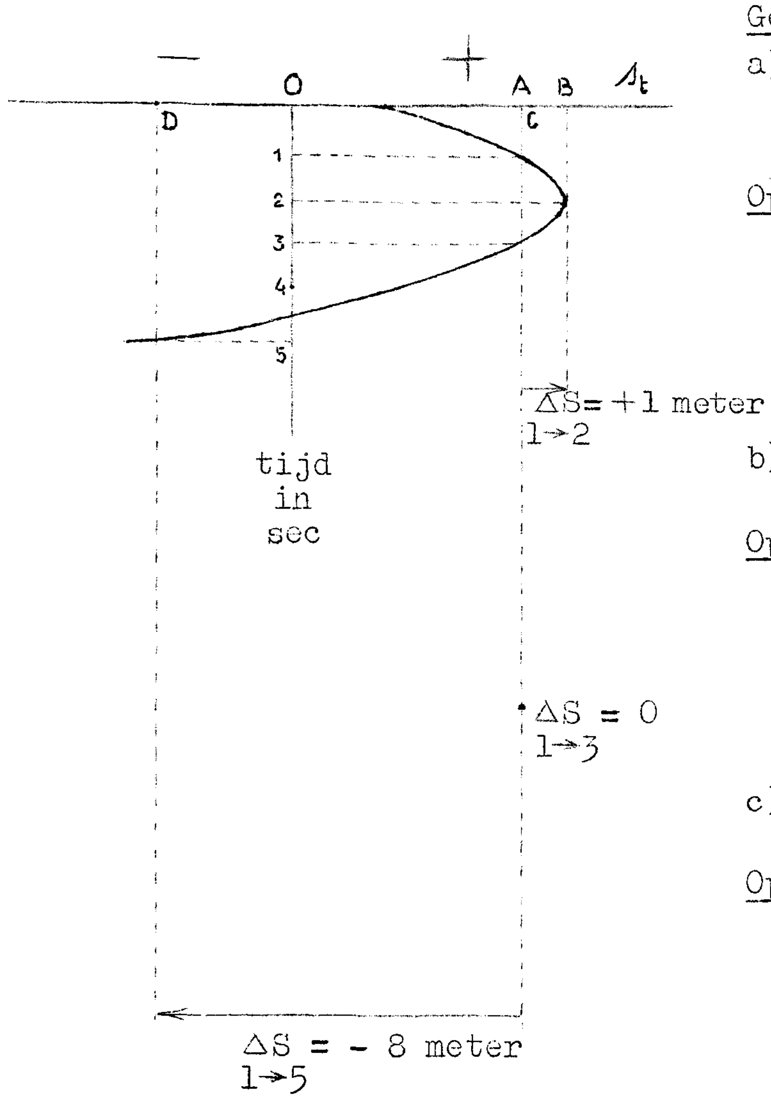
c) Bij een RECHTLIJNIGE beweging is DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN in een gegeven tijdsinterval IDENTIEK met DE VERPLAATSING IN HET PLATTE VLAK in dat tijdsinterval.



Bij een RECHTLIJNIGE beweging is er dus geen vergissing mogelijk als $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ wordt aangeduid met DE VERPLAATSING IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t + \Delta t$.

d) Sommige auteurs noemen $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ de (resulterende) WEG in het beschouwde tijdsinterval.

Punt 2) Getallen-voorbeeld.



Gegeven: $s_t = -t^2 + 4t + 2$ meter.

Gevraagd:

a) De verplaatsing in het tijdsinterval van de 2° seconde, dus $\Delta S_{1\to 2}$

Oplossing.

$$s_2 = -4 + 8 + 2 = +6 \text{ meter.}$$
$$s_1 = -1 + 4 + 2 = +5 \text{ meter.}$$
$$\Delta S_{1\to 2} = \qquad = +1 \text{ meter}$$

b) De verplaatsing in het tijdsinterval van $t = 1 \to t = 3$.

Oplossing.

$$s_3 = -9 + 12 + 2 = +5 \text{ meter}$$
$$s_1 = -1 + 4 + 2 = +5 \text{ meter}$$
$$\Delta S_{1\to 3} = \qquad = 0 \text{ meter}$$

c) De verplaatsing in het tijdsinterval van $t = 1 \to t = 5$

Oplossing.

$$s_5 = -25 + 20 + 2 = -3 \text{ m.}$$
$$s_1 = -1 + 4 + 2 = +5 \text{ m.}$$
$$\Delta S_{1\to 5} = \qquad = -8 \text{ m.}$$

Opmerking In dit getallen-voorbeeld zien we geïllustreerd dat de verplaatsing langs de baan in een tijdsinterval kan zijn:

a) POSITIEF: Het station aan het einde van het tijdsinterval ligt dan RECHTS van het station aan het begin van dit tijdsinterval.

b) NUL: Aan het einde van het tijdsinterval bevindt het massapunt zich dan in hetzelfde baanpunt als aan het begin van dit tijdsinterval.

c) NEGATIEF: Het station aan het einde van het tijdsinterval ligt dan LINKS van het station aan het begin van dit tijdsinterval.

Vraag: Van een massapunt weet men alleen dat $\Delta S_{1\to 3} = 0$. Wat volgt hieruit over de beweging v.h. massap?

Antw.: Er zijn dan twee mogelijkheden:

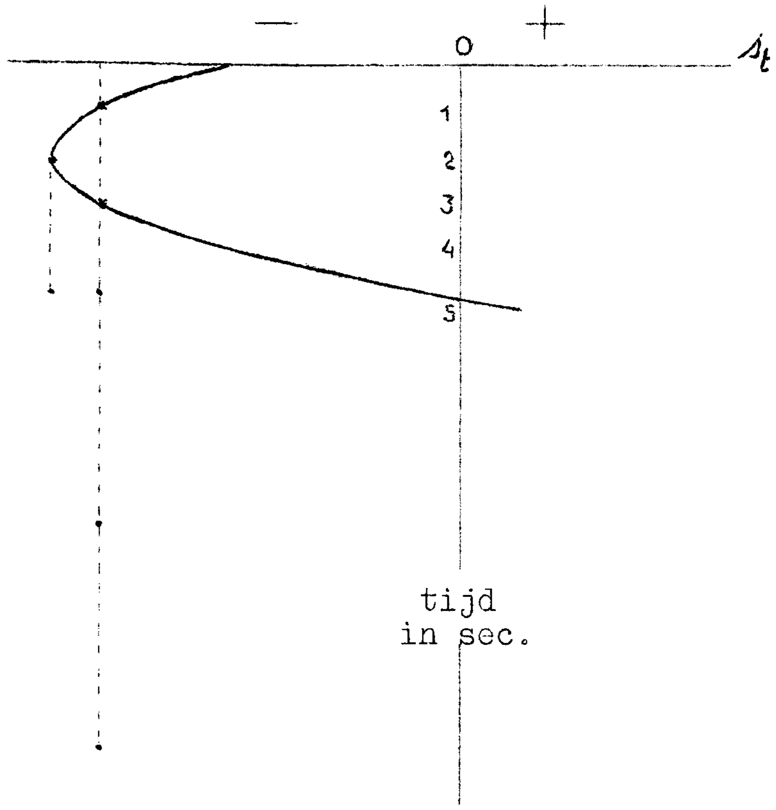
1°) Het massapunt beweegt zò, dat $s_3 = s_1$

2°) Het massapunt is in rust.

Punt 3) Opgave 6.

zie blz. 10.

Punt 3) Opgave 6.



Gegeven:

$s_t = t^2 - 4t - 5$ meter.

Gevraagd:

a) $\Delta S_{1 \to 2}$

b) $\Delta S_{1 \to 3}$

c) $\Delta S_{1 \to 5}$

Vraag: Lees uit de figuur af voor welke positieve waarden van Δt $\Delta S_{\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} + \Delta t}$ negatief is, en voor welke waarden positief.

Punt 4) Opgave 7. Gegeven: $s_t = -t^2 + 3t - 5$ meter.

Gevraagd: De verplaatsing in het tijdsinterval van $2 \to 2 + \Delta t$ sec.
De duur van dit tijdsinterval is dus onbenoemd.

Oplossing:

$$s_{2+\Delta t} = -(2+\Delta t)^2 + 3(2+\Delta t) - 5 = -4 - 4\Delta t - (\Delta t)^2 + 6 + 3\Delta t - 5 \text{ meter}$$
$$s_2 = \qquad = -4 + 6 - 5 \text{ meter}$$
$$\Delta S_{2 \to 2+\Delta t} = \qquad = -4\Delta t - (\Delta t)^2 + 3\Delta t \text{ meter}$$

Dus: $\Delta S_{2 \to 2+\Delta t} = -\Delta t - (\Delta t)^2$ meter.

Opgave 8. Gegeven: $s_t = -t^2 + 3t - 5$ meter.

Gevraagd: De verplaatsing in het onbenoemde tijdsinterval van $t \to t + \Delta t$ sec.

Oplossing:

$$s_{t+\Delta t} = -(t+\Delta t)^2 + 3(t+\Delta t) - 5 = -t^2 - 2t\Delta t - (\Delta t)^2 + 3t + 3\Delta t - 5 \text{ meter}$$
$$s_t = \qquad = -t^2 + 3t - 5 \text{ meter}$$
$$\Delta S_{t \to t+\Delta t} = \qquad = -2t\Delta t - (\Delta t)^2 + 3\Delta t \text{ meter}$$

Dus: $\Delta S_{t \to t+\Delta t} = -2t\Delta t + 3\Delta t - (\Delta t)^2$ meter.

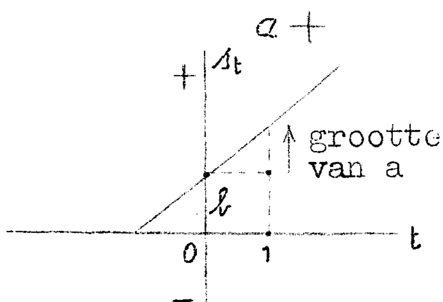
Opmerking: Door in deze uitkomst het tijdsinterval $2 \to 2 + \Delta t$ te substitueren, vinden we de uitkomst van opgave 7 terug.

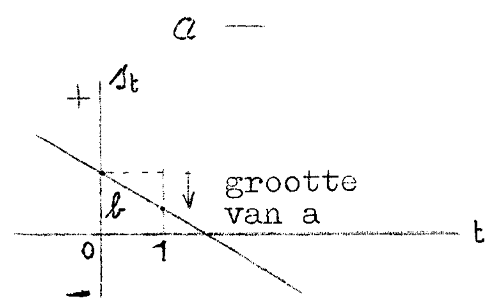
§ 5. Bewegingen met plaatsfunctie van de EERSTE GRAAD: de EENPARIGE BEWEGING.

Punt 1) In deze paragraaf beschouwen we de bijzondere bewegingen waarvan de plaatsfunctie een veelterm van de EERSTE GRAAD is, en dus in de algemene gedaante wordt voorgesteld door de functie:

$$\boxed{s_t = at + b \text{ meter, waarbij } a \neq 0}$$

Het S - t diagram van zo'n beweging is EEN RECHTE LIJN die niet evenwijdig loopt aan de t- of S - as.
De richtingscoëfficient van deze lijn is a.





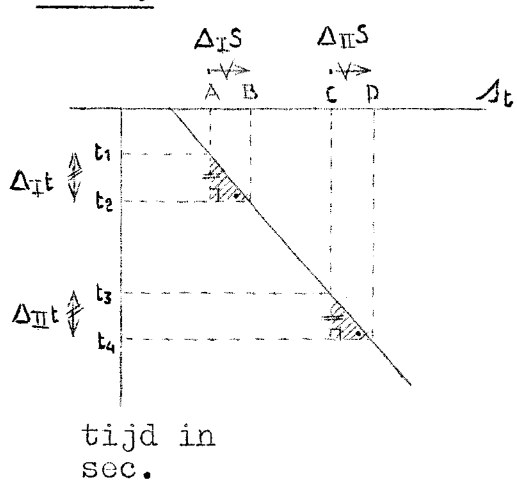
Punt 2) Stelling. Is de plaatsfunctie een veelterm van de eerste graad dan beweegt het massapunt steeds in eezelfde richting:
Is a +, dan beweegt het massapunt steeds in pos.richting;
Is a −, dan beweegt het massapunt steeds in neg.richting.

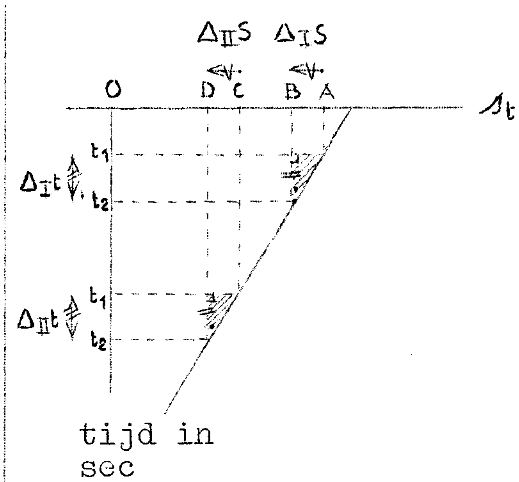
Bewijs: Zie bovenstaande figuren.

Opmerking: De verplaatsing in een tijdsinterval heeft voor ieder tijdsinterval HET ZELFDE TEKEN ALS a.

Punt 3) Stelling. Als de plaatsfunctie een veelterm van de eerste graad is, ondergaat het massapunt in ONDERLING GELIJKE TIJDSDELEN verplaatsingen die ONDERLING GELIJK ZIJN VAN GROOTTE EN TEKEN.

Bewijs:





Als $\Delta_I t = \Delta_{II} t$ zijn de gearceerde driehoeken congruent.
$\Delta_I S$ en $\Delta_{II} S$ hebben nu behalve hetzelfde teken OOK DEZELFDE GROOTTE.

idem

Conclusie: Als de plaatsfunctie een veelterm van de EERSTE GRAAD is, beweegt het massapunt voortdurend in dezelfde richting EN LEGT DAARBIJ IN GELIJKE TIJDSDELEN GELIJKE BAANSTUKKEN AF.

Punt 4)

Stelling. Bij een beweging met plaatsfunctie $s_t = at+b$ meter, is

DE VERPLAATSING PER SECONDE

in grootte en teken gelijk aan a meter.

Bewijs: We bepalen de verplaatsing in het tijdsinterval van $t \to t+1$ sec.
Het beginpunt van dit tijdsinterval is dus onbenoemd; de duur van het tijdsinterval is èèn seconde.

$$
\begin{array}{lllll}
s_{t+1} & = a(t+1)+b & = at+a+b & \text{meter} \\
s_t & = & = at \quad +b & \text{meter} \\
\hline
\Delta S_{t\to t+1} & = & = \quad a & \text{meter}
\end{array}
$$

Daar in het rechter lid t niet meer voorkomt, doet de plaats van t op de tijdsas dus niets ter zake.

Conclusie: Is $s_t = at+b$ meter, dan legt het massapunt in iedere seconde een baanstuk af waarvan de grootte gelijk is aan $|a|$ meter.

Punt 5) Een beweging met plaatsfunctie $s_t = at+b$ meter heeft dus TWEE bijzonderheden, n.l.
1°) het massapunt beweegt voortdurend in eenzelfde richting
2°) het massapunt legt in ieder tijdsinterval van ÉÉN seconde een baanstuk van $|a|$ meter af.

Zo'n beweging noemt men een EENPARIGE BEWEGING.

Definitie. Een beweging heet EENPARIG als het massapunt voortdurend in EENZELFDE richting beweegt en daarbij IN IEDERE SECONDE een baanstuk aflegt van CONSTANTE GROOTTE.

Punt 6) De ALGEBRAÏSCHE waarde van DE VERPLAATSING PER SECONDE noemt men DE SNELHEID van het eenparig bewegend massapunt.

Definitie. Onder DE SNELHEID van een EENPARIGE BEWEGING verstaat men
DE ALGEBRAISCHE WAARDE
van de
CONSTANTE
VERPLAATSING PER SECONDE.

Punt 7) De snelheid wordt aangeduid door de letter v.
Is de plaatsfunctie $s_t = at+b$ meter, dan is DE SNELHEID van het massapunt dus gelijk aan:

$$\boxed{v = a\,\frac{\text{meter}}{\text{sec}}}$$

Vraag. Wat wil zeggen: een eenparig bewegend massapunt heeft een snelheid van $+3$ m/sec.?

Antw.: Dat het massapunt voortdurend in POSITIEVE richting beweegt en daarbij PER SECONDE een baanstuk van 3 meter aflegt.

Vraag. Wat wil zeggen: de snelheid van een eenparige beweging is -3 $^m/sec.$?

Antw.: Dat het massapunt voortdurend in NEGATIEVE richting beweegt en daarbij PER SECONDE een baanstuk van 3 meter aflegt.

Punt 8) De eenheid van snelheid.

> **Definitie.** De eenheid van snelheid is de snelheid van die eenparige beweging waarbij PER SECONDE een baanstuk wordt afgelegd van ÉÉN METER.

Deze snelheid wordt aangeduid met

$$\boxed{1\ \frac{m}{sec}}$$

Als eenheid van afstand is dus gekozen èèn meter.
Als eenheid van tijdsduur is dus gekozen èèn seconde.

Punt 9) Als $s_t = at + b$ meter, dan is $v = a$ $^m/sec.$

We kunnen de algemene gedaante van de plaatsfunctie van een eenparige beweging dus ook schrijven als:

$$\boxed{s_t = vt + b \text{ meter}}$$

Vraag. Wat stelt b voor?

Antw.: Op het ogenblik $t = 0$, dus het ogenblik dat de waarneming begint, is de baancoördinaat:

$$s_o = 0 + b = b \text{ meter.}$$

Conclusie: $b = s_o$, de baancoördinaat op het ogenblik $t = 0$.

Vraag. In welke vorm kan de algemene gedaante van de plaatsfunctie van een eenparige beweging dus geschreven worden?

Antw.:

$$\boxed{s_t = vt + s_o \text{ meter.}}$$

Punt 10) Het opstellen van de plaatsfunctie van een eenparige beweging.

Voor het maken van de sommen is het van belang, dat men bovenstaande vergelijking kan afleiden, uitgaande van de definitie van de snelheid van een eenparige beweging.

Gegeven: De snelheid van een eenparige beweging is V $^m/sec.$

Gevraagd: De plaatsfunctie.

Oplossing.

$$s_t = \boxed{\begin{array}{c}\text{De baancoöd.}\\ \text{op het ogenbl.}\\ t = 0\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Wat er}\\ \text{PER SEC.}\\ \text{bijkomt}\end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c}\text{Aantal sec.}\\ \text{sinds } t = 0\end{array}} \text{ meter.}$$

Hieruit volgt:

$$s_t = \boxed{\quad s_o \quad} + \boxed{\quad v \quad} \times \boxed{\quad t \quad} \text{ meter.}$$

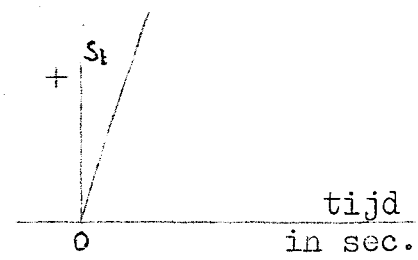
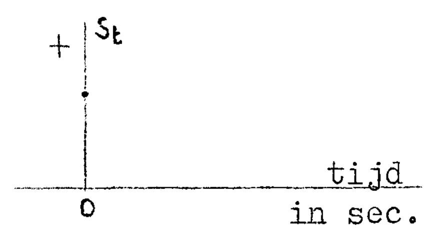
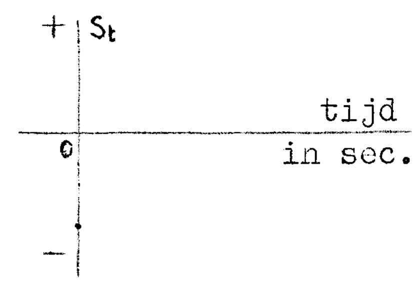
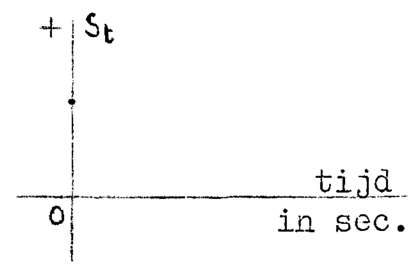
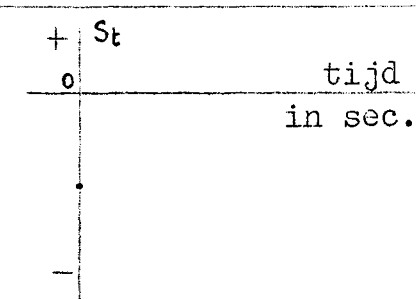
Dus:

$$\boxed{s_t = s_o + v.t \text{ meter}}$$

Of

$$\boxed{s_t = v.t + s_o \text{ meter}}$$

Punt 11) <u>Opgave 9.</u> Stel in elk van de onderstaande gevallen de plaatsfunctie op van het eenparig bewegende massapunt. Teken ook het S - t diagram.

	Gegevens	Plaatsfunctie	S - t diagram.
$N^{\underline{o}}$. I	$S_o = 0$ $v = +3\ {}^m/sec$	$s_t = +3t$ meter.	
$N^{\underline{o}}$. II	$S_o = +2$ m. $v = +3\ {}^m/sec$		
$N^{\underline{o}}$. III	$S_o = -2$ m. $v = +3\ {}^m/sec$		
$N^{\underline{o}}$. IV	$S_o = +2$ m. $v = -3\ {}^m/sec$		
$N^{\underline{o}}$. V	$S_o = -2$ m. $v = -3\ {}^m/sec$		

<u>Opgave 10.</u> <u>Gegeven.</u> $v = -8\ {}^m/sec.$

$s_5 = +3$ meter. Let wel; de baancoördinaat op $t = 5$.

<u>Gevraagd.</u> s_t

<u>Oplossing I.</u> $s_5 = +3$ meter.

dus $+3 = -8.5 + s_o$ meter.

dus $s_o = +43$ meter.

dus $s_t = -8t + 43$ meter.

<u>Oplossing II.</u>

<u>Oplossing II.</u> Het tijdstip t komt (t - 5) seconden LATER dan het tijdstip t = 5 sec.
DE VERPLAATSING PER SECONDE is - 8 meter.
In (t - 5) seconden is de verplaatsing dus -8(t-5) meter.

Dus: $s_t = s_5 - 8(t-5)$ meter
$= +3 - 8(t-5)$ meter

Dus: $s_t = -8t + 43$ meter.

Punt 12) <u>Nadere beschouwing van het s - t diagram.</u>

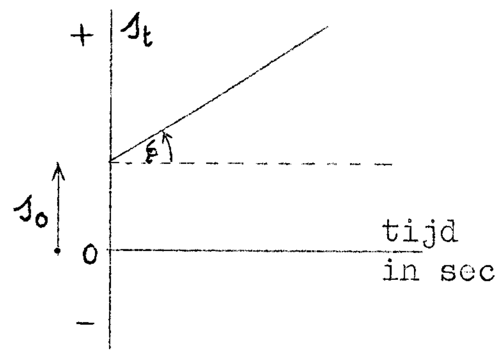


Fig. 1: v +

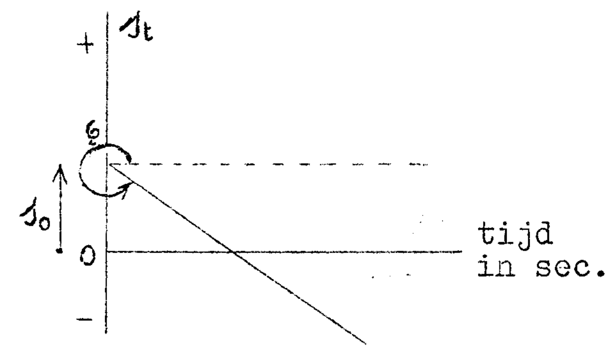


fig. 2: v−

Bovenstaande figuren stellen ieder een S - t diagram voor van een eenparig bewegend massapunt: In figuur 1) is de snelheid positief; in fig. 2) negatief.

<u>NB Vraag.</u> <u>WAAR ZIJN DEZE SNELHEDEN IN DE S-t DIAGRAMMEN AAN GELIJK?</u>

<u>Antw.:</u> $s_t = vt + s_0$ meter.
v is in elk van de diagrammen gelijk aan de RICHTINGS-COEFFICIENT van de rechte, dus gelijk aan de TANGENS van de hoek die de rechte maakt met de POSITIEVE TIJDSAS.

> <u>Conclusie.</u> De snelheid van een eenparige beweging wordt in het S - t diagram voorgesteld door
> DE TANGENS VAN DE HOEK
> DIE DE RECHTE MAAKT MET DE POS.TIJDSAS.

<u>Opmerkingen</u> a) Bij een eenparige beweging spreekt men van DE snelheid zonder meer. Men kan echter ook zeggen, dat een eenparig bewegend massapunt OP IEDER OGENBLIK DEZELFDE SNELHEID HEEFT, omdat de S-t rechte op ieder ogenblik dezelfde hoek maakt met de positieve tijdsas.

b) Soms wordt de vraag gesteld "Hoe kan een massapunt nu OP EEN BEPAALD OGENBLIK een snelheid hebben: een massapunt kan in het tijdsinterval van een TIJD-STIP (= tijd-<u>punt</u>) toch niet bewegen?"

<u>Antwoord.</u> Als men zegt dat een eenparig bewegend massapunt <u>OP IEDER OGENBLIK</u> een snelheid van v $^m/$sec. heeft, BEDOELT MEN DAARMEE, dat het massapunt op ieder ogenblik zoveel bewegingsenergie heeft, dat het in de - op een beschouwd tijd stip - volgende seconde een baanstuk van |v| meter zal afleggen.

Punt 13) <u>Vragen.</u>

Punt 13) Vragen. a) Wat wil het zeggen als het S - t diagram een rechte evenwijdig aan de tijdsas is?

Antwoord: dat het massapunt stil staat.

b) Kan het S - t diagram van een eenparige beweging ook een rechte evenwijdig aan de S - as zijn?

Antwoord: Nee, want dat zou betekenen dat het massapunt op de baan "alom" tegenwoordig was!

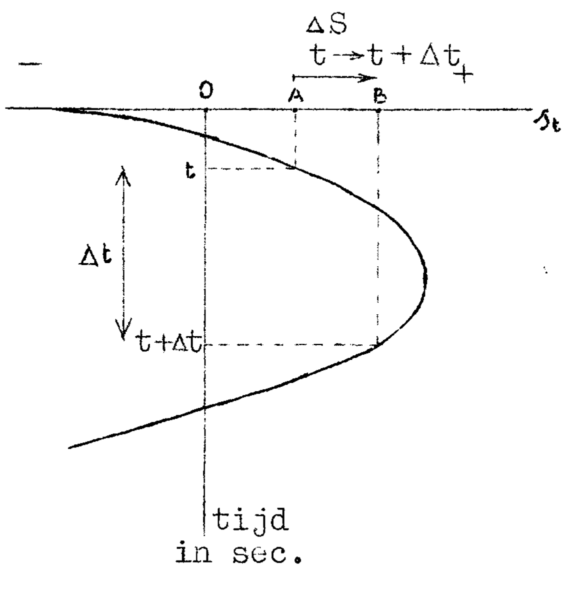
§ 6. DE GEMIDDELDE SNELHEID IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL bij een rechtlijnige beweging waarvan de plaatsfunctie NIET van de eerste graad is, althans niet behoeft te zijn.

Punt 1)

Definitie. Onder DE GEMIDDELDE SNELHEID IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL verstaat men
HET QUOTIENT van
DE VERPLAATSING IN DIT TIJDSINTERVAL
en
DE DUUR VAN DIT TIJDSINTERVAL.

Opmerking: Deze definitie geldt ook voor de kromlijnige beweging MITS men met DE VERPLAATSING bedoelt DE VERPLAATSING IN HET PLATTE VLAK (of de ruimte)
Bij een RECHTLIJNIGE beweging is de verplaatsing in het platte vlak (of de ruimte) identiek met de verplaatsing LANGS DE BAAN.

Punt 2) Deze definitie in beeld.



Nevenstaande figuur stelt het S - t diagram voor van een beweging langs een rechte baan (= horiz. as)
Op het ogenblik t sec. bevindt het massapunt zich in A; op het ogenblik $t + \Delta t$ sec. in B.
$\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ is dus de verplaatsing in het tijdsinterval van $t \to t + \Delta t$ sec.

Welnu:

Onder DE GEMIDDELDE SNELHEID IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t + \Delta t$ sec. verstaat men
HET QUOTIENT

$$\frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \quad \frac{\text{meter}}{\text{sec}}$$

Vraag. Stel, dat in bovenstaande figuur $\Delta S = +12$ meter en $\Delta t = 3$ sec, dan is de gemiddelde snelheid in dit tijdsinterval dus gelijk aan

$$\frac{+12}{3} = +4 \ {}^{m}/\text{sec.}$$

Wat wil dit nu zeggen?

Antwoord. Dat DE VERPLAATSING in dit tijdsinterval gelijk is aan die van een eenparig bewegend massapunt met snelheid $+4 \ {}^{m}/\text{sec}$.

Vraag. Wat wil zeggen: de gemiddelde snelheid in een tijdsinterval is $- 4 \ {}^{m}/\text{sec}$.?

Punt 3) Notatie. De gemiddelde snelheid in het tijdsinterval $t \to t + \Delta t$ wordt aangeduid door het symbool

$$\overline{v}_{t \to t + \Delta t}$$

Conclusie.

$$\overline{v}_{t \to t + \Delta t} = \frac{\Delta s_{t \to t + \Delta t}}{\Delta t} \quad \frac{\text{meter}}{\text{sec}}$$

Opmerking. De gemiddelde snelheid in een tijdsinterval wordt in dezelfde eenheid uitgedrukt als de snelheid van een eenparige beweging: Is de eenheid van afstand èèn meter en de eenheid van tijdsduur èèn seconde, dan wordt $\overline{v}_{t \to t+\Delta t}$ uitgedrukt in $\frac{\text{meter}}{\text{sec}}$.

Punt 4) Voorbeelden.

a) Gegeven: $s_t = t^2 - 4t + 5$ meter.

Gevraagd: De gemiddelde snelheid in het tijdsinterval dat gevormd wordt door de 3°, 4° en 5° seconde SAMEN.

Oplossing: Het gegeven tijdsinterval BEGINT OP $t = 2$ sec. en EINDIGT OP $t = 5$ sec. De DUUR van het tijdsinterval is 3 seconden.
We moeten dus berekenen:

$$\overline{v}_{2 \to 5} = \frac{S_{2 \to 5}}{3} \ {}^{m}/\text{sec.}$$

Welnu:

$$\begin{aligned} s_5 &= 25 - 20 + 5 = +10 \text{ meter} \\ s_2 &= 4 - 8 + 5 = +1 \text{ meter} \\ \hline \Delta S_{2 \to 5} &= = +9 \text{ meter} \end{aligned} \; -$$

Conclusie: $\overline{v}_{2 \to 5} = \frac{+9}{3} = +3\ {}^{m}/\text{sec.}$

b) Gegeven: $s_t = -t^2 + 2t - 6$ meter.

Gevraagd: De gemiddelde snelheid in het tijdsinterval van $t = 5 \to t = 5 + \Delta t$ sec; dus $\overline{v}_{5 \to 5 + \Delta t}$

Oplossing: Het gegeven tijdsinterval begint op $t = 5$ sec. en duurt Δt sec.
We moeten dus berekenen:

$$\overline{v}_{5 \to 5 + \Delta t} = \frac{\Delta s_{5 \to 5 + \Delta t}}{\Delta t} \ {}^{m}/\text{sec}$$

Welnu:

$$\begin{aligned} s_{5 + \Delta t} &= -(5 + \Delta t)^2 + 2(5 + \Delta t) - 6 \text{ meter} \\ &= -25 - 10\,\Delta t - (\Delta t)^2 + 10 + 2\Delta t - 6 \text{ meter} \\ s_5 &= -25 \qquad\qquad\qquad\qquad + 10 \qquad - 6 \text{ meter} \\ \hline \Delta S_{5 \to 5 + \Delta t} &= \quad - 10\,\Delta t - (\Delta t)^2 \quad + 2\Delta t \quad \text{meter} \end{aligned} \; -$$

Dus:

$$\overline{v}_{5 \to 5 + \Delta t} = \frac{-10\Delta t - (\Delta t)^2 + 2\Delta t}{\Delta t} = -10 - \Delta t + 2 = -8 - \Delta t \ \frac{m}{\text{sec}}$$

Conclusie:

$$\overline{v}_{5 \to 5 + \Delta t} = -8 - \Delta t \ \frac{m}{\text{sec}} .$$

c) Gegeven: $s_t = at^2 + bt + c$ meter.

Gevraagd: $\bar{v}_{t \to t+\Delta t}$

Oplossing: Het tijdsinterval begint op het ogenblik t sec. en duurt Δt sec.
We moeten dus berekenen:

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \ {}^{m}/sec$$

Welnu:

$$\begin{aligned} s_{t+\Delta t} &= a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) + c \\ &= at^2 + 2at\,\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\,\Delta t + c \quad \text{meter} \\ S_t &= at^2 \qquad\qquad\qquad\quad + bt \qquad\quad + c \quad \text{meter} \\ \hline \Delta S_{t \to t+\Delta t} &= \quad + 2at\,\Delta t + a(\Delta t)^2 \quad + b\,\Delta t \qquad \text{meter} \end{aligned}$$

Dus:

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{+2at(\Delta t) + a(\Delta t)^2 + b\Delta t}{t} = 2at + a\Delta t + b \ {}^{m}/sec.$$

Conclusie:

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = 2at + b + a\Delta t \ {}^{m}/sec.$$

5) Nadere beschouwing van het s - t diagram.

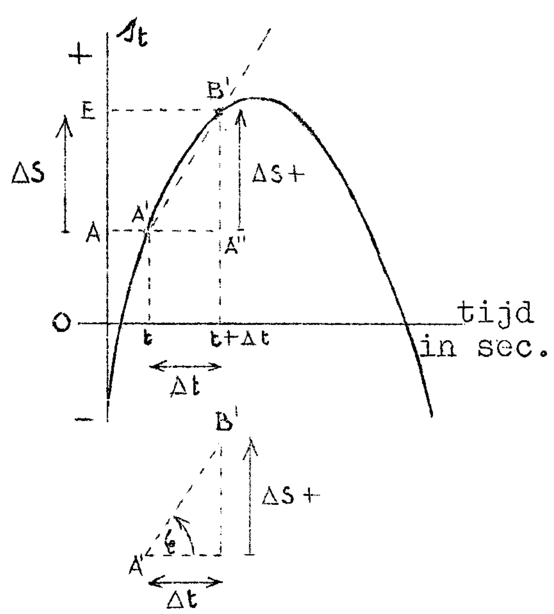


fig. 1.

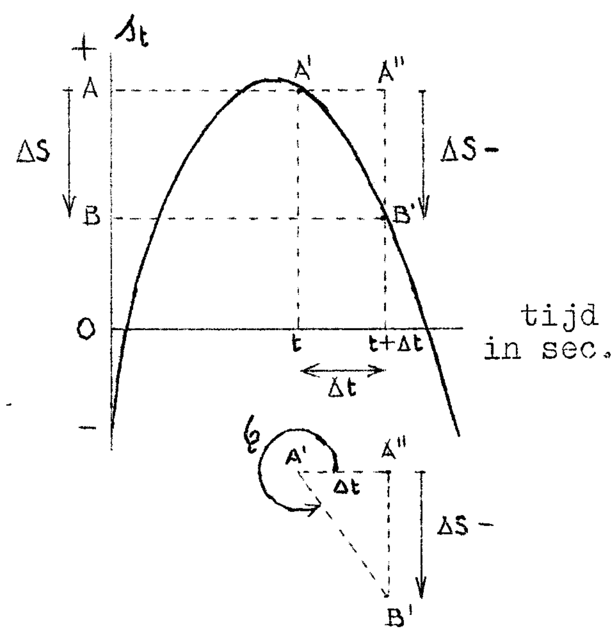


fig. 2.

Bovenstaande figuren stellen ieder een S - t - diagram voor.
In fig. 1 is het tijdsinterval $t \to t+\Delta t$ sec. zò gekozen dat $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ POSITIEF is;
in fig. 2 is het tijdsinterval $t \to t+\Delta t$ sec. zò gekozen dat $\Delta S_{t \to t+\Delta t}$ NEGATIEF is.

NB We vragen: WAAR IS $\bar{V}_{t \to t+\Delta t}$ AAN GELIJK?

Antwoord.

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{t}$$

Uit de figuren volgt dat:

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \text{tg}\ \varphi$$

MITS we onder φ de hoek verstaan die als volgt wordt gevonden: plaats de passerpunt in A' en de schrijfpunt in A", draai TEGEN DE KLOK IN tot de schrijfpunt de grafiekkoorde $\overline{A'B'}$ snijdt. De dan door de schrijfpunt beschreven boog is $\angle\varphi$.

Benaming: $\angle\varphi$ is de hoek die de grafiekkoorde $\overline{A'B'}$ maakt met de + tijds-as.

Conclusie: De gemiddelde snelheid in een bepaald tijdsinterval wordt in het S - t diagram voorgesteld DOOR DE TANGENS VAN DE HOEK DIE DE GRAFIEK-KOORDE VAN DIT TIJDSINTERVAL ($\overline{A'B'}$) MAAKT MET DE POSITIEVE TIJDS-AS.

§ 7. DE SNELHEID OP EEN BEPAALD OGENBLIK.

Punt 1) In de vorige paragraaf hebben we gedefinieerd wat men dient te verstaan onder DE GEMIDDELDE SNELHEID IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL. Uitgaande van deze definitie zullen we in deze paragraaf aan de hand van een getallenvoorbeeld proberen te komen tot de definitie van DE SNELHEID OP EEN BEPAALD OGENBLIK.

Gegeven: $s_t = -\frac{1}{2}t^2 + 5t - 4{,}5$ meter.

Gevraagd a) $\overline{v}_{2\to 2+\Delta t}$

Oplossing.
$$s_{2+\Delta t} = -\tfrac{1}{2}(2+\Delta t)^2 + 5(2+\Delta t) - 4{,}5$$
$$= -2 - 2\,\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 + 10 + 5\Delta t - 4{,}5 \text{ meter}$$
$$s_2 = -2 \qquad\qquad 10 \qquad - 4{,}5 \text{ meter}$$
$$\overline{\Delta s_{2\to 2+\Delta t} = -2\,\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 + 5\Delta t \text{ meter}} \;-$$

Dus:
$$\Delta s_{2\to 2+\Delta t} = +3\Delta t - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 \text{ meter}$$

Dus:
$$\overline{v}_{2\to 2+\Delta t} = \frac{+3\Delta t - \frac{1}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} = +3 - \tfrac{1}{2}\Delta t \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Conclusie. $\overline{v}_{2\to 2+\Delta t} = +3 - \frac{1}{2}\Delta t$ m/sec.

Deze uitkomst is dus voor deze beweging de formule van de gemiddelde snelheid in IEDER tijdsinterval DAT BEGINT OP HET TIJDSTIP t = 2 sec.

b.v.
$$\overline{v}_{2\to 5} = +3 - 1{,}5 = +1{,}5 \text{ m/sec.}$$
$$\overline{v}_{2\to 4} = +3 - 1 = +2 \text{ m/sec.}$$
$$\overline{v}_{2\to 3} = +3 - 0{,}5 = +2{,}5 \text{ m/sec.}$$
$$\overline{v}_{2\to 2{,}5} = +3 - 0{,}25 = +2{,}75 \text{ m/sec. enz.}$$

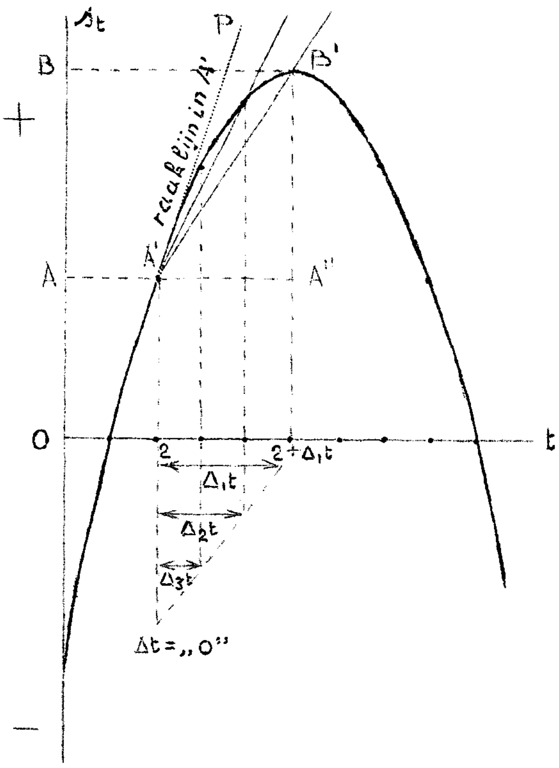
Gevraagd b) Wat valt er te zeggen van de waarde van deze gemiddelde snelheid als de DUUR Δt van het tijdsinterval $2\to 2+\Delta t$ sec. NADERT TOT NUL?

Antwoord: $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \overline{v}_{2\to 2+\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} (+3 - \frac{1}{2}\Delta t) = +3$ m/sec.

Conclusie. De limiet van $\overline{v}_{2\to 2+\Delta t}$ als Δt nadert tot nul is + 3 m/sec.

Gevraagd c) Wat stelt deze limiet voor in het S - t diagram?

Antwoord.



Nevenstaande figuur stelt het s - t diagram voor van de beweging met plaatsfunctie:

$$s_t = -\tfrac{1}{2}t^2 + 5t - 4{,}5 \text{ meter}$$

In het tijdsinterval $2 \rightarrow 2+\Delta_1 t$ sec. is

$$\boxed{\bar{v}_{2\rightarrow 2+\Delta_1 t} = \text{tg } A'' A' B'}$$

Als Δt nadert tot nul, nadert het grafiek punt B' langs de grafiek naar het grafiek-punt A', EN NADERT DE HALFLIJN A'B' TOT DE BOVENHELFT VAN DE RAAKLIJN IN HET GRAFIEKPUNT A' AAN DE GRAFIEK.

Conclusie:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{2\rightarrow 2+\Delta t} = \text{tg} \angle A'' A' P = +3}$$

Gevraagd d) WELKE NATUURKUNDIGE BETEKENIS HEEFT DEZE LIMIET?

Antwoord: De rechte A'P is de s - t-grafiek van een EENPARIGE beweging waarbij het massapunt zich op het tijdstip t = 2 sec. in het punt A van de rechte baan bevindt en een snelheid heeft van +3 m/sec.
Dat de halfrechte A'P in het grafiekpunt A' raakt aan de s - t grafiek van de gegeven beweging, wil zeggen, DAT HET S - T-DIAGRAM VAN DE GEGEVEN BEWEGING IN HET INFINITESIMAAL KLEINE TIJDSINTERVAL VAN HET OGENBLIK t = 2 sec.

SAMENVALT.

MET HET S - T-DIAGRAM VAN EEN EENPARIGE BEWEGING WAARBIJ HET MASSAPUNT OP IEDER OGENBLIK EEN SNELHEID HEEFT VAN +3 m/sec.

Welnu, uit het feit van dit SAMENVALLEN DER S - t-DIAGRAMMEN moeten we besluiten DAT ER GEDURENDE HET INFINITESIMAAL KLEINE TIJDSINTERVAL VAN HET OGENBLIK t = 2 sec. GEEN VERSCHIL BESTAAT TUSSEN DE GEGEVEN BEWEGING EN EEN EENPARIGE BEWEGING MET SNELHEID +3 m/sec.

Zou de gegeven beweging dus vanaf het tijdstip t = 2 sec. niet meer veranderen, dus op t = 2 sec. overgaan in een eenparige beweging, dan zou het gegeven massapunt daarna PER SECONDE EEN BAANSTUK VAN 3 METER IN POSITIEVE RICHTING AFLEGGEN.
M.a.w. Op het tijdstip t = 2 sec. heeft het massapunt zoveel bewegingsenergie dat het per sec. een baanstuk van 3 meter zou kunnen afleggen.
M.A.W. OP HET TIJDSTIP t = 2 sec. HEEFT HET MASSAPUNT DE SNELHEID +3 m/sec.

NB **CONCLUSIE.**

$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_{2 \to 2+\Delta t}$ = DE SNELHEID V.H. MASSAPUNT OP HET TIJDSTIP $t = 2$ sec.

NB **Notatie.** De snelheid op het tijdstip $t = 2$ sec. wordt aangeduid door V_2

NB Dus: $\lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_{2 \to 2+\Delta t} = V_2$

Gevraagd e) Geef een OVERZICHT van de bewerkingen die we achtereen volgens hebben moeten uitvoeren om V_2 te vinden.

Antwoord: 1^o bewerking: bepaal $\Delta S_{2-2+\Delta t}$

NB 2^o bewerking: bepaal $\overline{v}_{2 \to 2+\Delta t} = \frac{\Delta S_{2 \to 2+\Delta t}}{\Delta t}$

NB 3^o bewerking: bepaal $\lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_{2 \to 2+\Delta t}$

NB De uitkomst van deze limiet is DE SNELHEID van het massapunt OP HET TIJDSTIP $t = 2$ sec.

Punt 2) Opgave 11. Gegeven: $s_t = -t^2 + 4t$ meter

Gevraagd: a) v_o
b) v_2
c) v_4

vergelijk de uitkomsten met § 2,b

Merk op, dat $v_a = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_{a \to a+\Delta t}$

Opgave 12. Kies zelf een plaatsfunctie en bepaal de snelheid op een zelfgekozen tijdstip.

Punt 3) We geven nu de exacte definitie van de snelheid op een bepaald ogenblik.

NB **Definitie.** Onder de snelheid op het ogenblik t verstaat men
DE LIMIET
NB waartoe DE GEMIDDELDE SNELHEID, genomen over het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$, nadert als
NB Δt NADERT TOT NUL.

In formule:

$$\boxed{v_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}}$$

Notatie. De $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}$ duidt men aan met het symbool $\frac{ds}{dt}$

Dus:

$$\boxed{v_t = \frac{ds}{dt}}$$

Punt 4) Opgave 13. Gegeven: $s_t = -2t^2 + 6t - 8$ meter

Gevraagd: v_t, v_3, v_o

Oplossing: Bewerking 1.

$$
\begin{array}{lll}
s_{t+\Delta t} & = & -2(t+\Delta t)^2 + 6(t+\Delta t) - 8 \\
 & = & -2t^2 - 4t\Delta t - 2(\Delta t)^2 + 6t + 6\Delta t - 8 \text{ meter} \\
s_t & = & -2t^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 6t \qquad\quad - 8 \text{ meter} \\
\hline
\Delta s_{t \to t+\Delta t} & = & \qquad - 4t\Delta t - 2(\Delta t)^2 \qquad + 6\Delta t \qquad \text{meter}
\end{array}
$$

Bewerking 2.

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{-4t\Delta t - 2(\Delta t)^2 + 6\Delta t}{\Delta t}$$

$$= -4t - 2\Delta t + 6 \frac{m}{sec}.$$

Bewerking 3.

$$v_t = \lim_{\Delta t \to o} (-4t - 2\Delta t + 6) = -4t + 6 \ ^m/sec.$$

conclusie:

$$\boxed{v_t = -4t + 6 \ ^m/sec.}$$

Uit deze uitkomst volgt:

$$v_3 = -12 + 6 = -6 \ ^m/sec.$$

$$v_o = \quad 0 + 6 = +6 \ ^m/sec.$$

Opgave 14. Gegeven: $s_t = at^2 + bt + c$ meter

Gevraagd: v_t

Oplossing: $s_{t+\Delta t} =$

$s_t =$

$\Delta s_{t \to t+\Delta t} =$

dus

$$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\Delta s_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} =$$

dus

$$v_t = \lim_{\Delta t \to o} \qquad\qquad\qquad = 2at + b \ ^m/sec.$$

Opgave 15. Gegeven: $s_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ meter.

Gevraagd: v_t

Oplossing: $s_{t+\Delta t} = a(t+\Delta t)^3$

$=$

$s_t =$

$\Delta s_{t \to t+\Delta t} =$

dus $\bar{v}_{t \to t+\Delta t} =$

dus

$$v_t = \lim_{\Delta t \to o}$$

$$\underline{\underline{v_t = 3at^2 + 2bt + c \ ^m/sec.}}$$

Punt 5) <u>Nadere beschouwing van het s - t-diagram.</u>

<u>We willen de limiet overgang</u> ($\lim\limits_{\Delta t \to o} \bar{v}_{t \to t + \Delta t}$) <u>nog eens bezien in verband met het s-t diagram.</u>

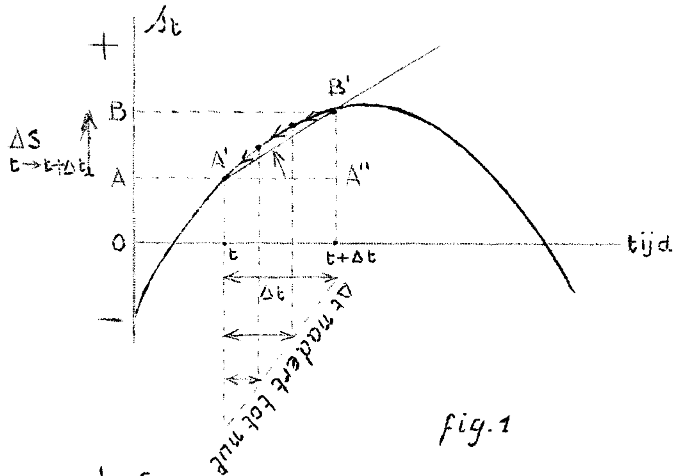


fig.1

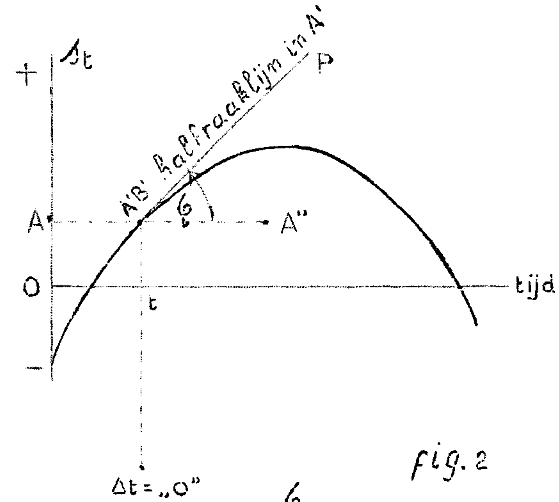


fig.2

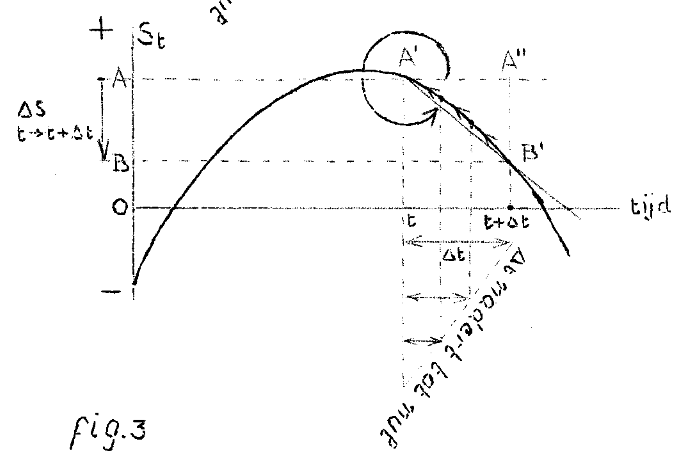


fig.3

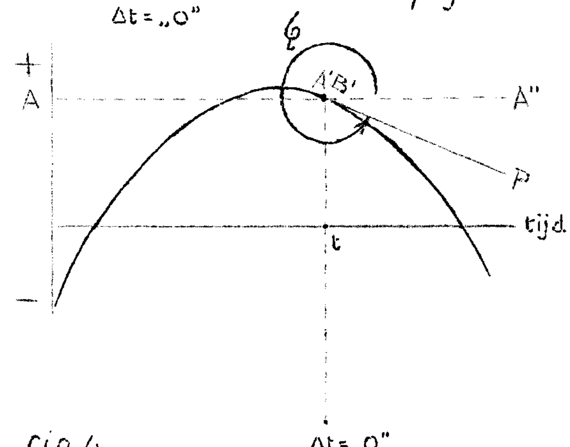


fig.4

<u>Bij fig. 1 en 3.</u>

$$\bar{v}_{t \to t + \Delta t} = tg \begin{pmatrix} \text{de hoek die de} \\ \text{halflijn A'B'} \\ \text{maakt met de} \\ \text{+tijdsas.} \end{pmatrix}$$

Terwijl t nadert tot nul wandelt het grafiekpunt B' over de grafiek naar het grafiekpunt A' toe.
De halflijn A'B' nadert dan steeds meer tot de raaklijn in A'

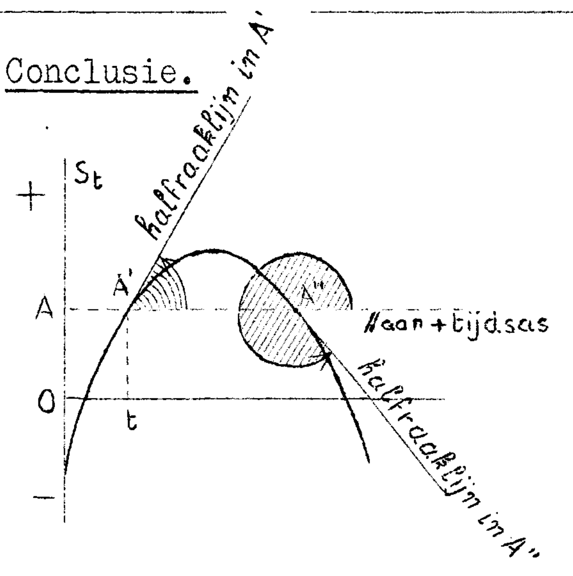
<u>Bij fig. 2 en 4.</u>

Als Δt genaderd is tot nul ligt het grafiekpunt B' tegen het grafiekpunt A' aan.
De halflijn A'B' valt dan samen met de raaklijn in A' aan de S-t grafiek.
Dus: $\lim\limits_{\Delta t \to o} \bar{v}_{t \to t + \Delta t} = tg\, \varphi$
Maar, zoals we in punt 2d) beredeneerden is
$$\lim_{\Delta t \to o} \bar{v}_{t \to t + \Delta t} = v_t$$
Dus:

$$\boxed{v_t = tg\, \varphi}$$

<u>Conclusie:</u> blz. 24.

Conclusie.



DE SNELHEID OP HET TIJDSTIP t wordt in het S - t diagram voorgesteld door

DE TANGENS

van de hoek die de halfraaklijn in het bijbehorend grafiekpunt maakt met de POSITIEVE TIJDSAS.

Punt 6) Opgave 16. In de onderstaande figuren stelt de halflijn A'P de halfraaklijn in het grafiekpunt A' voor.

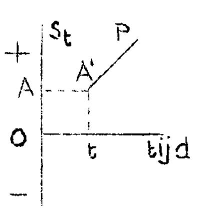


fig. 1

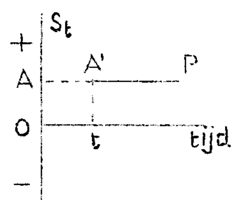


fig. 2

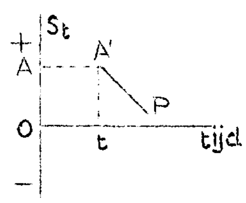


fig. 3

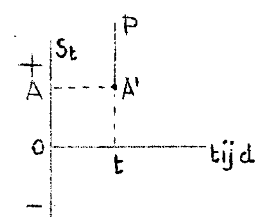


fig. 4

Gevraagd: Wat valt er eventueel te zeggen van de grootte en het teken van de snelheid op het beschouwde ogenblik?

Antwoord: Bij fig. 1) $v_t = +$

Bij fig. 2) $v_t = 0$

Bij fig. 3) $v_t = -$

Bij fig. 4) Deze situatie is natuurkundig ONMOGELIJK, want v_t kan niet oneindig groot zijn.

NB. Een s - t diagram kan NOOIT een raaklijn hebben // s_t-as.

Opgave 17. Als gegeven is dat het S - t diagram een parabool is die de tijdsas snijdt, beredeneer dan, dat de snelheden waarmee het massapunt op de heen en terugweg de oorsprong passeert GELIJK EN TEGENGESTELD zijn.

§ 8. DIFFERENTIEREN.

Punt 1) Vergelijken we in de opgaven 14 en 15 de plaatsfuncties met de daarbij behorende snelheidsfuncties, dan ontdekken we een merkwaardige regelmaat.

$s_t = at^2 + bt + c \rightarrow v_t = 2\,at + b$ dus: $at^2 \rightarrow 2at$

$bt \rightarrow b$

$c \rightarrow o$

$s_t = at^3 + bt^2 + ct + d \rightarrow v_t = 3\,at^2 + 2\,bt + c$ dus: $at^3 \rightarrow 3\,at^2$

$bt^2 \rightarrow 2\,bt$

$ct^1 \rightarrow 1.c.t^o = c$

$d = d.t^o \rightarrow o$

Deze regelmaat wordt in de wiskunde exact bewezen.

Volgens deze regelmaat kunnen we DE SNELHEIDSFUNCTIE DIRECT AFLEZEN UIT DE PLAATSFUNCTIE.

Voorbeeld. $s_t = 3t^7 - 8t^5 + 5t^2 - t + 7$ meter

dan volgt: $v_t = 21t^6 - 40t^4 + 10t - 1 \quad \frac{m}{sec}$

Welnu: DEZE BEWERKING HEET DIFFERENTIËREN.

Conclusie. Men vindt DE SNELHEIDSFUNCTIE van een beweging DOOR DE PLAATSFUNCTIE van deze beweging TE DIFFERENTIËREN NAAR DE TIJD.

$$\boxed{v_t = \frac{ds}{dt} \quad \frac{m}{sec}}$$

De snelheid OP EEN BENOEMD TIJDSTIP vindt men door dit tijdstip te substitueren in de snelheidsfunctie.

Punt 2) Opmerking. Met nadruk wijzen we er op, dat t gedifferentieerd 1 oplevert.

Immers $t = t^1$, dus $\frac{dt}{dt} = 1.t^0 = 1$.

Punt 3) Opgave 18. Gegeven: $s_t = \frac{1}{t}$ meter.

Gevraagd: v_t.

Oplossing: $s_t = t^{-1}$m, dus $v_t = -1t^{-1-1} = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$ m/sec.

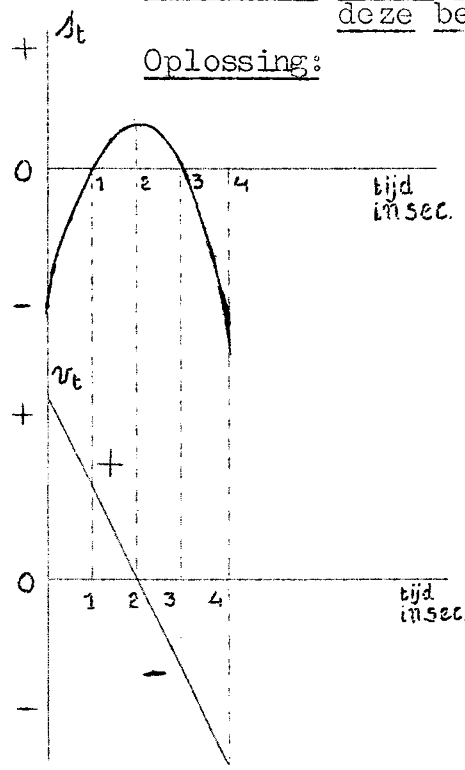
§ 9. Het V - t diagram.

Punt 1) Onder het v - t-diagram verstaat men de grafiek van de snelheid als functie van de tijd.

Punt 2) Opgave 19. Gegeven: $s_t = -t^2 + 4t - 3$ meter.

Gevraagd: a) Teken het s - t en het v - t diagram van deze beweging.

Oplossing:



$s_t = -t^2 + 4t - 3$ meter.

Het s-t diagram is een "bergparabool" die de tijdsas snijdt in de punten t = 1 en t = 3 sec.

Op deze ogenblikken passeert het massapunt dus de oorsprong.

S_t is maximaal positief op het tijdstip t = 2.

Op dit ogenblik keert het massapunt op de baan om.

$v_t = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \frac{m}{sec}$.

Het v - t diagram is een rechte lijn met negatieve richtingscoëfficient.

In het tijdsinterval van 0 → 2 sec. neemt v_t lineair af van +4 m/sec. tot nul.

Op t = 2 is de snelheid NUL.

In het tijdsinterval van 2 → 4 sec. neemt v_t in negatieve zin toe van 0 tot - 4 m/sec.

NB Gevraagd b) Waaraan kan men IN HET V - T DIAGRAM zien dat het massapunt op het tijdstip t = 2 sec. omkeert?

Antwoord: AAN HET FEIT DAT DE SNELHEID OP HET TIJDSTIP t = 2 VAN TEKEN VERWISSELT.

Punt 3) Vraag b) van opgave 19 stelt de belangrijke kwestie aan de orde: HOE MAAKT MEN UIT OF EEN MASSAPUNT OMKEERT? In het geval van opgave 19 is de snelheid op het tijdstip t = 2 sec. gelijk aan nul. Kan men daar niet uit besluiten dat het massapunt op t = 2 sec. omkeert?

Antwoord. Dat de snelheid op t = 2 sec. nul is, is EEN VOORWAARDE DIE

WEL NOODZAKELIJK

MAAR NIET VOLDOENDE IS

om te kunnen besluiten dat het massapunt op t = 2 sec. zal omkeren.

WEL NOODZAKELIJK: Zolang immers de bewegingsenergie het massapunt in een bepaalde richting langs de rechte baan voortstuwt moet het massapunt in die richting verder gaan; pas als deze bewegingsenergie is uitgeput en het massapunt dus tot rust gekomen is kan het mogelijk zijn dat het massapunt nieuwe bewegingsenergie krijgt om terug te gaan.
DAT DE SNELHEID NUL WORDT IS DUS NOODZAKELIJK OM TE KUNNEN OMKEREN.

MAAR NIET VOLDOENDE. Als een auto voor een stoplicht even tot stilstand komt wil dat nog niet zeggen dat deze, als het signaal op groen komt, zal omkeren!
We zullen dit toelichten met een getallenvoorbeeld.

Gegeven: $s_t = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + \frac{1}{3}$ meter.

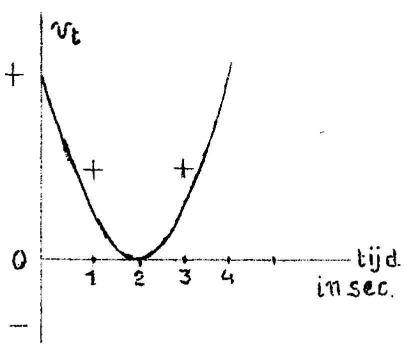
Gevraagd: Op welk ogenblik is de snelheid nul? Zal het massapunt dan omkeren?

Antwoord: $v_t = t^2 - 4t + 4 \ \frac{m}{sec}$

Is $v_t = 0$, dan moet

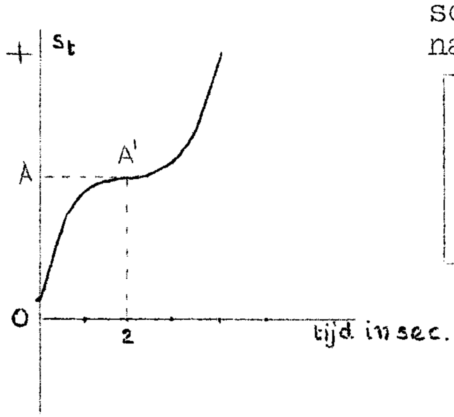
$0 = t^2 - 4t + 4 \longrightarrow t = 2$ sec.

Op het tijdstip t = 2 sec. is de snelheid dus nul.



Het v - t diagram is een "dal-parabool" die in t = 2 raakt aan de tijdsas.
DE SNELHEID BEHOUDT DUS GEDURENDE DE GEHELE BEWEGING HETZELFDE TEKEN i.c. +
Het massapunt beweegt dus steeds in dezelfde richting en keert dus NIET om.

Nevenstaande figuur is het S - t diagram van deze beweging.
De grafiek heeft voor t = 2 sec. een horizontaal BUIGPUNT: Het massapunt houdt op t = 2 sec. in het baanpunt A even stil en gaat daarna weer in de positieve richting verder.



Conclusie. Het feit dat de snelheid op een zeker ogenblik nul is, is NIET VOLDOENDE om te kunnen besluiten dat het massapunt op dat ogenblik zal omkeren.

Vraag. Aan welke voorwaarde moet, behalve dat de snelheid nul is, dan nog voldaan worden wil het massapunt omkeren?

Antwoord. De snelheid moet op het ogenblik dat deze nul is

VAN TEKEN VERANDEREN.

Immers DAN en SLECHTS DAN is er een VERANDERING VAN bewegings- RICHTING langs de rechte baan.

Vraag. Aan welke voorwaarde moet de v - t grafiek voldoen wil een massapunt op een ogenblik dat de snelheid nul is, OMKEREN?

Antwoord. De v - t grafiek moet, op het ogenblik dat de snelheid nul is

DE TIJDSAS

S N I J D E N.

Immers dan en slechts dan zal de snelheid op dat ogenblik van teken veranderen.

Vraag. Hoe moet men dus te werk gaan als men wil onderzoeken of een massapunt al dan niet zal omkeren?

Antwoord. Bewerking I. Leid de snelheidsfunctie af.

Bewerking II. Onderzoek of de snelheidsgrafiek de tijdsas SNIJDT.

Punt 4) Opgave 20. Gegeven: $s_t = t^3 - 6t^2 + 9t$ meter.

Gevraagd: a) s_2 Oplossing: $s_2 =$

b) v_t Oplossing: $v_t =$

c) v_2 en v_5;

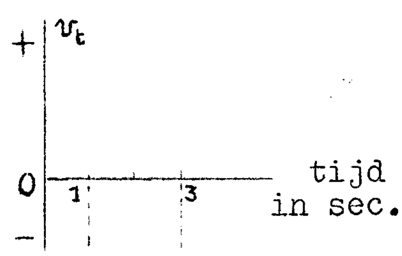
In welke richting beweegt het m.pt. dan?

Oplossing: $v_2 =$ m.pt.beweegt naar

$v_5 =$ m.pt.beweegt naar

d) Keert het massapunt om? Zo ja, op welke tijdstippen.

Oplossing:



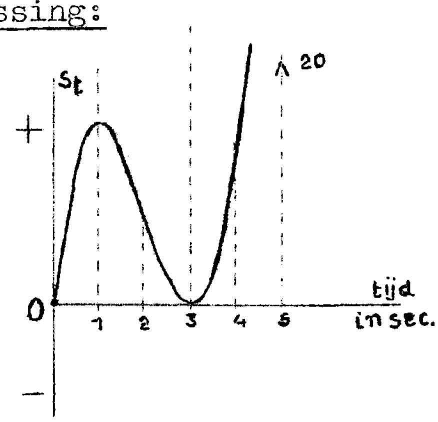
e) In welke baanpunten keert het massapunt om?

Oplossing: $s_1 =$

$s_3 =$

f) Schets het S - t diagram van t = 0 tot t = 5

Oplossing:



$s_0 =$

$s_1 =$

$s_2 =$

$s_3 =$

$s_4 =$

$s_5 =$

g) Leg verband tussen het s - t- en het v-t diagram: Lees uit het s - t diagram af dat de snelheid in het tijdsinterval 0 → 1 sec. positief is maar afneemt; dat de snelheid van t = 1 tot t = 3 negatief is; dat de snelheid op t = 2 maximaal negatief is.

§ 10. "Terug - differentiëren" (= integreren)

Punt 1) In §8 hebben we gezien hoe we uit de plaatsfunctie de snelheidsfunctie kunnen afleiden. We stellen ons nu de vraag of het mogelijk is de plaatsfunctie te bepalen als de snelheidsfunctie gegeven is.

Gegeven: $v_t = 3t + 2$ m/sec.

Gevraagd: s_t

Oplossing: We moeten nu de functie vinden die gedifferentieerd $3t + 2$ oplevert, d.w.z. we moeten $3t + 2$ "terug-differentiëren".
Bij het differentiëren van een macht wordt de coëfficient VERMENIGVULDIGD met de machtsexponent en wordt de machts exponent met 1 VERMINDERD, b.v. $3a^5$ wordt gediff. $15a^4$.
Bij het "terugdifferentiëren wordt de machtsexponent dus met 1 VERMEERDERD en de coëfficient GEDEELD door DE NIEUWE machtsexponent. b.v. $15a^4$ wordt na terugdifferentiëren $a^5 . \frac{15}{5} = 3a^5$.
$3t + 2$ wordt dus na "terug-differentiëren" $\frac{3}{2} t^2 + 2t$.
Maar dit is niet af!
Immers, het differentiëren van ieder getal levert nul op; het terugdifferentiëren van nul levert dus EEN ONBENOEMD GETAL op.
$3t + 2$ wordt dus na "terugdifferentiëren" $\frac{3}{2}t^2 + 2t + a$.

Dus: $s_t = \frac{3}{2} t^2 + 2t + a$ meter

maar $s_o = 0 + 0 + a$, dus $a = s_o$

Conclusie:

$$\boxed{s_t = \frac{3}{2} t^2 + 2t + s_o \text{ meter}}$$

Als de snelheidsfunctie gegeven is weten we dus nog niet waar het massapunt zich bevindt op t = 0.

Punt 2) Opgave 21. Gegeven: $v_t = 8$ m/sec; de snelheid is dus constant.

Gevraagd: s_t.

Oplossing: Door "terugdifferentiëren" volgt:

$s_t =$

Hieruit volgt dat we een eenparige beweging ook kunnen definiëren als een beweging waarvan de snelheid constant is.

Henric van Veldeke College
Maastricht.

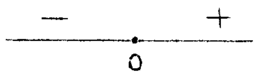
Deel B. DE VERSNELLING BIJ EEN RECHTLIJNIGE BEWEGING.

§ 1. Inleiding.

In dit deel van hoofdstuk I wordt de snelheidsfunctie van een rechtlijnige beweging nader bestudeerd. Tot nu toe hebben we over deze snelheidsfunctie het volgende behandeld:

1°) We vinden de snelheidsfunctie door de plaatsfunctie te DIFFERENTIËREN NAAR DE TIJD: $v_t = \frac{ds}{dt}$ $\frac{m}{sec.}$

Op ieder tijdstip heeft de snelheid een bepaalde GROOTTE en een bepaald TEKEN:

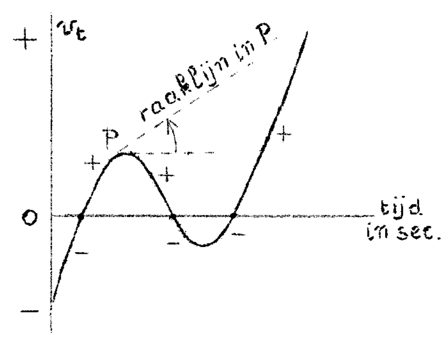


Is v_{t_1} +, dan is het massapunt op het tijdstip t_1 sec. bezig met IN POSITIEVE RICHTING te bewegen; dus ⟶

Is v_{t_1} −, dan beweegt het massapunt op het tijdstip t_1 sec IN NEGATIEVE RICHTING; dus ⟵

Opmerking. Het is duidelijk, dat het teken van de snelheid op een bepaald tijdstip NIETS ZEGT OVER HET TEKEN VAN DE BAANCOÖRDINAAT op dat tijdstip; de baancoördinaat kan op een gegeven tijdstip zeer wel negatief zijn terwijl het massapunt zich dan in POSITIEVE RICHTING beweegt, dus dat v_t dan positief is.

2°)



Het v − t diagram geeft ons een grafisch beeld van de snelheids functie.
Het langs een (rechte) baan bewegend massapunt KEERT OM op de tijdstippen waarop de v-t grafiek de tijdsas SNIJDT.

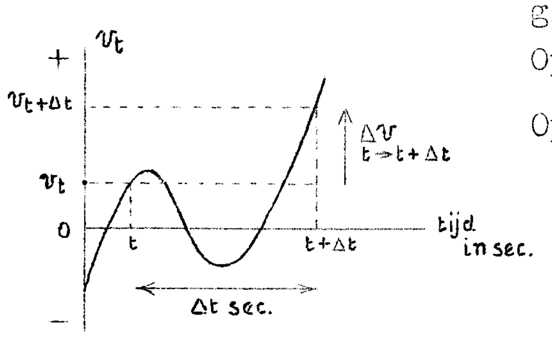
3°) Is de snelheidsfunctie gegeven, dan vinden we de plaatsfunctie (op s_0 na) door de snelheidsfunctie "terug te differentiëren".

"Test - opgave": Stel, dat bij de beweging waarvan bovenstaande figuur het v − t diagram is, s_0 = 0. Boots deze beweging dan na door een potloodpunt langs de rand van een lat te bewegen.

In dit deel gaat het ons om de tangens van de hoek die de halfraak lijn in een grafiekpunt aan de v − t grafiek maakt met de positieve tijdsas.

§ 2. De snelheids-VERANDERING in een bepaald tijdsinterval van een willekeurige rechtlijnige beweging.

Punt 1) De definitie.



Nevenstaande figuur stelt het v − t-diagram voor van een of andere beweging langs een rechte baan.

Op het tijdstip t sec. is de snelheid v_t m/sec;

Op het tijdstip t + Δt sec. is de snelheid $v_{t+\Delta t}$ m/sec.

WE VRAGEN NU NAAR DE A L G E B R A I S C H E WAARDE VAN HET V E R S C H I L

$$v_{t+\Delta t} \;-\; v_t \quad {}^{m}/\text{sec.}$$

einde v.h. tijdsinterval — begin v.h. tijdsinterval

Deze algebraïsche waarde van dit verschil noemt men:

DE SNELHEIDS VERANDERING

van de gegeven rechtlijnige beweging IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec.

Definitie: Onder DE SNELHEIDS-VERANDERING van een rechtlijnige beweging IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL verstaat men
DE ALGEBRAÏSCHE WAARDE VAN DE SNELHEID AAN HET EINDE
VERMINDERD MET
DE ALGEBRAÏSCHE WAARDE VAN DE SNELHEID AAN HET BEGIN
VAN DIT TIJDSINTERVAL.

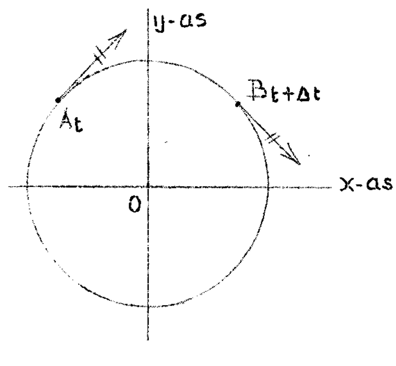
Notatie. De snelheidsverandering in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. wordt aangeduid door het symbool

$$\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta v}$$

Conclusie:

$$\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta v} = \underset{\text{einde}}{v_{t+\Delta t}} - \underset{\text{begin}}{v_t} \quad {}^{m}/\text{sec.}$$

Opmerking. Met nadruk wijzen we er op dat in bovenstaande definitie de snelheidsverandering VAN EEN RECHTLIJNIGE BEWEGING gedefiniëerd wordt.
Een rechtlijnige beweging heeft de bijzonderheid dat er geen verschil bestaat tussen DE SNELHEIDSVERANDERING L A N G S D E B A A N en DE SNELHEIDSVERANDERING t.o.v. HET PLATTE VLAK (of de ruimte).
BIJ EEN KROMLIJNIGE BEWEGING IS DIT ANDERS.
We zullen dit aan de hand van een voorbeeld toelichten.

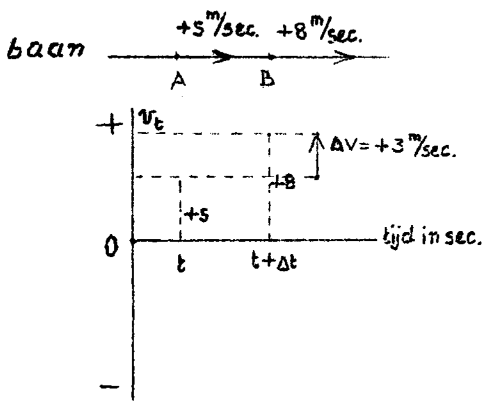


Stel, dat een massapunt een EENPARIGE beweging uitvoert langs de omtrek van de in het x-o-y vlak getekende cirkel.
De snelheid blijft dus constant van GROOTTE.
TEN OPZICHTE VAN HET COÖRD. STELSEL LANGS DE BAAN IS DE SNELHEIDSSITUATIE OP HET TIJDSTIP t sec. VOLKOMEN GELIJK AAN DE SNELHEIDSSITUATIE OP HET TIJDSTIP $t+\Delta t$ sec: DE SNELHEIDSVERANDERING LANGS DE BAAN IS DUS NUL.

TEN OPZICHTE VAN HET COÖRDINATENSTELSEL IN HET VLAK is de SNELHEIDSSITUATIE op het tijdstip t sec. NIET VOLKOMEN GELIJK aan de SNELHEIDSSITUATIE op het tijdstip $t+\Delta t$ sec: de pijl die de snelheid aan-

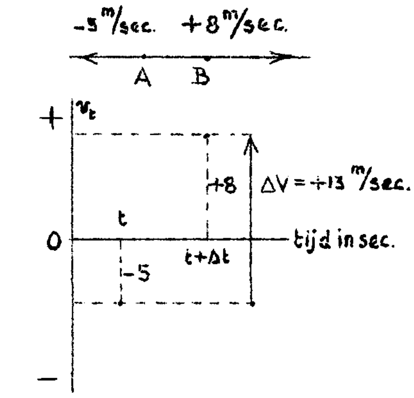
geeft maakt op het tijdstip t sec. ANDERE HOEKEN MET DE COÖRDINAATASSEN DAN OP HET TIJDSTIP t+Δt sec.
T.O.V. HET COÖRDINATENSTELSEL IN HET VLAK is er dus wel degelijk een snelheidsVERANDERING.
Hoe de snelheidsverandering t.o.v. het coördinatenstelsel in het vlak gedefiniëerd wordt zullen we in de desbetreffende paragraaf zien; we stellen nu alleen uitdrukkelijk vast, dat bij een KROMLIJNIGE beweging de snelheidsverandering LANGS DE BAAN (dus $v_{t+\Delta t} - v_t$) iets GEHEEL ANDERS is dan de snelheidsverandering t.o.v. EEN COÖRDINATEN STELSEL IN HET PLATTE VLAK (of de ruimte) in een bepaald tijdsinterval.
Bij een RECHTLIJNIGE beweging is de snelheidsverandering LANGS DE BAAN IDENTIEK met de snelheidsverandering t.o.v. een coörd.stelsel IN HET PLATTE VLAK (of de ruimte). Daarom mag men bij een rechtlijnige beweging kortweg spreken van DE snelheidsverandering in een bepaald tijdsinterval.

Punt 2) Mogelijke gevallen.

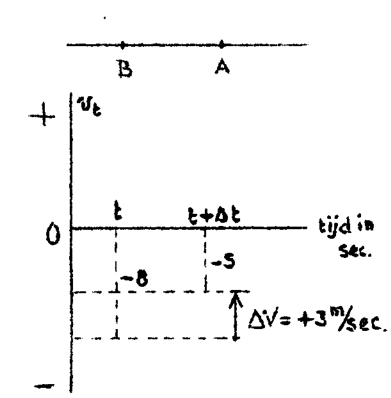


einde begin

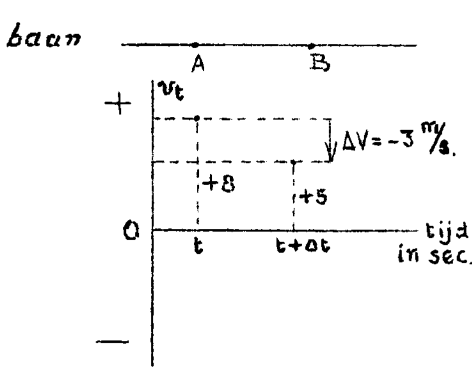
$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = (+8) - (+5) = + 3 \text{ m/sec.}$$



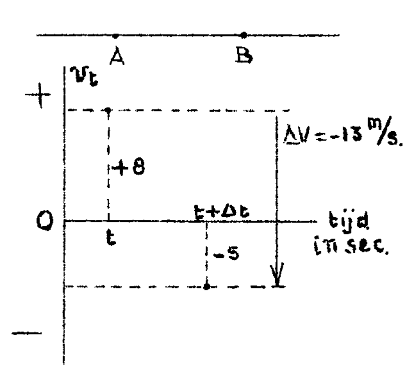
$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = (+8) - (-5) = +13 \text{ m/sec.}$$



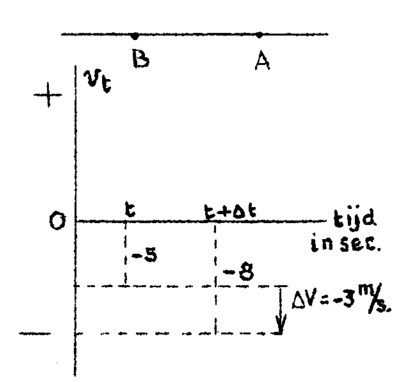
$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = \quad = $$



$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = \quad = $$



$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = \quad = $$



$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = \quad = $$

Punt 3) Opmerking. Volgens de definitie is

$$\underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = v_{t+\Delta t} - v_t \text{ m/sec.}$$

We kunnen deze vergelijking ook schrijven als:

$$\boxed{v_t + \underset{t\to t+\Delta t}{\Delta v} = v_{t+\Delta t} \text{ m/sec.}}$$

N.B. $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$ is dus de snelheid die we bij de snelheid aan het BEGIN van het tijdsinterval moeten OPTELLEN om de snelheid aan het EINDE van het tijdsinterval tot uitkomst te krijgen.

DIT KUNNEN WE OOK AFLEZEN UIT DE FIGUREN VAN PUNT 2.

Punt 3) Voorbeeld.

Gegeven: $s_t = t^3 - t$ meter.

Gevraagd: $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$

Oplossing: $v_t = 3t^2 - 1$ m/sec.

We moeten berekenen $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = v_{t+\Delta t} - v_t$ m/sec.

Welnu:

$$
\begin{array}{lll}
v_{t+\Delta t} & = 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 1 & \text{m/sec.} \\
v_t & = 3t^2 \qquad\qquad\qquad\quad - 1 & \text{m/sec.} \\
\hline
\text{Dus } \Delta v_{t \to t+\Delta t} & = \quad + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 & \text{m/sec.}
\end{array}
$$

3. $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$ bij rechtlijnige bewegingen met LINEAIRE SNELHEIDSFUNCTIE.

Punt 1) Gegeven: $v_t = at + v_o$ m/sec. Dit is de algemene vorm van een LINEAIRE SNELHEIDSFUNCTIE.

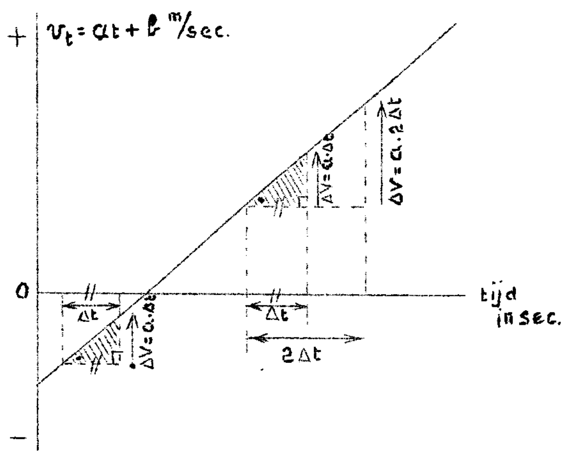
Gevraagd: $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$

Oplossing: $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = v_{t+\Delta t} - v_t$ m/sec.

Welnu:

$$
\begin{array}{lll}
v_{t+\Delta t} & = at + a\Delta t + v_o & \text{m/sec.} \\
v_t & = at \qquad\quad + v_o & \text{m/sec.} \\
\hline
\text{Dus } \Delta v_{t \to t+\Delta t} & = \quad a\Delta t & \text{m/sec.}
\end{array}
$$

Het merkwaardige van deze uitkomst is, dat Δv met betrekking tot het tijdsinterval $t \to t+\Delta t$ sec, NIET $\neg t \to t+\Delta t$ afhangt van het BEGINTIJDSTIP t sec., MAAR ALLEEN VAN DE DUUR Δt sec. van dit tijdsinterval en wel RECHT EVENREDIG is met Δt.



We zien dit ook in het v-t diagram. De v - t grafiek is EEN RECHTE LIJN waarvan de richtingscoëfficient gelijk is aan de algebraïsche waarde van a (immers tg ∠ = a)

Welnu:

De gearceerde driehoeken zijn congruent: in gelijke tijdsdelen Δt sec. verandert de snelheid met eenzelfde bedrag $a\Delta t$ m/sec, ONVERSCHILLIG WAAR Δt ligt OP DE TIJDSAS.

Maakt men Δt b.v. 2 x zo groot, dan volgt uit gelijkvormigheid van driehoeken, dat de snelheidsverandering ook 2 x zo groot wordt. Uit de grafiek volgt dus ook dat $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$ recht evenredig is met Δt.

Punt 2) Hoe groot is de snelheidsverandering in een tijdsinterval van EEN SECONDE?

Antwoord.

Antwoord. In Δt sec. is de snelheidsverandering

$$\Delta v_{t \to t+\Delta t} = a.\Delta t \ ^{m}/sec. \qquad (1)$$

Is Δt = 1 sec. dan is de snelheidsverandering dus

$$\Delta v_{t \to t+1} = a.1 \ ^{m}/sec.$$

> **Conclusie.** Is de SNELHEIDSFUNCTIE een LINEAIRE functie van de tijd, dan verandert de snelheid in IEDER tijdsinterval van EEN seconde met een CONSTANT bedrag, dat dezelfde ALGEBRAISCHE WAARDE heeft als de
>
> COËFFICIËNT a
>
> in de gegeven snelheidsfunctie
>
> $$v_t = at + v_o \ ^{m}/sec.$$

Punt 3) Nadere beschouwing van de coëfficiënt a.

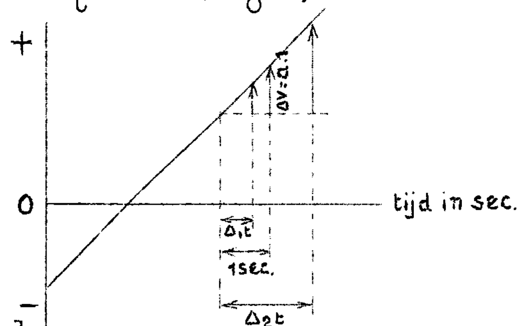
Uit punt 2) volgt dat DE COËFFICIËNT a in de snelheidsfunctie

$$v_t = at + v_o \ ^{m}/sec.$$

DE SNELHEIDSVERANDERING PER SECONDE voorstelt.

Men dient zich echter goed te realiseren wat dit betekent.

$v_t = at + v_o \ ^{m}/sec.$



In IEDER tijdsinterval, onverschillig of zijn duur groter, kleiner of gelijk is aan 1 sec., verandert de snelheid met $a.\Delta t \ ^{m}/sec.$ d.w.z.

ZOVAAK DE TIJDSDUUR VAN EEN SECONDE BEGREPEN IS OP DE TIJDSDUUR VAN HET BESCHOUWDE TIJDSINTERVAL, ZOVAAK HEEFT DE SNELHEIDSVERANDERING IN HET BESCHOUWDE TIJDSINTERVAL DE ALGEBRAISCHE WAARDE VAN a $^{m}/sec.$

Is $\Delta t = \frac{1}{5}$ sec., dan is de snelheidsverandering in deze tijdsduur $\frac{1}{5}$ x a $^{m}/sec.$
" Δt = 1 sec., " " " " " " " " 1 x a $^{m}/sec.$
" Δt = 5 sec., " " " " " " " " 5 x a $^{m}/sec.$

> De snelheidsverandering in IEDER tijdsinterval is dus GEËVENREDIGD aan de
>
> SNELHEIDSVERANDERING PER SECONDE.

Vraag. In welke EENHEID wordt DE SNELHEIDSVERANDERING PER SECONDE uitgedrukt?

Antw.: Uit vergelijking (1) volgt:

$$a = \frac{\Delta v_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \quad \frac{^{m}/sec.}{sec.}$$

De snelheidsverandering PER SECONDE wordt dus uitgedrukt in

$$\frac{^{m}/sec.}{sec.}$$

Deze eenheid geeft precies aan wat er met de snelheid gebeurt als deze een lineaire functie van de tijd is:

PER SECONDE $\left(\frac{....}{sec.}\right)$ verandert de snelheid met zoveel

$\frac{m}{sec}$ $\left(\frac{^{m}/sec.}{....}\right)$

Het is gebruikelijk om deze eenheid te schrijven als:

$$\boxed{\frac{m}{sec^2}}$$

Vraag. Wat wil zeggen: van een beweging met lineaire SNELHEIDS-functie is de snelheidsverandering PER SECONDE 3 $^m/sec^2$

Antw.: Dat $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = +3.\Delta t$ $^m/sec.$
Zo vaak de tijdsduur van èèn seconde begrepen is op de tijdsduur van het beschouwde tijdsinterval, zo vaak is de snelheidsverandering in dit tijdsinterval +3 $^m/sec.$

Dezelfde vraag voor − 3 $^m/sec^2$.

Punt 4) Twee benamingen.

I Omdat bij een rechtlijnige beweging met lineaire snelheidsfunctie de SNELHEID "eenparig" verandert (d.w.z. in gelijke tijdsdelen met gelijke bedragen), noemt men zo'n beweging EENPARIG VERANDERLIJK.

II

DE SNELHEIDSVERANDERING PER SECONDE van een EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGING noemt men DE VERSNELLING van deze eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging.

Notatie. DE VERSNELLING wordt aangeduid door de letter a. Dit is de eerste letter van het woord ACCELERATIE hetgeen in dit verband betekent "snelheidsverandering PER SECONDE".

Vraag. Wat wil zeggen: de versnelling van een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging is + 7 $^m/sec^2$.

Antw.: Dat de snelheidsverandering PER SECONDE gelijk is aan + 7 $^m/s^2$.

Dus: $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = +7\ \Delta t$ $^m/sec.$

en $v_t = +7t + v_o$ $^m/sec.$

Vraag. Wat wil zeggen: Van een eenparige veranderlijke rechtlijnige beweging is de versnelling − 7 $^m/sec^2$.

Antw.: Dat de snelheidsverandering PER SECONDE gelijk is aan −7 $^m/s^2$.

Dus: $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = -\ 7.\ \Delta t$ $^m/sec.$

en $v_t = -\ 7t + v_o$ $^m/sec.$

Opgave 22. Gegeven: $a = -\ 2$ $^m/sec^2$; $v_o = +\ 4$ $^m/sec$; $s_o = -\ 6$ meter.

Gevraagd: 1°) De snelheidsfunctie.

Antwoord. $v_t = -\ 2t + 4$ $^m/sec.$

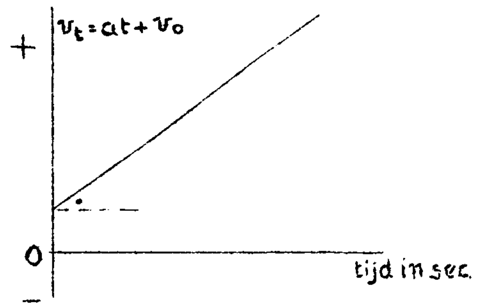
Gevraagd: 2°) De plaatsfunctie.

Antwoord. Door "terugdifferentiëren vinden we,

$s_t = -\ t^2 + 4t - 6$ meter.

Punt 5) De versnelling in het v − t diagram van een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging.

Punt 5) De versnelling in het v - t diagram van een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging.

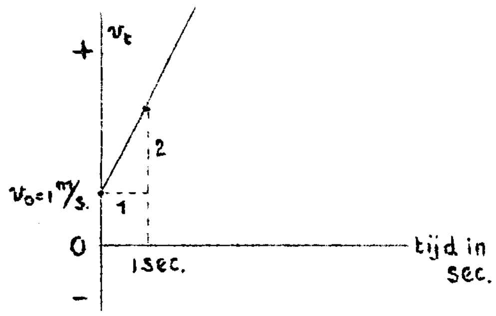


De RICHTINGSCOEFFICIENT van de v - t rechte is gelijk aan de ALGEBRAÏSCHE waarde van a.
Immers tg ∠ = a.

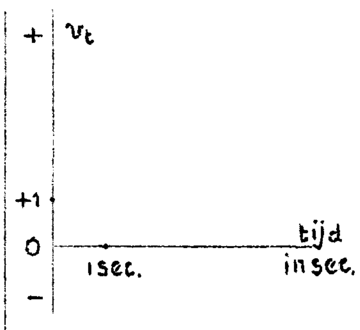
Conclusie.
De VERSNELLING van een EENPARIG VERANDERLIJKE rechtlijnige beweging wordt in het v - t diagram voorgesteld door
DE TANGENS
van de hoek die de v - t rechte maakt met de POSITIEVE tijdsas.

Opgave 23. Construeer de v - t rechte voor de gevallen dat $v_o = + 1$ m/sec. en $a = + 2$ m/sec^2; $a = + \frac{1}{2}$ m/sec^2; $a = - 2$ m/sec^2.

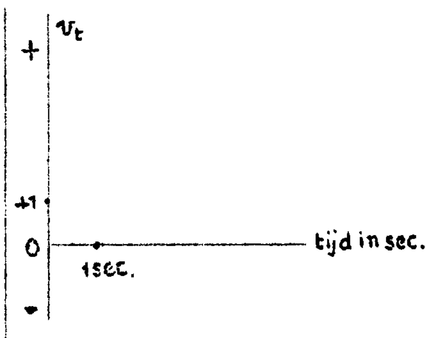
Constructies.



$v_t = + 2t + 1$ m/sec.



$v_t =$



$v_t =$

NB. Hoe groter de versnelling is, des te STEILER loopt de v - t rechte.

Punt 6) Opmerking I. In § 6 zullen we de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging vanuit een ruimer gezichtspunt nader bestuderen.

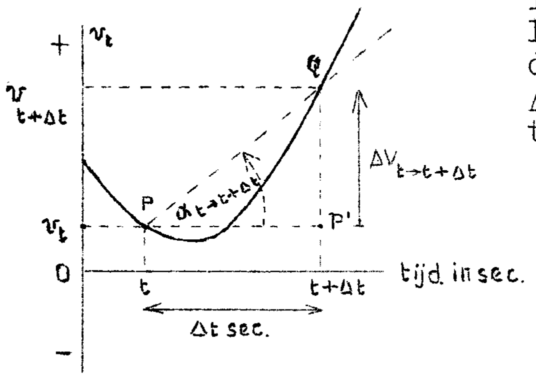
Opmerking II. In 1686 stelde de Engelse natuurkundige Isaac Newton de hypothese op, dat een versnelling alleen maar kan veroorzaakt worden door de werking van een KRACHT op het gegeven massapunt: Een n- maal zo grote kracht geeft aan hetzelfde massapunt een n- maal zo grote versnelling. Blijft de kracht constant dan blijft de versnelling ook constant en omgekeerd.
Deze hypothese wordt op een dermate evidente wijze door de ervaring bevestigd, dat men hier gerust van een algemene natuur-WET kan spreken.
Daar bij een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging DE VERSNELLING CONSTANT BLIJFT, is de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging dus een beweging onder invloed van een kracht die langs de rechte baan gericht is en constant blijft in grootte en richting.

Deze wetenschap zal het ons in de volgende paragrafen gemakkelijker maken om te zeggen wat er NATUURKUNDIG GEBEURT.
In de KRACHTENLEER zal uitvoerig gehandeld worden over de hypothese van Newton.

§ 4. DE GEMIDDELDE VERSNELLING....

§ 4. DE GEMIDDELDE VERSNELLING IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL bij een willekeurige rechtlijnige beweging.

Punt 1) De definitie.



In nevenstaande figuur stelt de kromme lijn de v - t grafiek voor van een of andere rechtlijnige beweging.
$\Delta v_{t\to t+\Delta t}$ is de SNELHEIDSVERANDERING in het tijdsinterval van $t\to t+\Delta t$ sec.

> WE VRAGEN WEER NAAR HET QUOTIENT
>
> $$\frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t} \ {}^{m}/sec^2$$

Vraag. Waar is de algebraische waarde van dit quotiënt aan gelijk in het v - t diagram.

Antw.: $$\frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t} = tg \angle P'PQ = tg\,\alpha_{t\to t+\Delta t} \ {}^{m}/sec^2.$$

> De algebraïsche waarde van dit quotiënt is dus gelijk aan DE TANGENS
>
> van de hoek die de grafiek-koorde van dit tijdsinterval maakt met de POSITIEVE TIJDSAS.

Vraag. Wat betekent dit quotiënt NATUURKUNDIG?

Antw.: $tg\,\alpha_{t\to t+\Delta t}$ is de richtingscoëfficient van de grafiekkoorde $\overline{PQ}$
Het quotiënt $\frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$ is dus de versnelling van DIE eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging WAARVAN DE RECHTE PQ DE v - t GRAFIEK IS.

De gegeven beweging is echter willekeurig.

VOOR DE GEGEVEN BEWEGING noemt men het quotiënt $\frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$
DE GEMIDDELDE VERSNELLING
IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t\to t+\Delta t$ sec.

> Definitie. Onder DE GEMIDDELDE VERSNELLING van een rechtlijnige beweging IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL verstaat men de waarde van HET QUOTIENT
>
> $$\frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t} \ {}^{m}/sec^2.$$

Notatie. De GEMIDDELDE VERSNELLING in het tijdsinterval van $t\to t+\Delta t$ sec. wordt aangeduid door het symbool

$$\bar{a}_{t\to t+\Delta t}$$

> Dus: $$\bar{a}_{t\to t+\Delta t} = \frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t} \ {}^{m}/sec^2.$$
>
> $$\bar{a}_{t\to t+\Delta t} = tg\,\alpha_{t\to t+\Delta t} \ {}^{m}/sec^2.$$

Punt 2) NIET VERWARREN.

De gemiddelde SNELHEID in het tijdsinterval $t \to t+\Delta t$ sec.	De gemiddelde VERSNELLING in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.
$\bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \dfrac{\Delta s_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}$ m/sec.	$\bar{a}_{t \to t+\Delta t} = \dfrac{\Delta v_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}$ m/sec².

Punt 3) Voorbeeld.

Gegeven: $s_t = -\frac{1}{12}t^3 + t^2$ meter.

Gevraagd: $\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t}$

Oplossing: $v_t = -\frac{1}{4}t^2 + 2t$ m/sec.

We moeten berekenen $\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = \dfrac{\Delta v_{2 \to 2+\Delta t}}{\Delta t}$ m/sec².

Welnu:

$$
\begin{array}{lll}
v_{2+\Delta t} & = -1 - \Delta t - \frac{1}{4}(\Delta t)^2 + 4 + 2\Delta t & \text{m/sec.} \\
v_2 & = -1 \qquad\qquad\qquad\qquad + 4 & \text{m/sec.} \\
\hline
\Delta v_{2 \to 2+\Delta t} & = \quad - \Delta t - \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \quad + 2\Delta t & \text{m/sec.}
\end{array}
$$

Dus: $\Delta v_{2 \to 2+\Delta t} = +\Delta t - \frac{1}{4}(\Delta t)^2$ m/sec.

Dus: $\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = \dfrac{+\Delta t - \frac{1}{4}(\Delta t)^2}{\Delta t} = \underline{\underline{+1 - \frac{1}{4}\Delta t \text{ m/sec}^2.}}$

§ 5) DE VERSNELLING OP EEN GEGEVEN TIJDSTIP VAN EEN RECHTLIJNIGE BEWEGING.

Punt 1) We vragen nu naar de wiskundige waarde en de natuurkundige betekenis van de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{t \to t+\Delta t}$

Punt 2) We nemen eerst een getallen voorbeeld.

Gegeven: $s_t = -\frac{1}{12}t^3 + t^2$ meter.

Gevraagd: 1°) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{2 \to 2+\Delta t}$

Oplossing: Zie § 3 punt 4).

$\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = +1 - \frac{1}{4}\Delta t$ m/sec².

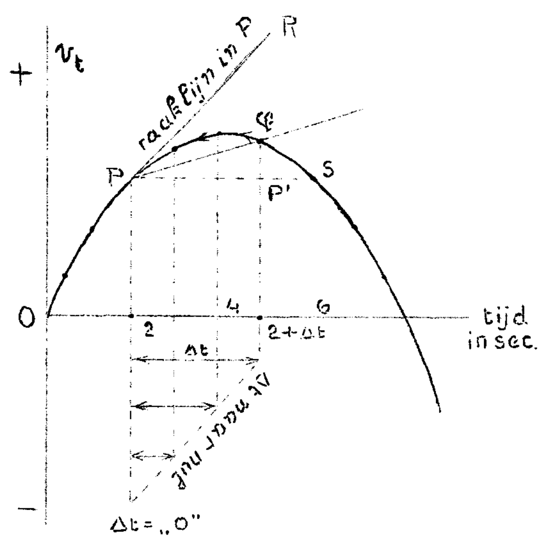
dus: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (+1 - \frac{1}{4}\Delta t) = +1$ m/sec² ①

Gevraagd 2°) Waardoor wordt de waarde van deze limiet voorgesteld in het v - t diagram?

Antwoord. In de figuur op blz. 38, stelt de bergparabool de v - t grafiek voor van de gegeven snelheidsfunctie:

$v_t = -\frac{1}{4}t^2 + 2t$ m/sec.

$\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = +1 - \frac{1}{4}\Delta t$ m/sec².



In dit v - t diagram is

$\bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = \text{tg} \angle P'PQ \ ^m/sec^2.$

Als Δt nadert tot nul wandelt het grafiekpunt Q over de bergparabool naar het grafiekpunt P.
In de limiet situatie ligt het grafiek punt Q TEGEN het grafiekpunt P AAN en is de halflijn PQ genaderd tot de halfraaklijn PR in het grafiekpunt P aan de v - t grafiek.
In het v - t diagram is dus:

$\lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{2 \to 2+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \text{tg} \angle P'PQ =$

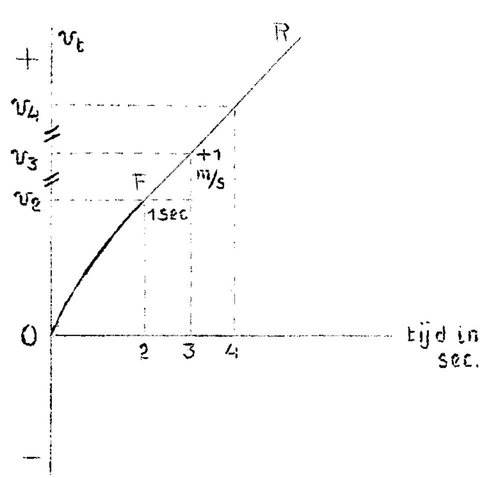
$= \text{tg} \angle P'PR \ ^m/sec^2$

Uit ① volgt dan in het gegeven voorbeeld: $\text{tg} \angle P'PR = +1$

Conclusie. De waarde van de limiet van de gemiddelde versnelling in het tijdsinterval van 2→2 + Δt sec. wordt in het v - t diagram voorgesteld door DE TANGENS van de hoek die de halfraaklijn in het grafiekpunt $P(2,v_2)$ maakt met de POSITIEVE tijdsas.

Gevraagd 3°) De NATUURKUNDIGE betekenis van deze limiet.

Antwoord. De halflijn PR (richtingscoëfficient + 1) raakt in P aan de v - t grafiek van de gegeven beweging. Voor de "duur" van het tijdstip t = 2 sec. is de gegeven beweging dus IDENTIEK met de beweging waarvan de halfraaklijn PR de v - t grafiek is, dus identiek met een EENPARIG VERANDERLIJKE beweging waarvan de VERSNELLING gelijk is aan + 1 $^m/sec^2$.



DIT WIL ZEGGEN:
Indien de gegeven beweging op het tijdstip t = 2 sec. ZOU OVERGAAN IN EEN EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGING (als dus de op het massapunt werkende kracht vanaf het tijdstip t = 2 sec. CONSTANT bleef), ZOU DE BEWEGING VANAF HET TIJDSTIP t = 2 sec. EEN EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGING WORDEN MET VERSNELLING + 1 $^m/sec^2$.
Dit feit drukt men natuurkundig uit door te zeggen DAT HET MASSAPUNT OP HET TIJDSTIP t = 2 sec. EEN VERSNELLING HEEFT VAN + 1 $^m/sec^2$.

Conclusie. De $\lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{2 \to 2+\Delta t}$ is DE VERSNELLING VAN DE GEGEVEN BEWEGING OP HET TIJDSTIP t = 2 sec.
In dit geval is deze + 1 $^m/sec^2$.

Gevraagd 4°) Hoe groot is de versnelling op het tijdstip t = 6 sec?

Antwoord. We moeten nu berekenen $\lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{6 \to 6+\Delta t}$

Maar de bergparabool in het v - t diagram heeft de lijn t = 4 tot symmetrie-as. We kunnen dus direct uit dit v - t diagram aflezen dat de tangens van de hoek die de halfraaklijn in S maakt met de positieve tijdsas gelijk is aan - 1.

Conclusie. Op het tijdstip t = 6 sec. heeft het massapunt een versnelling van - 1 $^m/sec^2$.
d.w.z. Indien de gegeven beweging op het tijdstip t = 6 sec. zou overgaan in een een-

parig veranderlijke beweging, zou dit een eenparig veranderlijke beweging worden met versnelling $- 1\ ^m/sec^2$.

Punt 3) Algemeen.

Aldus kunnen we van iedere, willekeurige rechtlijnige beweging de grootheid $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{t \to t+\Delta t}$ bepalen.

Deze grootheid heet dus DE VERSNELLING OP HET TIJDSTIP t sec.

Vraag: Wat ZEGT DEZE VERSNELLING OP EEN BEPAALD TIJDSTIP ONS over de beweging van het massapunt op dat tijdstip?

Antw.: De versnelling op een bepaald tijdstip geeft ons de versnelling van de eenparig veranderlijke beweging welke op het beschouwde ogenblik IDENTIEK is met de gegeven beweging. d.w.z. zou de gegeven beweging op het beschouwde tijdstip overgaan in een eenparig veranderlijke beweging (daarvoor is alleen nodig dat de kracht niet meer verandert) dan zou $\lim\limits_{\Delta t \to 0} a_{t \to t+\Delta t}$ de versnelling zijn van die eenparig veranderlijke beweging.

Punt 4) We geven nu de exacte definitie van de versnelling op een bepaald tijdstip van een rechtlijnige beweging.

Definitie. Onder DE VERSNELLING OP HET TIJDSTIP t sec. van een rechtlijnige beweging verstaat men

DE LIMIET

waartoe de

GEMIDDELDE VERSNELLING IN HET TIJDSINTERVAL VAN

$t \to t+\Delta t$ sec. nadert

als Δt nadert tot NUL.

Notatie. De versnelling op het tijdstip t sec. wordt aangeduid door het symbool a_t.

Dus:
$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{t \to t+\Delta t}\ ^m/sec^2.$$

Is α_t de hoek die de halfraaklijn in het beschouwde grafiek punt aan de v - t grafiek maakt met de

POSITIEVE TIJDSAS,

dan is
$$a_t = \operatorname{tg} \alpha_t\ ^m/sec^2.$$

Punt 5) Hoe BEREKENT men a_t UIT DE GEGEVEN PLAATSFUNCTIE?

Antwoord.
$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\Delta v_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}\ ^m/sec^2.$$

De WISKUNDIGE BEWERKINGEN die we moeten uitvoeren om a_t te bepalen zijn dus precies dezelfde als die welke nodig waren bij het afleiden van de snelheidsfunctie uit de plaatsfunctie.

Conclusie.

Conclusie.

N.B. BIJ EEN RECHTLIJNIGE BEWEGING VINDT MEN DE VERSNELLINGSFUNCTIE DOOR DE SNELHEIDSFUNCTIE TE DIFFERENTIEREN NAAR DE TIJD, OF DOOR DE PLAATSFUNCTIE TWEE MAAL ACHTER ELKAAR TE DIFFERENTIEREN NAAR DE TIJD.

N.B. Dus: $a_t = \frac{dv_t}{dt}$ $^m/sec^2$.

N.B.

of: $a_t = \frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} =$, notatie, $= \frac{d^2s}{dt^2}$ $^m/sec^2$.

Opmerkingen. α) De notatie $\frac{d^2s}{dt^2}$ lijkt ons vreemd: er wordt toch niet gedifferentiëerd naar t^2. We zouden het gewoon gevonden hebben als er gestaan had:

$$a_t = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}) = \frac{d^2s}{(dt)^2}$$

Inderdaad zou deze notatie correcter geweest zijn, maar de "wetenschappelijke slordigheid" heeft tot de gewoonte geleid om die haakjes om dt weg te laten, en dus kortweg te schrijven $\frac{d^2s}{dt^2}$.
Het zou voor de wetenschap niet leuk zijn als een buitenstaander direct begreep wat er bedoeld werd!

β) Met nadruk wijzen we er nogmaals op dat de voorgaande theorie alleen geldig is voor de RECHTLIJNIGE beweging. We zullen later zien, dat bij een KROMLIJNIGE beweging $\frac{d^2s}{dt^2}$ de versnelling LANGS DE BAAN voorstelt, maar NIET de versnelling t.o.v. het coördinatenstelsel in het platte vlak of de ruimte.

Punt 6) Voorbeeld.

Gegeven: $s_t = t^5 + 4t^2 - t$ meter.

Gevraagd: a) a_t.

Oplossing. $v_t = 5t^4 + 8t - 1$ $^m/sec$.
$a_t = 20t^3 + 8$ $^m/sec^2$.

b) a_0; a_2

Oplossing. $a_0 = +8$ $^m/sec^2$.
$a_2 = 160 + 8 = +168$ $^m/sec^2$.

Punt 7) Opgave 24.

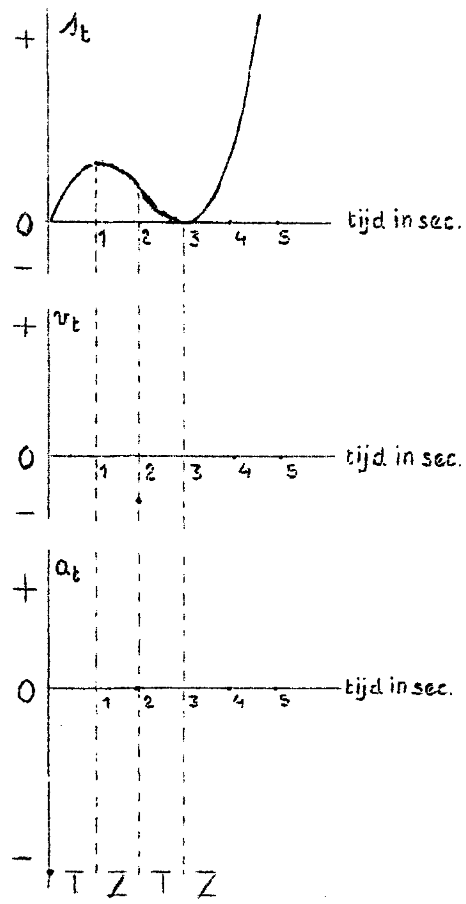
Gegeven: $s_t = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ meter.

Gevraagd: a) v_t en a_t

Oplossing. $v_t =$ ← let op de eenheid
$a_t =$ ← let op de eenheid

Gevraagd: b) De s - t-, v - t- en a - t- grafiek.

Gevraagd: b) De s - t-, v - t- en a - t- grafiek.



Lees uit het s - t diagram af op welke tijdstippen het massapunt omkeert; in welk tijdsinterval v_t - is; op welk tijdstip v_t max. neg. is.

Op welke tijdstippen keert het massapunt om?
Antw.: Op t =   en t =
want:

Lees uit het v - t diagram af in welk tijdsinterval a_t positief is.

In welke tijdsintervallen na t = 0 hebben v_t en a_t hetzelfde teken; in welke tegengesteld teken?
Antw.:

Z

T

N.B. Kijken we nu naar het s - t-diagram dan zien we:

Als v_t en a_t TEGENGESTELD TEKEN hebben is er een REMwerking;
DE BEWEGING HEET DAN VERTRAAGD.

Als v_t en a_t HETZELFDE TEKEN hebben neemt de vaart alsmaar toe;
DE BEWEGING HEET DAN VERSNELD.

Conclusie.

N.B. Een beweging heet VERSNELD als v_t en a_t HETZELFDE TEKEN hebben;

N.B.
N.B. Een beweging heet VERTRAAGD als v_t en a_t TEGENGESTELD TEKEN hebben.

Gevraagd: c) De gemiddelde SNELHEID in het tijdsinterval van t = 1 ⟶ t = 3 sec.

Antwoord: $\bar{v}_{1\to 3} = \dfrac{\Delta s_{1\to 3}}{\Delta t} = \dfrac{s_3 - s_1}{2}$ m/sec.

Welnu:

$s_3 =$
$s_1 =$
———————————— −
$\Delta s_{1\to 3} =$

Dus $\bar{v}_{1\to 3} =$ ⟵ let op de eenheid.

Gevraagd d) De gemiddelde VERSNELLING in het tijdsinterval van $t = 1 \longrightarrow t = 3$.

Antwoord: $\bar{a}_{1\to 3} = \frac{\Delta v_{1\to 3}}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_1}{2}$ $^m/sec^2$.

Welnu:

$v_3 =$

$v_1 =$

$\Delta v_{1\to 3} =$

Dus $\bar{a}_{1\to 3} =$ ← let op de eenheid!

Opgave 25.

Gegeven: $a_t = 2t - 4$ $^m/sec^2$; $v_o = +4$ $^m/sec$; $s_o = 0$.

Gevraagd: a) Zal het massapunt omkeren?

Oplossing. Door "terugdifferentiëren" vinden we:

$v_t = \quad - \quad + v_o$ $^m/sec$.

$v_o = +4$ $^m/sec$.

dus $v_t = \qquad = (\quad)^2$ $^m/sec$, dus altijd

Het massapunt zal dus

Gevraagd: b) Op welk tijdstip en met welke snelheid passeert het massapunt de oorsprong?

Antwoord: $v_t =$ $^m/sec$.

Door "terug-differentiëren" vinden we:

$s_t = \quad - \quad + \quad + s_o$ meter

$s_o = 0$

Dus $s_t = \quad - \quad +$ meter.

We moeten berekenen op welk tijdstip $s_t = 0$, dus t oplossen uit de vergelijking:

$0 = \quad - \quad +$

$0 = \frac{1}{3}t\ (\underbrace{\quad - \quad + \quad}_{\text{positief definiet}})$

dus $s_t = 0$ op $t = 0$

$v_o =$ ← let op de eenheid.

§ 6. DE EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGING.

In § 3 zijn we via de bestudering van $\Delta v_{t\to t+\Delta t}$ voor rechtlijnige bewegingen met een LINEAIRE SNELHEIDSFUNCTIE gekomen tot de begrippen snelheidsverandering PER SECONDE en VERSNELLING. Het ging ons toen om te komen tot deze begrippen. In deze paragraaf gaat het ons om DE EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGINGEN ALS ZODANIG.

Punt 1)

Definitie.

Een beweging heet EENPARIG VERANDERLIJK als

$$\frac{d^2s}{dt^2}$$

op IEDER OGENBLIK DEZELFDE ALGEBRAÏSCHE WAARDE HEEFT, en dus geen functie van de tijd is.

Punt 2) Stelling. Een rechtlijnige beweging is DAN en SLECHTS DAN eenparig veranderlijk als de PLAATSFUNCTIE een VEELTERM van DE TWEEDE GRAAD IS.

Bewijs: "DAN".

Gegeven: $s_t = At^2 + Bt + C$ meter; baan recht.

Te bew.: $\frac{d^2s}{dt^2}$ is geen functie van de tijd en heeft dus op ieder ogenblik dezelfde algebraïsche waarde.

Bewijs: $v_t = \frac{ds}{dt} = 2At + B$ $^m/sec.$

$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = 2A$ $^m/sec^2.$

De versnelling is dus geen functie van de tijd en heeft dus op ieder ogenblik dezelfde waarde.

Bewijs: "SLECHTS DAN".

Gegeven: $\frac{d^2s}{dt^2}$, dus a_t, heeft op ieder ogenblik dezelfde algebraïsche waarde a $^m/sec^2$.

Te bew.: De plaatsfunctie is een veelterm van de tweede graad.

Bewijs: $a_t = a$ $^m/sec^2.$

Door "terugdifferentiëren" vinden we,

$v_t = at + v_0$ $^m/sec.$

Door v_t ook "terug te differentiëren" vinden we:

$s_t = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ meter.

Dit is een veelterm van de tweede graad in t.

Eindconclusie: Een rechtlijnige beweging is dan en slechts dan eenparig veranderlijk als DE PLAATSFUNCTIE een veelterm van de tweede graad in t is.

Opmerking. Hiermee is tevens bewezen, dat een lineaire beweging DAN en SLECHTS DAN eenparig veranderlijk is als DE SNELHEIDSFUNCTIE een LINEAIRE functie van de tijd is. (zie § 3)

Punt 3) Vraag: $s_t = at^2 + Bt + C$ meter is dus de plaatsfunctie van een eenparig veranderlijke beweging. (mits $A \neq 0$)
Welke natuurkundige betekenis hebben de coëfficienten A, B en C?

Antwoord.

$s_t = At^2 + Bt + C$ meter. (1)

$v_t = 2At + B$ $^m/sec.$ (2)

$a_t = 2A$ $^m/sec^2.$ (3)

Uit (3) volgt, dat a_t geen functie van de tijd is.
2A is dus de algebraïsche waarde van de constante versnelling. Stellen we deze voor door a, dan volgt:

$2A = a$

dus $\boxed{A = \frac{1}{2}a}$

Uit 2 volgt, dat $v_0 = B$

dus $\boxed{B = v_0}$

Uit 1 volgt, dat $s_0 = C$

dus $\boxed{C = s_0}$

Substitueren we deze gelijkheden in $s_t = At^2 + Bt + C$ meter, dan volgt:

$$\boxed{s_t = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \text{ meter}} \quad (4)$$

Deze vergelijking vinden we ook door $\frac{d^2s}{dt^2}$ twee maal achter elkaar "terug te differentiëren".

Punt 4) De vergelijking ④ is dus DE ALGEMENE GEDAANTE van de plaatsfunctie van EEN EENPARIG VERANDERLIJKE beweging.

Nemen we de oorsprong van het coördinatenstelsel langs de rechte baan zò dat $s_o = 0$ (dit zullen we in de toekomst meestal doen), dan volgt:

$$s_t = \tfrac{1}{2}at^2 + v_o t \text{ meter.}$$

Om deze vergelijking "mooier te laten klinken" verwisselt men de termen van het tweede lid.

Conclusie: Kiest men de oorsprong van het coördinatenstelsel langs de rechte baan zò dat $s_o = 0$, dan wordt iedere eenparig veranderlijke beweging beschreven door de vergelijkingen:

$$\left\| \begin{array}{ll} s_t = v_o\, t + \tfrac{1}{2}at^2 & \text{meter} \\ v_t = v_o + at & {}^{m}/\text{sec.} \end{array} \right\|$$

Deze vergelijkingen moeten onvoorwaardelijk van buiten gekend worden!

Opmerking. Het is nuttig om na te gaan of beide leden van deze vergelijkingen ONDERLING GELIJKE DIMENSIES hebben. Zou dit niet het geval zijn, dan zou dit wijzen op een fout in de vergelijkingen.

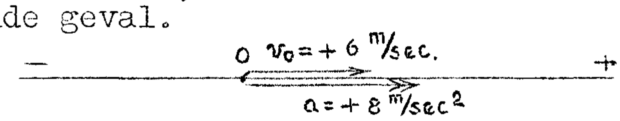
$$s_t = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{m}{sec}.\ sec + 1.\frac{m}{sec^2}\ sec^2 = m + m = meter. \quad \text{klopt!}$$

$$v_t = v_o + at = \frac{m}{sec} + \frac{m}{sec^2}.\ sec. \qquad = \frac{m}{sec} + \frac{m}{sec} = \frac{m}{sec} \quad \text{klopt!}$$

Men zou kunnen zeggen dat de dimensies gewoonweg "eisen" dat in de plaatsfunctie a vermenigvuldigd wordt met t^2, en in de snelheidsf. a vermenigvuldigd wordt met t.

Punt 5) Opgave 26.

Geval I $v_o = +6\ \frac{m}{sec}$, $a = +8\ \frac{m}{sec^2}$ Geven we, om de beginsituatie op de baan in beeld te brengen, v_o aan door ⟶ , en a door ⟶⟶ , dan hebben we dus het volgende geval.



Gevraagd: s_t en v_t

Oplossing: $s_t = v_o t + \frac{1}{2}at^2 = +6t + \frac{1}{2}.8.t^2 = +6t + 4t^2$ meter.

$v_t = v_o + at = +6 + 8t\ {}^m/sec.$

Controleer even door differentiëren.

Opmerking. Op t = 0 hebben v_o en a HETZELFDE TEKEN.
Op t = 0 is de beweging dus VERSNELD.

Daarom noemt men de beweging die door de plaatsfunctie $s_t = +6t + 4t^2$ meter beschreven wordt: EENPARIG VERSNELD.

Omdat v_o positief is, heet deze beweging eenparig versneld in positieve richting.

<u>Geval II.</u> $v_0 = +6\ ^m/sec.$
$a = -8\ ^m/sec^2.$

$-$ $a = -8\ ^m/sec^2$ 0 $v_0 = +6\ ^m/sec.$ $+$

Op $t = 0$ hebben v_0 en a tegengesteld teken.
De beweging is dus eenparig VERTRAAGD.
Omdat v_0 positief is, heet deze beweging <u>eenparig vertraagd in positieve richting.</u>

$s_t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = +6t + \frac{1}{2}(-8)t^2 = +6t - 4t^2$ meter.
$v_t = v_0 + at =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $^m/sec.$

<u>Geval III.</u> $v_0 = -6\ ^m/sec.$
$a = -8\ ^m/sec^2$

$-$ 0 $+$

v_0 en a hebben... teken; v_0 is $-$,
de beweging heet dus
in... richting.

$s_t =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ meter.
$v_t =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $^m/sec.$

<u>Geval IV.</u> $v_0 = -6\ ^m/sec.$
$a = +8\ ^m/sec^2.$

0

v_0 en a hebben... teken; v_0 is $-$,
de beweging heet dus
in... richting.

$s_t =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $\longleftarrow$ let op de eenheid
$v_t =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $\longleftarrow$ let op de eenheid

-----

Henric van Veldeke College.
Maastricht.

Punt 6) Grafische beschouwing.

Geval I. v_o + ; a +
EENPARIG VERSNELD
in + richting.

Voorbeeld:

$v_o = +2\ ^m/sec.;\ a = +1\ ^m/sec^2.$

$s_t = +2t + \frac{1}{2}t^2$ meter
$v_t = +2 + t\ ^m/sec$
$a_t = +1\ ^m/sec^2$

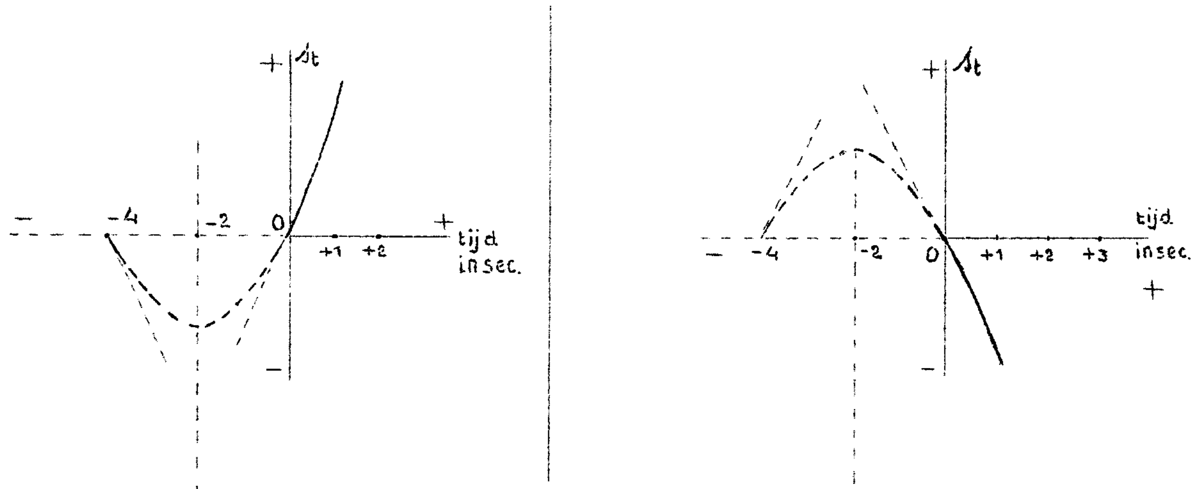
Geval III. v_o - ; a -
EENPARIG VERSNELD
in - richting.

Voorbeeld:

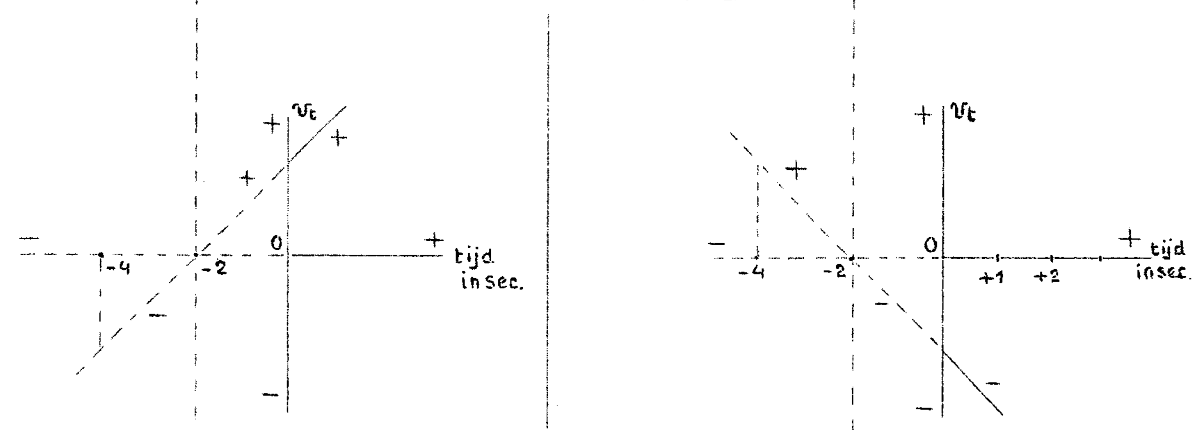
$v_o = -2\ ^m/sec.;\ a = -1\ ^m/sec^2.$

$s_t = -2t - \frac{1}{2}t^2$ meter
$v_t = -2 - t\ ^m/sec$
$a_t = -1\ ^m/sec^2$

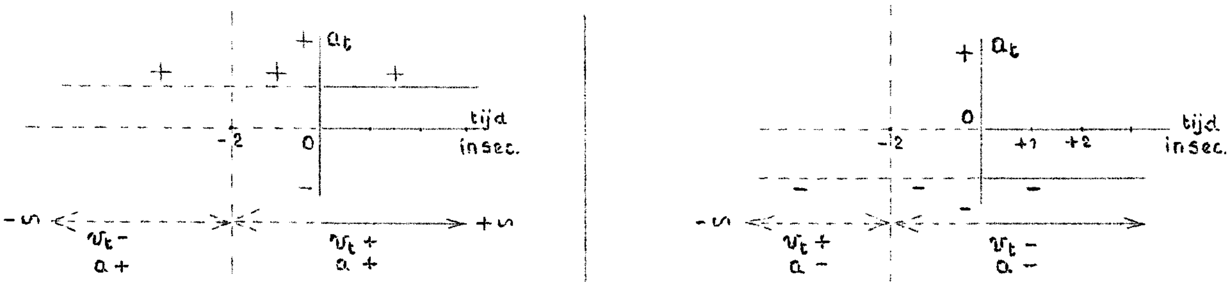
Het s - t diagram.



Het v - t diagram.



Het a - t diagram.



EENP. VERTR. in - richtin	EENP. VERSNELD in + richting	EENP. VERTR. in + richting	EENP. VERSNELD in - richting

Conclusie. 1°) Hebben v_o en a HETZELFDE TEKEN dan ligt het omkeertijdstip VÓÓR het begin van de waarneming, dus vóór t = 0.

2°) VÓÓR het omkeertijdstip EENPARIG VERTRAAGD,
NÁ het omkeertijdstip EENPARIG VERSNELD in de richting van v_o.

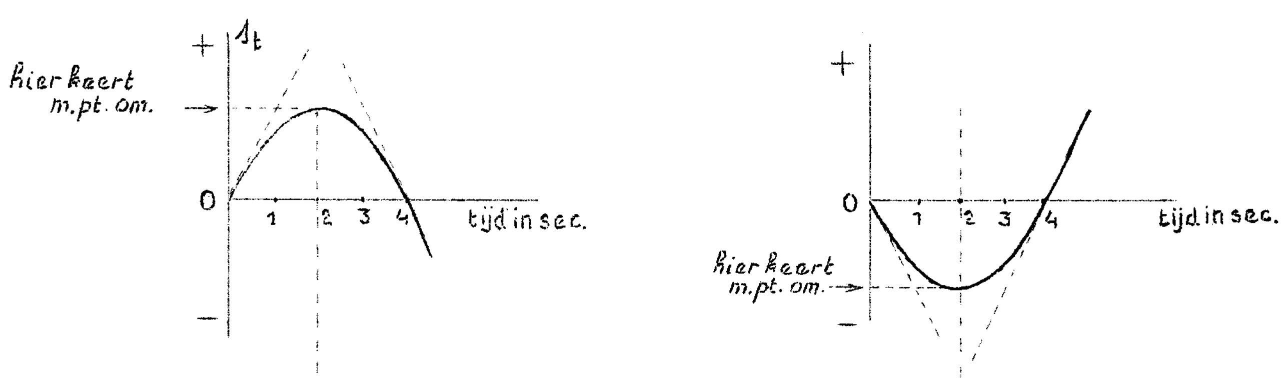
Geval II. v_0 + ; a -
EENPARIG VERTRAAGD
in + richting.

Voorbeeld:
$v_0 = + 2\ ^m/sec.;\ a = - 1\ ^m/sec^2$
$s_t = + 2t - \frac{1}{2}t^2$ meter
$v_t = + 2 - t\ ^m/sec.$
$a_t = - 1\ ^m/sec^2$

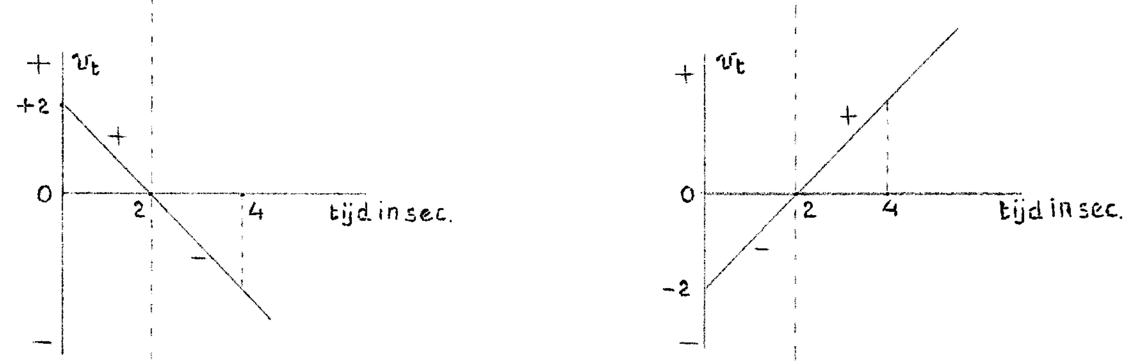
Geval IV. v_0 - ; a +
EENPARIG VERTRAAGD
in - richting.

Voorbeeld:
$v_0 = - 2\ ^m/sec.;\ a = + 1\ ^m/sec^2$
$s_t = - 2t + \frac{1}{2}t^2$ meter
$v_t = - 2 + t\ ^m/sec.$
$a_t = + 1\ ^m/sec^2$

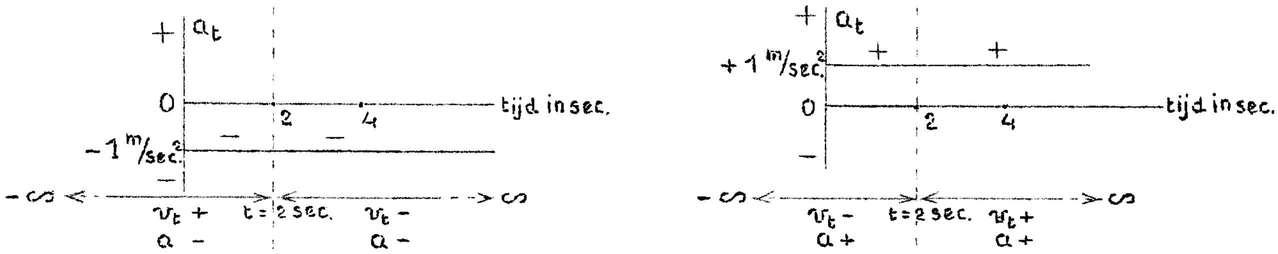
Het s - t diagram.



Het v - t diagram.



Het a - t diagram.



Eenp. VERTR. in + richting	EENP. VERSNELD in - richting	EENP. VERTR. in - richting	EENP. VERSNELD in + richting

Conclusie. 1°) Hebben v_0 en a TEGENGESTELD teken, dan ligt het omkeertijdstip nă t = 0.

2°) VÓÓR het omkeertijdstip EENPARIG VERTRAAGD in de richting van v_0,

NǍ het omkeertijdstip EENPARIG VERSNELD in de richting van a.

Uit voorgaande diagrammen trekken we de volgende ALGEMENE CONCLUSIES:

1°) De plaatsfunctie $s_t = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ meter beschrijft de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging vanaf $t = -\infty$ tot $t = +\infty$.

2°) Een eenparig veranderlijke beweging wordt versneld of vertraagd genoemd naar gelang deze versneld of vertraagd is OP HET TIJDSTIP $t = 0$:

hebben v_0 en a HETZELFDE TEKEN dan heet de beweging EENPARIG VERSNELD-,
hebben v_0 en a VERSCHILLEND TEKEN dan heet de beweging EENPARIG VERTRAAGD
IN DE RICHTING VAN Vo.

3°) Iedere eenparig veranderlijke beweging heeft een OMKEERTIJDSTIP:

hebben v_0 en a HETZELFDE TEKEN dan keert het massapunt om VÓÓR $t = 0$,
hebben v_0 en a VERSCHILLEND TEKEN dan keert het massapunt om NÁ $t = 0$.

Opmerking. Met nadruk wijzen we er op, dat de plaatsfunctie van de eenparig VERTRAAGDE beweging OOK DE BEWEGING BESCHRIJFT NADAT HET MASSAPUNT IS OMGEKEERD en zijn beweging dus EENPARIG VERSNELD geworden is.
Het is dus NOOIT nodig om een nieuwe plaatsfunctie op te stellen om de vragen te beantwoorden die betrekking hebben op de tijd nadat het massapunt is omgekeerd.

Punt 7) Voorbeeld.

Gegeven: $s_t = + 2t - \frac{1}{2}t^2$ meter (zie punt 6, geval II)

Gevraagd. 1°) Op welk tijdstip na $t = 0$ is de baancoördinaat van het massapunt -6 meter.

Oplossing.

$$-6 = +2t - \tfrac{1}{2}t^2$$
$$\text{dus } \tfrac{1}{2}t^2 - 2t - 6 = 0$$
$$t^2 - 4t - 12 = 0 \rightarrow (t - 6)(t + 2 = 0$$
$$t_1 = +6;$$
$$t_2 = -2 \quad \text{(vervalt)}$$

Conclusie: Op $t = 6$ sec. is de baancoörd. $- 6$ meter.

2°) De snelheid op dat ogenblik.

Oplossing.

$$v_t = +2 - t \ {}^{m}/sec$$
$$v_6 = +2 - 6 = -4 \ {}^{m}/sec.$$

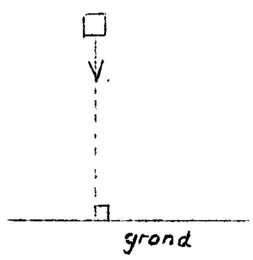
Punt 8) De eenheid van versnelling.

De versnelling wordt uitgedrukt in $^m/sec^2$.
De eenheid van lengte is dus EEN METER; de eenheid van tijdsduur EEN SECONDE.
We geven nu de officiële definitie van de eenheid van versnelling.

Definitie. De eenheid van versnelling is de versnelling van die eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging waarbij de snelheid in ieder tijdsinterval van EEN SECONDE verandert met $1\frac{m}{sec}$.

§ 7. DE VRIJE VAL.

Punt 1) Wordt een lichaam op enige hoogte boven de grond losgelaten, dan leert de ervaring dat dit lichaam niet op deze hoogte in rust blijft maar zich langs een rechte, verticale baan naar de grond toe beweegt.



De oorzaak van deze vrije val is het feit, dat de aarde op alle aardse lichamen een verticaal naar het aardoppervlak toe gerichte kracht uitoefent.
Deze trekkracht noemt men de zwaartekracht, dus de kracht die ons de indruk geeft dat het lichaam "zwaarte" heeft.
Bij de behandeling van de z.g. GRAVITATIEWET van Newton zullen we zien waarom de zwaartekracht voor eenzelfde lichaam op de aardpolen groter is dan op de evenaar.
Nauwkeurige metingen wijzen uit, dat op een bepaalde plaats ter aarde de zwaartekracht voor eenzelfde lichaam afneemt bij stijgende hoogte van het lichaam boven het aardoppervlak. Deze afname van de zwaartekracht speelt een rol in de RUIMTE-VAART: In de situaties van de vrije-val-problemen waar we ons voorlopig mee bezig zullen houden is deze afname van de zwaartekracht met stijgende hoogte te verwaarlozen klein. We nemen dan ook, althans voorlopig, zonder meer aan, dat de zwaartekracht voor een lichaam op een bepaalde plaats ter aarde onafhankelijk is van de hoogte waarop het lichaam zich boven het aardoppervlak bevindt.

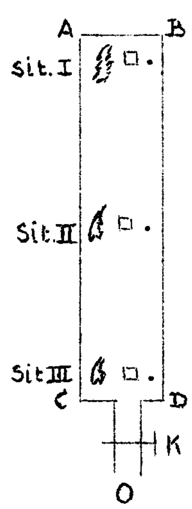
Punt 2) We beschouwen nu het geval dat een lichaam IN HET VACUUM op enige hoogte boven de grond wordt losgelaten. In dit geval werkt er tijdens de vrije val op dit lichaam slechts ÉÉN kracht, de zwaartekracht.
Volgens de hypothese van Newton is een kracht de oorzaak van een VERSNELLING. Blijft de kracht constant, dan blijft de versnelling ook constant.

> Conclusie. De vrije val is een rechtlijnige beweging MET EEN CONSTANTE VERSNELLING.
>
> m.a.w. de vrije val is een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING.

Benaming: Deze constante versnelling noemt men de VALVERSNELLING.

Punt 3) Stelling: Op eenzelfde plaats ter aarde hebben ALLE lichamen ongeacht hun zwaarte DEZELFDE VALVERSNELLING.
NB.

Bewijs. Door de proef met de z.g. VALBUIS.



Nevenstaande figuur geeft een schematisch beeld van de valbuis. De opening O wordt aangesloten op een vacuumpomp. Nadat de buis vacuum gepompt is, gaat de kraan K dicht en maakt men O vrij van de pomp, zodat de buis daarna naar believen kan gedraaid worden.
In de buis bevinden zich diverse voorwerpen van verschillend gewicht b.v. een veer, een ijzeren blokje en een harskorreltje.
Men houdt de buis nu eerst in een verticale stand zò dat de bodem AB onder is en de voorwerpen dus op de bodem liggen. Daarna draait men de buis om, zodat de bodem AB boven komt. Gedurende een infinitesimaal klein tijdsinterval bevinden de voorwerpen zich dus in de situatie I waarin ze zonder beginsnelheid beginnen te vallen. Het blijkt nu dat deze voorwerpen tijdens hun val in het vacuüm OP ONDERLING GELIJKE HOOGTEN blijven (situatie II) en GELIJKTIJDIG op CD aankomen (situatie III)
Hieruit moeten we besluiten dat voor elk van deze voorwerpen de valbeweging DOOR DEZELFDE PLAATSFUNCTIE BESCHREVEN WORDT.

Deze luidt:

$$s_t = \tfrac{1}{2}\ (\text{de valversnelling v.h. voorw.}).t^2\ \text{meter}$$

Volgens de proef is het rechterlid van deze vergelijking onafhankelijk van de zwaarte of een andere eigenschap van het voorwerp.
Dus moeten alle voorwerpen in het vacuum DEZELFDE VALVERSNELLING hebben.

<u>CONCLUSIE.</u> Op eenzelfde plaats ter aarde hebben ALLE lichamen IN HET VACUUM DEZELFDE VALVERSNELLING.

<u>Opmerking</u> a) Is de valbuis NIET VACUUM, dan komen de verschillende voorwerpen NIET tegelijk op CD aan.
Dit heeft TWEE oorzaken:

1°) De voorwerpen ondervinden verschillende opwaartse archimedes-krachten van de lucht,

2°) de voorwerpen ondervinden verschillende (wrijvings) weerstanden met de lucht.

b) Ook als de buis niet vacuum is WIL de zwaartekracht op eenzelfde plaats op aarde aan alle lichamen dezelfde valversnelling geven.

<u>NB</u> c) <u>ALS NIET HET TEGENDEEL UITDRUKKELIJK VERMELD WORDT, ZULLEN WE IN HET KOMENDE EN OOK IN DE SOMMEN ALTIJD AANNEMEN DAT DE AARDE GEEN ATMOSFEER HEEFT</u> en dat dus alle bewegingen boven het aardoppervlak IN HET VACUUM plaats hebben.

Punt 4) <u>De grootte van de valversnelling op een bepaalde plaats ter aarde.</u>

In de trillingsleer zullen we bij de behandeling van de slingerbeweging een methode leren kennen om de valversnelling op een bepaalde plaats ter aarde te bepalen.

<u>Notatie.</u> De valversnelling wordt aangeduid door de letter g.

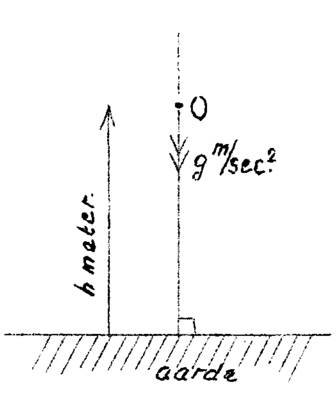
<u>Uitkomsten.</u>

$$g_{\text{Delft}} = 9{,}812\ ^{m}/\text{sec}^2.$$

$$g_{\text{Parijs}} = 9{,}800\ ^{m}/\text{sec}^2.$$

<u>Opmerking.</u> In de sommen wordt de valversnelling vaak afgerond op 10 $^{m}/\text{sec}^2$.

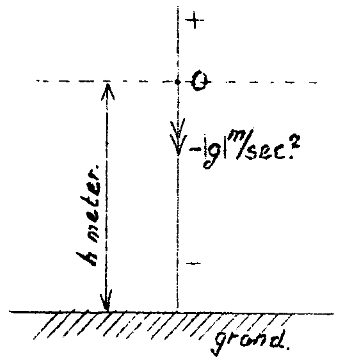
unt 5) <u>De plaatsfunctie van een vrij vallend massapunt.</u>



Een massapunt wordt op een hoogte van h meter boven de grond losgelaten.
Het valt dus ZONDER BEGINSNELHEID en krijgt dus een eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid. De valversnelling is g $^{m}/\text{sec}^2$.

<u>Gevraagd: De plaatsfunctie van de vrije val.</u>

<u>Oplossing.</u> Is O het punt waarin het massapunt zich bevindt als het wordt losgelaten, dan zal het dus vallen langs de verticaal door O.
Deze verticaal is dus de baan waarlangs het massapunt beweegt.
We moeten ons nu even beraden over het coördinatenstelsel langs deze baan.
We kiezen natuurlijk O tot oorsprong. De vraag is nu: welke richting kiezen we als de positieve, die naar de aarde <u>toe</u> of die van de aarde af?
In verband met de latere sommen over de kogelbaan doen we er goed aan om EENS EN VOOR ALTIJD af te spreken, <u>dat we de naar "de hemel" wijzende richting POSITIEF en de naar "de hel" wijzende richting NEGATIEF zullen rekenen.</u>



De valversnelling is dus altijd NEGATIEF gericht.

Om de gevraagde plaatsfunctie te vinden moeten we dus de algemene plaatsfunctie van de eenparig veranderlijke beweging

$$s_t = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2 \text{ meter}$$

invullen voor het geval dat $v_o = 0$ en $a = -|g|\ ^m/sec^2$.
($a = -|g|\ ^m/sec^2$: omdat de valversnelling negatief gericht is!)
De plaatsfunctie van de beschouwde valbeweging wordt dus:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_t = -\tfrac{1}{2}|g|t^2 \text{ meter} \\ \text{en } v_t = -|g|t\ ^m/sec. \end{array}}$$

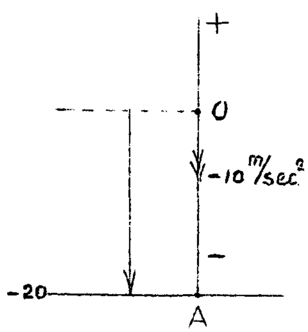
Punt 6) Getallenvoorbeeld.

Gegeven. Een steen valt van een hoogte van 20 meter; $g = 10\ ^m/sec^2$

Gevraagd 1°) Na hoeveel seconden en met welke snelheid bereikt deze steen de grond.

Oplossing. De plaatsfunctie van de valbeweging luidt:

$$s_t = -\tfrac{1}{2}.10.t^2 = -5t^2 \text{ meter.}$$
$$\text{en } v_t = \quad = -10\ ^m/sec.$$



Het massapunt (i.c. de steen) bereikt de grond als het in A aankomt.

NB DE BAANCOÖRDINAAT VAN PUNT A IS - 20 meter.
(Let wel, MIN twintig)

Dus:
$$-20 = -5t^2$$
$$t^2 = 4$$
$$t = +2 \text{ sec.}$$ (-2 sec. heeft geen betekenis.)

Het massapunt bereikt dus de grond 2 sec. nadat dit in 0 werd losgelaten.
De trefsnelheid met de grond is:

$$v_2 = -10.2 = -20\ ^m/sec.$$

Het - teken geeft aan, dat de snelheid naar de grond TOE gericht is.

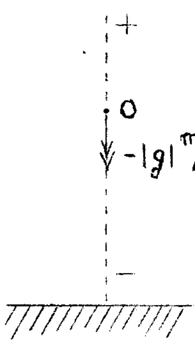
Gevraagd 2°) Zouden de uitkomsten anders geweest zijn als de steen b.v. 2 x zo zwaar geweest was?

Antwoord. NEE, want de valversnelling hangt NIET af van het gewicht!!

Punt 7) Algemeen: DE VERTICALE BEWEGING o.i.v. DE ZWAARTEKRACHT ALLEEN.

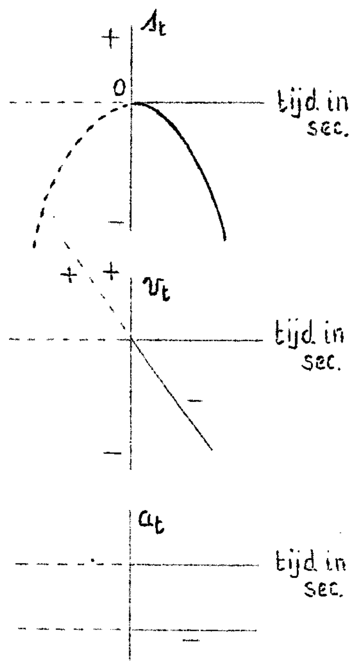
We beschouwen nu niet alleen het geval dat een massapunt VRIJ VALT, d.w.z. valt zonder beginsnelheid, maar ook de gevallen dat een massapunt verticaal omhoog of omlaag GEWORPEN wordt, waarbij dus een uitwendige oorzaak AAN HET MASSAPUNT EEN BEGINSNELHEID GEEFT DIE VERTICAAL NAAR BOVEN OF NAAR BENEDEN GERICHT IS.

Geval I $v_o = 0$

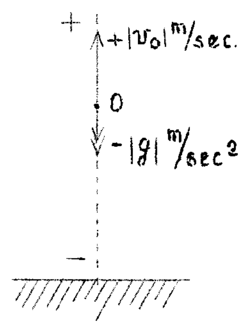


Vrije val.

$s_t = -\frac{1}{2}|g|t^2$ meter
$v_t = -|g|t$ m/sec.

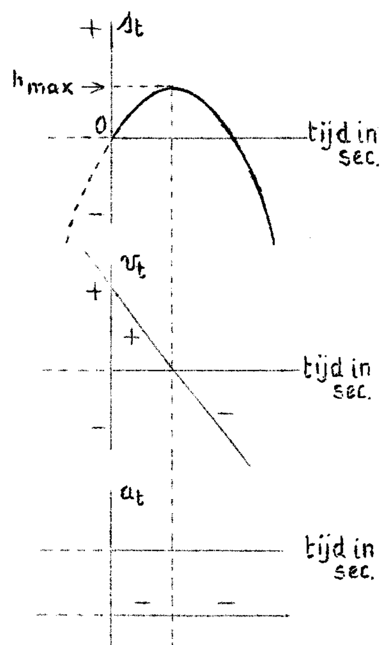


Geval II $v_o \uparrow$

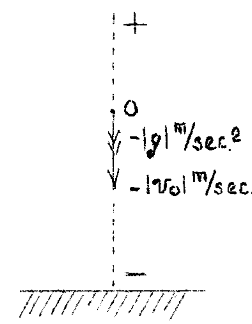


"Val", met naar BOVEN gerichte beginsnelheid.

$s_t = +|v_o|t - \frac{1}{2}|g|t^2$ m.
$v_t = +|v_o| - |g|t$ m/s

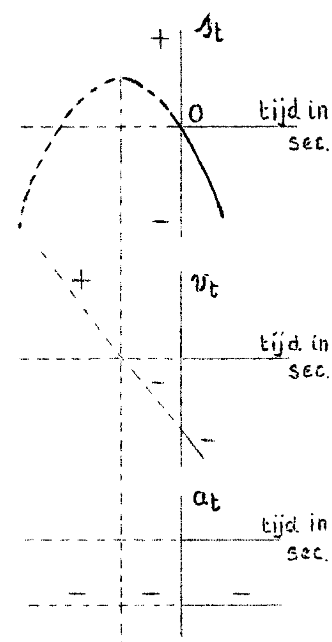


Geval III $v_o \downarrow$



"Val", met naar BENEDEN gerichte beginsnelheid.

$s_t = -|v_o|t - \frac{1}{2}|g|t^2$ m.
$v_t = -|v_o| - |g|t$ m/s.



Punt 8) Opgave 27.

Gegeven. Een massapunt wordt op een hoogte van 625 meter boven de grond verticaal omhoog geworpen met een beginsnelheid van 100 m/sec.
De valversnelling is 10 m/sec².

Gevraagd 1°) De plaatsfunctie en de snelheidsfunctie.

Oplossing.

$s_t = v_o t + \frac{1}{2}at^2$ meter

$v_o = +100$ m/sec. $\qquad s_t = +100t - 5t^2$ m.

$a = -10$ m/sec². $\qquad v_t = +100 - 10t$ m/s.

Gevraagd 2°) Na hoeveel seconden bereikt het massapunt de grootste hoogte?

Oplossing.

De grootste hoogte wordt bereikt op het ogenblik dat het massapunt omkeert, dus als $v_t = 0$.

dus 0 = $\qquad\qquad \rightarrow$ t = $\qquad$ sec.

Gevraagd. 3°) Hoe hoog is het massapunt dan?

Oplossing. We vinden h_{max} door het omkeertijdstip te substitueren in de plaatsfunctie,

dus h_{max} = = ______ meter.

Gevraagd. 4°) Na hoeveel seconden passeert het massapunt opnieuw de oorsprong?

Oplossing. Het massapunt passeert de oorsprong als $s_t = 0$

dus $0 =$

$0 = t(\qquad)$

$t_1 = 0$(vervalt)

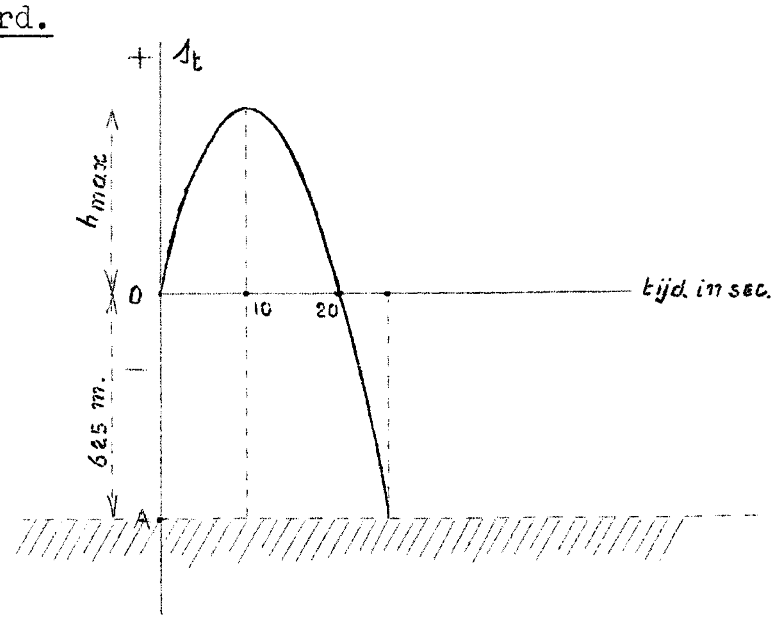
$t_2 =$ sec.

Gevraagd. 5°) Wat valt er te zeggen van de stijgtijd en de valtijd?

Antwoord. De tijd die het massapunt nodig heeft om van 0 naar het hoogste punt te gaan is gelijk aan de tijd die het massapunt nodig heeft om van het hoogste punt in 0 terug te keren.
Dus: stijgtijd = valtijd.

Gevraagd. 6°) Wijs deze tijden aan in het s - t diagram.

Antwoord.

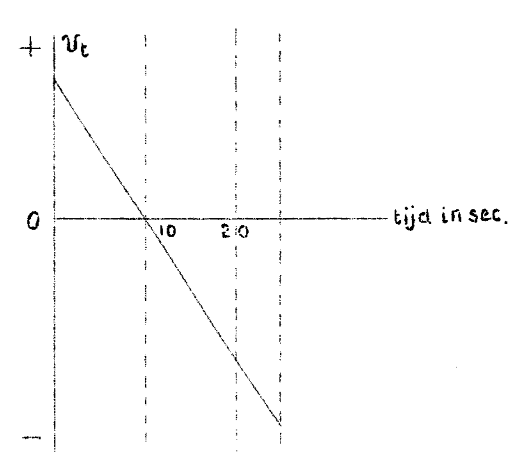


Gevraagd. 7°) Met welke snelheid passeert het massapunt de oorsprong?

Oplossing. Dan moeten we t_2 (zie vr. 4) substitueren in de snelheids-functie.

$v_{...}$ = = ______ m/sec.

Gevraagd. 8°) Wijs deze snelheid aan in het v - t diagram.



Opmerking. Uit het v-t diagram volgt meetkundig, dat de snelheid waarmee het massapunt de oorsprong opnieuw passeert gelijk en...
...

<u>Gevraagd.</u> 8) <u>Na hoeveel seconden bereikt het massapunt de grond?</u>

<u>Oplossing.</u> De baancoördinaat van het punt A (zie s-t diagram) is - 625 meter (zegge: MIN !!)
Het massapunt treft de grond dus op het tijdstip s_t = - 625 meter.

Dus: $- 625 = + 100\ t - 5t^2$.

dus $5t^2 - 100t - 625 = 0$

$t^2 - 20t - 125 = 0$

$(\qquad)(\qquad) = 0$

$t_3 = + \qquad$ sec.

$t_4 = - \qquad$ sec. (vervalt)

Het massapunt bereikt de grond dus   sec. nadat het uit O werd opgeschoten.

<u>Gevraagd.</u> 9) <u>Met welke snelheid treft het massapunt de grond?</u>

<u>Oplossing.</u> Dan moeten we t_3 substitueren in de snelheidsfunctie

$v_{...} = 100 - \qquad = \underline{\qquad}\ ^m/sec.$

Het - teken geeft aan dat de trefsnelheid met de grond   gericht is.

<u>Gevraagd.</u>10) <u>Wijs deze trefsnelheid aan in het v - t diagram.</u>

Hoofdstuk II. HET SAMENSTELLEN VAN RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.

Deel A. VECTOR REKENING.

§ 1. Het begrip VECTOR.

Punt 1) Eerst een voorbeeld.

In het vorige hoofdstuk hebben we o.a. gehandeld over de snelheid van een massapunt op een bepaald ogenblik bij een rechtlijnige beweging.
Over deze snelheid stellen we ons enige vragen.

Vraag 1) Is het mogelijk dat een massapunt op een bepaald ogenblik een bepaalde snelheid heeft ZONDER DAT DIE SNELHEID EEN RICHTING HEEFT?

Antwoord. Dit is zeer beslist ONMOGELIJK. Het begrip "snelheid van een massapunt op een bepaald ogenblik" HOUDT IMMERS IN, dat het beschouwde massapunt op het beschouwde ogenblik BEZIG IS met ZICH ERGENS NAAR TOE TE BEWEGEN. Een snelheid ZONDER RICHTING is zelfs niet DENKBAAR.

CONCLUSIE. EEN SNELHEID HEEFT ALTIJD EEN RICHTING.

Vraag 2) a) Is de snelheid van een massapunt bepaald als we zeggen hoeveel m/sec. deze snelheid op het beschouwde ogenblik groot is?

Antwoord. Nee, we moeten er bij zeggen IN WELKE RICHTING het massapunt op het beschouwde ogenblik beweegt. Een snelheid heeft immers altijd een richting; zolang deze richting niet bekend is, is nog een wezenlijke hoedanigheid van de snelheid onbepaald.

b) Is de snelheid van een massapunt bepaald als we zeggen IN WELKE RICHTING het massapunt op het beschouwde ogenblik beweegt?

Antwoord. Natuurlijk niet! We moeten ook de GROOTTE weten!

CONCLUSIE. DE SNELHEID VAN EEN MASSAPUNT OP EEN BEPAALD TIJDSTIP
IS DAN EN SLECHTS DAN
EXACT BEPAALD, ALS

NB. ÈN DE GROOTTE
NB. ÈN DE RICHTING VAN DE SNELHEID
BEPAALD ZIJN.

Punt 2) Algemeen.

De snelheid is dus EEN ACTIVITEIT-IN-EEN-BEPAALDE-RICHTING.

In de mechanica en de verdere natuurkunde zullen we tal van grootheden ontmoeten die een activiteit-IN-EEN-BEPAALDE-RICHTING voorstellen: b.v. een versnelling, een kracht, de electrische veldsterkte in een punt van een electrisch veld, enz. enz.

Welnu: GROOTHEDEN DIE EEN ACTIVITEIT-IN-EEN-BEPAALDE-RICHTING VOORSTELLEN NOEMT MEN
V E C T O R E N.

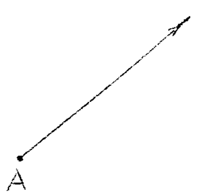
De werkzaamheid van deze grootheden, de vectoren, wordt dus niet alleen bepaald door de hoedanigheid van hun GROOTTE, maar ook door de hoedanigheid van hun RICHTING.

Definitie: EEN VECTOR is een grootheid die bepaald wordt door
EEN GROOTTE
ÈN
EEN RICHTING.

Opmerking. In de eerste ronde hebben we grootheden leren kennen waarvan de activiteit geheel en alleen bepaald wordt door de hoedanigheid van de grootte, b.v. de warmtecapaciteit van een lichaam. Is deze b.v. 45 $\frac{cal}{^0C}$ dan is de natuurkundige werkzaamheid van dat lichaam bij een warmteuitwisselingsproces volledig bepaald: het lichaam neemt PER GRAAD verwarming 45 calorieën op.
Een grootheid waarvan de natuurkundige activiteit geheel en alleen bepaald wordt door de hoedanigheid van de GROOTTE, noemt men een SCALAIRE GROOTHEID, of kortweg een SCALAIR.
Andere voorbeelden van scalaire grootheden zijn: de temperatuur, de soortelijke warmte van een stof, de lichtsterkte, de frequentie van een trilling enz. enz.
In de natuurkunde komen dus twee (maar ook slechts twee) soorten grootheden voor, n.l.:

SCALAIRE GROOTHEDEN	VECTOREN
Deze worden bepaald door ÉÉN en slechts èèn hoedanigheid, n.l. DE GROOTTE	Deze worden bepaald door TWEE hoedanigheden: 1°) DE GROOTTE en 2°) DE RICHTING.

Punt 3) Notaties. Een VECTOR wordt IN EEN FIGUUR aangeduid door EEN PIJL.



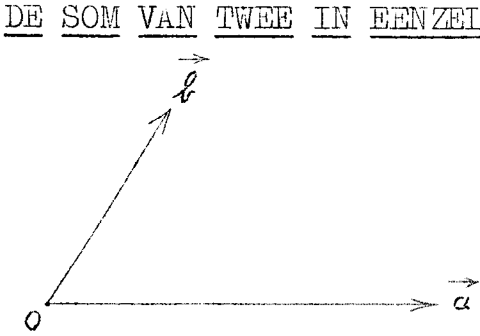
De lengte van de pijl stelt de GROOTTE van de vector voor.
De richting van de pijl geeft de RICHTING van de vector aan.
Het punt A (zie fig.) noemt men het beginpunt of het aangrijpingspunt van de vector.
$\vec{a}$ IN DE TEKST wordt een vector aangeduid door een letter MET EEN PIJL ERBOVEN.
Voor $\vec{a}$ leest men dan "VECTOR a".

Bedoelt men in de tekst ALLEEN DE GROOTTE van de vector aan te geven dan schrijft men a zonder vector-teken.

> N.B. Als in een som gevraagd wordt een vector te bepalen MOET MEN ALTIJD TWEE DINGEN BEPALEN:
>
> 1°) DE GROOTTE van de vector
>
> 2°) DE RICHTING van de vector.

Punt 4) De bedoeling van de volgende paragrafen.
Vectorrekening is, populair gezegd, een "PIJLEN-WISKUNDE": het is een soort WISKUNDE waarbij pijlen de plaats van getallen innemen. Voorlopig is dit voor ons alleen maar een "denk-spel". Later zal ons de zin daarvan duidelijk worden. Historisch is het natuurlijk net omgekeerd gegaan: uit de ervaring opgedaan bij het werken met vectorgrootheden, bleek dat de gedragingen van deze grootheden gemakkelijker te beschrijven waren met behulp van een speciaal soort wiskunde, die de naam VECTORREKENING kreeg.

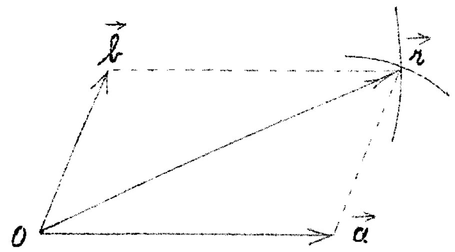
§2. DE SOM VAN TWEE IN EENZELFDE PUNT AANGRIJPENDE VECTOREN.



$\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn twee vectoren die beiden in O aangrijpen.
We vragen nu naar de SOM van deze vectoren.
Tot nu toe is ons nog geen enkel natuurkundig feit bekend waar we het antwoord op deze vraag uit zouden kunnen afleiden. Voorlopig is het antwoord op deze vraag voor ons alleen maar "een afspraak" of "een spel-regel". We moeten dus nu niet naar het "waarom" vragen, maar er even op vertrouwen dat deze "afspraak" later voor ons WERKELIJKHEIDS-ZIN zal krijgen.

Definitie. Onder DE SOM van de in eenzelfde punt O aangrijpende vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ verstaat men
DE VECTOR
die vanuit het gemeenschappelijk aangrijpingspunt O WIJST NAAR- EN REIKT TOT
HET VIERDE HOEKPUNT VAN HET PARALLELOGRAM
DAT DE VECTOREN $\vec{a}$ en $\vec{b}$ TOT ZIJDEN HEEFT.

CONSTRUCTIE.



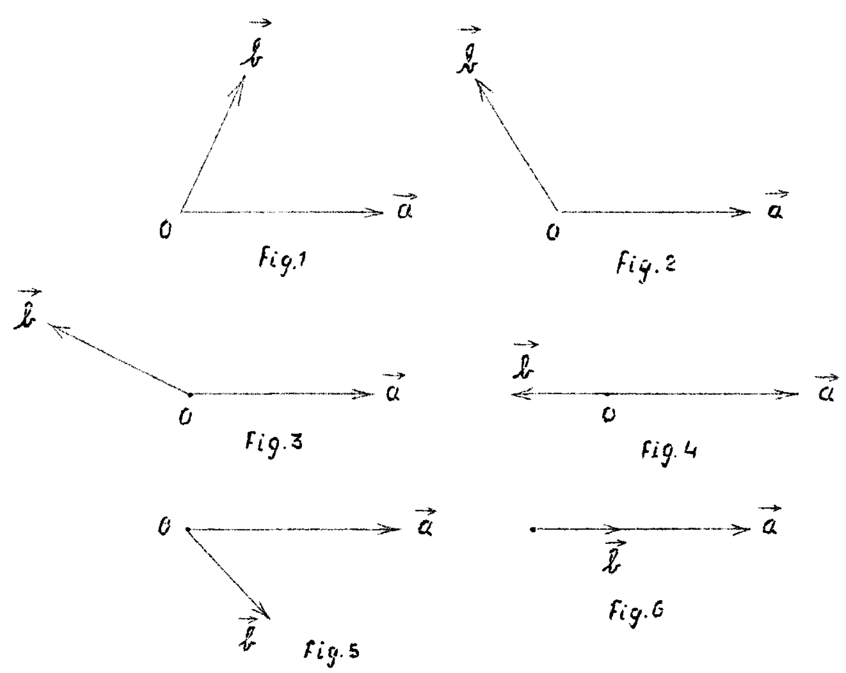
VECTOR $\vec{r}$ is PER DEFINITIE
DE SOM
VAN DE VECTOREN $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

NOTATIE. $\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}}$

BENAMING. Vector $\vec{r}$ noemt men
DE VECTORSOM
of DE SOMVECTOR
of DE RESULTANTE van vector $\vec{a}$ en vector $\vec{b}$.

Opmerking. We hebben hier dus een voor ons geheel nieuw , nu MEETKUNDIG SOM-BEGRIP.
Met nadruk wijzen we er op, dat het bepalen van de vectorsom dus een MEETKUNDIG PROBLEEM is.

Opgave 28. Bepaal in elk van de volgende gevallen de vectorsom.



Discussie bij opgave 28.

bij fig. 3: De grootte van de vectorsom kan kleiner zijn dan elk der gegeven vectoren. Hieruit blijkt wel heel duidelijk, dat we nu te doen hebben met een geheel nieuw som-begrip.

bij fig. 4: De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ liggen op eenzelfde lijn maar zijn TEGENGESTELD GERICHT.
De vectorsom heeft nu de volgende bijzonderheden:

zie blz. 58.

1°) De vectorsom valt langs dezelfde lijn,

2°) Wijst in de richting van de grootste van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en is

3°) in grootte gelijk aan het REKENKUNDIGE VERSCHIL van de grootten van de gegeven vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

bij fig. 6: De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ liggen op eenzelfde lijn en zijn GELIJK GERICHT.
De vectorsom heeft nu de volgende bijzonderheden:

1°) De vectorsom valt langs dezelfde lijn.

2°) wijst in dezelfde richting als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en is

3°) in grootte gelijk aan de rekenkundige som van de grootten van deze vectoren.

Nadere beschouwing van de gevallen fig. 4 en fig. 6.

$-$ ——————•—————— $+$
0

De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ liggen dus op eenzelfde lijn.

In dit geval kunnen we aan de GROOTTE van een vector EEN TEKEN TOE KENNEN: + als de vector naar rechts wijst,
\- als de vector naar links wijst.

Doen we dit, dan kunnen we de gevallen 4 en 6 samenvatten in èèn ALGEBRAISCHE formule:

$$\boxed{r = a + b}$$

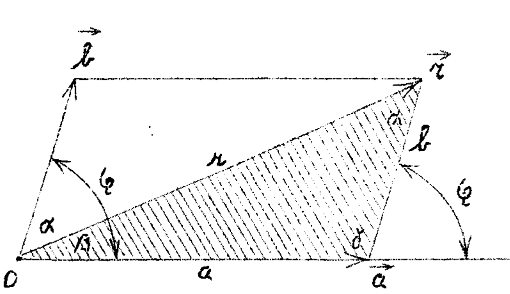
Conclusie I. In de gevallen dat de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op eenzelfde lijn liggen, kan de bepaling van de vectorsom $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ herleid worden TOT EEN ALGEBRAÏSCH PROBLEEM.

Conclusie II. Het ALGEBRAISCHE SOM-BEGRIP is EEN BIJZONDER GEVAL van het VECTORIELE SOM-BEGRIP.

§ 3. Het berekenen van de grootte en de richting van de vectorsom.

Gegeven: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\angle\varphi$

Gevraagd: $\vec{r}$, dus
1°) de grootte, r
2°) de richting, $\angle\alpha$ of $\angle\beta$



Oplossing. 1°) De grootte.

In de gearceerde driehoek passen we de cosinusregel toe op de zijde tegenover de bekende hoek.

$\angle\gamma = 180^0 - \varphi$, dus bekend.

dus $r^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma$.

Maar $\cos\gamma = \cos(180 - \varphi) = -\cos\varphi$

Dus $r^2 = a^2 + b^2 + 2a.b.\cos\varphi$

Dus
$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}}$$

Vraag. Moet hier niet staan $r = \pm\sqrt{\quad}$?

Antwoord. Noch het + teken, noch het - teken heeft hier een natuurkundige betekenis. De cosinusregel geeft ons alleen uitsluitsel over de GROOTTE van de

somvector $\vec{r}$, en de grootte is slechts een getal van de REKENKUNDIGE getallenreeks.
+ of - zou een richting aanduiden. Maar de cosinusregel houdt geen richting afspraak in!

Oplossing 2°) De richting.
In de gearceerde driehoek passen we de sinusregel toe.

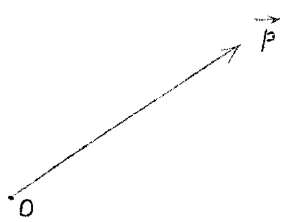
$$\frac{r}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Hieruit volgt $\sin\beta$. Met behulp van een log. tafel kunnen we dan de waarde van β benaderen.

Opmerking. Bij de bepaling van de grootte van $\vec{r}$ moet de cosinusregel altijd toegepast worden OP DE ZIJDE TEGENOVER DE BEKENDE HOEK. Is b.v. $\angle\beta$ gegeven, dan moet de cosinusregel toegepast worden op zijde b.

$$b^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos.\beta .$$

§ 4. Het ONTBINDEN van een vector.

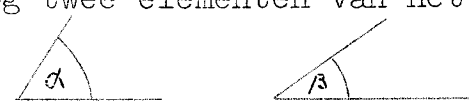


Gegeven: Een vector $\vec{p}$.

Gevraagd: Construeer twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zò dat $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$.

Oplossing: Als er niet mèèr gegeven is, heeft dit probleem (oneindig)^2 veel oplossingen, want meetkundig vertaald luidt de vraag: Contrueer een parallelogram als de diagonaal van dat parallelogram gegeven is. Er moeten dus nog twee elementen van het te construeren parallelogram gegeven zijn.

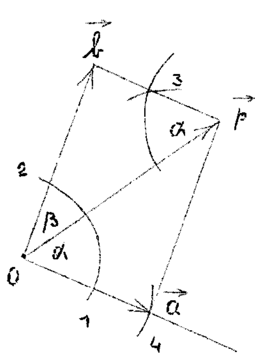
b.v. Gegeven: $\vec{p}$, $\angle\alpha$ en $\angle\beta$.



Gevraagd: Construeer de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ die met vector p resp. de hoeken α en β maken, zò dat

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Constructie.



Volg de nummers.

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\angle(\vec{p},\vec{a}) = \alpha \;;\quad \angle(\vec{p},\vec{b}) = \beta .$$

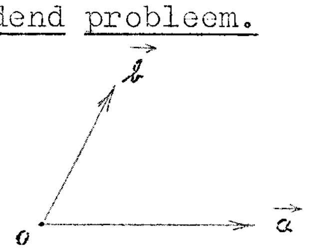
Conclusie: $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn de gevraagde vectoren.

Benaming. We zeggen nu DAT WE DE VECTOR $\vec{p}$ HEBBEN O N T B O N D E N IN DE VECTOREN $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ heten COMPONENTEN van vector $\vec{p}$.

Conclusie. Men kan een vector op (oneindig)^2 veel manieren ontbinden in twee componenten.

§ 5. Het VERSCHIL van twee vectoren.

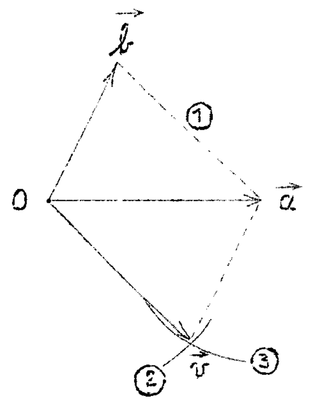
Punt 1) Inleidend probleem.



Gegeven: Twee in eenzelfde punt aangrijpende vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Gevraagd: De vector $\vec{a}$ zò te ontbinden in twee componenten, dat vector $\vec{b}$ èèn component wordt.

Constructie:



Constructie.

We moeten dus het parallelogram construeren WAARVAN VECTOR $\vec{a}$ DE DIAGONAAL DOOR 0 en vector $\vec{b}$ een zijde is.

Deze constructie is in nevenstaande figuur uitgevoerd. (volg de nummers)

Vector $\vec{v}$ is de andere component:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{v}.$$

Punt 2) De definitie van $\vec{a} - \vec{b}$.

In bovenstaande figuur is vector $\vec{v}$ dus de vector DIE WE BIJ VECTOR $\vec{b}$ MOETEN OPTELLEN OM DE VECTOR $\vec{a}$ TOT RESULTANTE TE KRIJGEN. ANALOOG AAN HET TAALGEBRUIK IN DE REKENKUNDE ZEGT MEN NU DAT:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{v}$$

Immers $7 - 4 = 3$ wil zeggen, dat 3 het getal is dat we bij 4 moeten optellen om 7 tot uitkomst te krijgen.
Analoog hieraan is $\vec{v}$ de vector die we bij $\vec{b}$ moeten optellen om $\vec{a}$ tot resultante te krijgen.

Men noemt vector $\vec{v}$ HET VERSCHIL van vector $\vec{a}$ en vector $\vec{b}$.

> DEFINITIE. Onder het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ verstaat men DE VECTOR die men
> BIJ VECTOR $\vec{b}$ MOET OPTELLEN
> OM
> VECTOR $\vec{a}$ TOT RESULTANTE TE KRIJGEN.

N.B. Als $\vec{a} - \vec{b} = \vec{v}$, dan is de eerstgenoemde vector van het verschil, dus $\vec{a}$, de DIAGONAAL van het parallelogram waarvan $\vec{b}$ en $\vec{v}$ de zijden zijn.

Vraag: Bestaat er verschil tussen $\vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{b} - \vec{a}$?

Antwoord.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{v}$$

Dus a is DE DIAGONAAL van het parallelogram.

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{v}$$

Dus b is DE DIAGONAAL van het parallelogram.

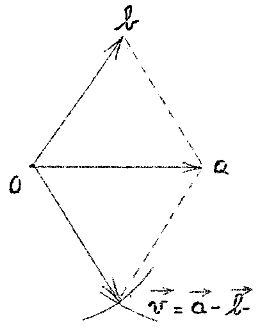


fig. 1

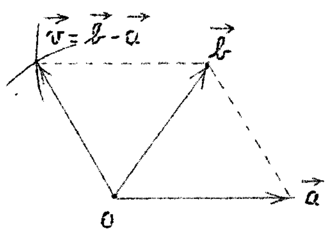


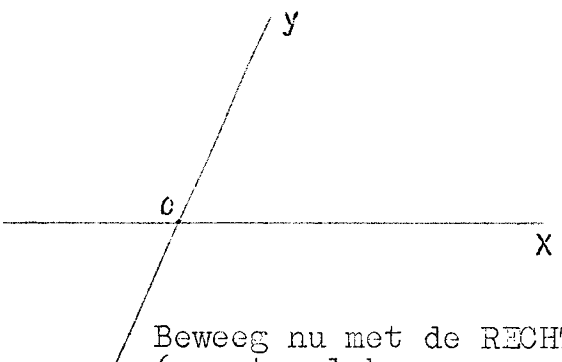
fig. 2

Uit fig. 1 en fig. 2 volgt, dat de vectoren $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ DEZELFDE GROOTTE hebben, maar TEGENGESTELD GERICHT zijn.

D E E L B. HET BEGRIP: SAMENSTELLEN VAN RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.

Punt 1) Vraag: IS HET MOGELIJK dat een massapunt TEGELIJKERTIJD deelneemt aan TWEE in een zelfde vlak gelegen, onderling onafhankelijke rechtlijnige bewegingen? Zo ja, wat gebeurt er dan?

Antw.: Of dit mogelijk is kan ieder voor zichzelf ervaren bij de volgende proef:

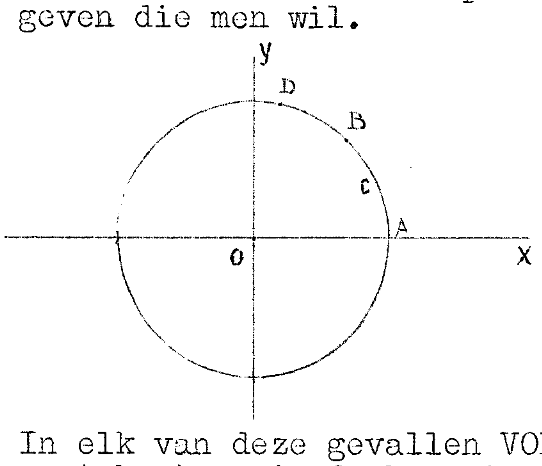


In nevenstaande figuur stelt O de oorsprong voor van een coördinatenstelsel en de lijnen OX en OY de coördinaat-assen. We nemen hier een algemener geval dan we in de wiskunde gewend zijn, n.l. het geval dat de coord.-assen niet loodrecht op elkaar staan.
Leg nu een latje langs de x-as en plaats op het latje een merkteken op de plaats van O.
Beweeg nu met de RECHTER hand een potloodpunt WILLEKEURIG (eventueel heen en weer) langs het latje en beweeg TEGELIJKERTIJD MET DE LINKER hand het latje willekeurig (eventueel heen en weer) maar zò dat het latje steeds evenwijdig blijft aan de x-as en het merkteken op het latje steeds op de y-as blijft.
DE RECHTERHAND VEROORZAAKT DUS EEN BEWEGING VAN DE POTLOODPUNT IN DE X-RICHTING, DE LINKERHAND EEN BEWEGING IN DE Y-RICHTING: DE POTLOODPUNT ZELF NEEMT DUS DEEL AAN T W E E RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.
HET RESULTAAT is, dat de potloodpunt IN HET X-O-Y-VLAK een mogelijk zeer grillige baan beschrijft.

CONCLUSIE.	Het is mogelijk dat een massapunt TEGELIJKERTIJD deelneemt aan TWEE in èènzelfde vlak gelegen, onderling onafhankelijke rechtlijnige bewegingen. In dat geval beschrijft het massapunt een zekere baan IN DIT PLATTE VLAK.

Voortzetting van de proef.

Men kan de baan van de potloodpunt in het X-O-Y-vlak iedere vorm geven die men wil.



In nevenstaande figuur staan de coörd. assen loodrecht op elkaar.
We herhalen nu de proef met het latje, maar richten het daarbij zò in, dat de potloodpunt de getekende cirkelomtrek beschrijft.
Maar dat kan nog geheel willekeurig, b.v. A → B → C → D enz.
We zouden het ook zo kunnen inrichten dat de cirkelomtrek EENPARIG (d.w.z. in gelijke tijdsdelen gelijke baanstukken) doorlopen wordt.

In elk van deze gevallen VOELEN we dat er een zekere DISCIPLINE moet bestaan in de bewegingen van de rechter- en de linkerhand.

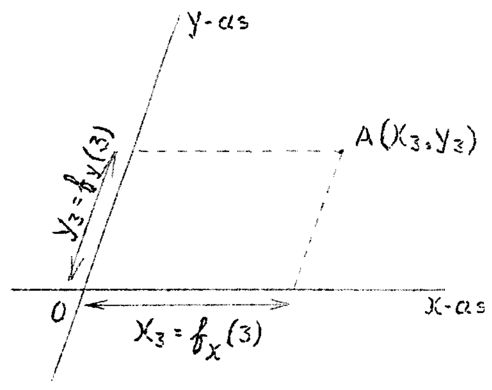
We trekken hieruit TWEE CONCLUSIES:

I Iedere beweging van een massapunt in een plat vlak kan opgevat worden als het resultaat van een deelname aan TWEE rechtlijnige bewegingen: een beweging in de X-richting en een beweging in de Y-richting.
De X- en Y-assen behoeven daarbij niet loodrecht op elkaar te staan. (Herhaal bovenstaande proef als de Y-as niet ⊥ X-as)

II Om een gegeven baan op een gegeven wijze te kunnen beschrijven moeten de bewegingen in X en Y richting heel bepaalde functies van de tijd zijn.

Het probleem dat ons in dit en de volgende delen van het onderhavige hoofdstuk bezig houdt, bestaat nu in de vraag om de baan van een massapunt in het X-O-Y-vlak (en in de eenvoudige gevallen ook de plaatsfunctie langs deze baan) te bepalen ALS DE PLAATSFUNCTIES VAN DE BEWEGINGEN IN DE X- en Y- RICHTINGEN GEGEVEN ZIJN.
Dit wordt bedoeld met HET SAMENSTELLEN VAN RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.

Punt 2) Het coördinaten-parallelogram.



We beschouwen nu het geval dat een massapunt deelneemt aan een beweging langs de X-as met plaatsfunctie $X_t = f_x(t)$ meter en aan een beweging langs de Y-as met plaatsfunctie $Y_t = f_y(t)$ meter.

Gevraagd: a) Waar bevindt het massapunt zich dan in het X-O-Y- vlak op een benoemd tijdstip b.v. t = 3 sec?

Antwoord: Door in de gegeven plaatsfuncties het tijdstip t = 3 sec. te substitueren vinden we:

$$X_3 = f_x(3) \text{ meter}$$
$$Y_3 = f_y(3) \text{ meter.}$$

AXIOMA: Het massapunt bevindt zich op dit tijdstip t = 3 sec. IN HET VIERDE HOEKPUNT VAN HET PARALLELOGRAM DAT DE BAANCOÖRDINATEN X_3 en Y_3 TOT ZIJDEN HEEFT.

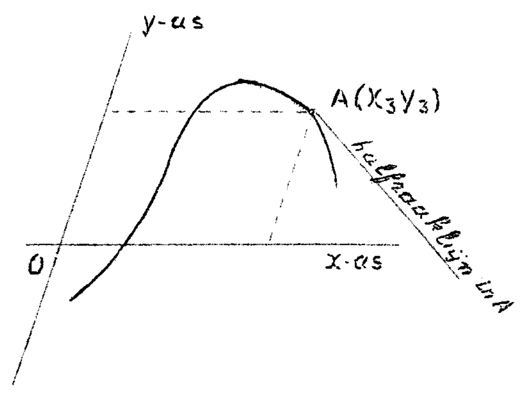
Op het tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in het vierde hoekpunt van het parallelogram dat de baancoördinaten X_t en Y_t tot zijden heeft.

Gevraagd: b) Welke baan beschrijft het massapunt in het X-O-Y-vlak?

Antwoord: De verzameling van de punten $A(X_t,Y_t)$ vormt de baan van het massapunt in het X-O-Y-vlak.

Gevraagd: c) Hoe groot is de snelheid van het massapunt op het tijdstip t = 3 sec. en hoe is deze snelheid gericht?

Antwoord: De vraag naar de grootte van de snelheid kunnen we op dit ogenblik nog niet beantwoorden. Over de RICHTING van de snelheid op het tijdstip t = 3 sec. kunnen we dit zeggen, dat deze in ieder geval zal samenvallen met de richting van de halflijn vanuit $A(X_3Y_3)$ naar het volgende punt van de baan, want het massapunt doorloopt de baan VAN PUNT TOT PUNT.



Maar de halflijn vanuit $A(X_3Y_3)$ naar het volgende punt van de baan IS DE HALFRAAKLIJN IN HET PUNT $A(X_3Y_3)$ AAN DE BAAN.

CONCLUSIE. Op het tijdstip t = 3 sec. is de snelheid van het massapunt gericht volgens de halfraaklijn in het punt $A(X_3,Y_3)$ aan de baan.

We komen hier nog uitvoerig op terug.

"Tussen haakjes": In het antwoord op vraag a) hebben we de term axioma gebruikt.
Wat is een axioma?

Definitie. Een axioma is een OORDEEL waarvan men de waarheid spontaan inziet zodra men de TAAL verstaat.

De waarheid van een axioma is dus in de termen duidelijk. De "onbewijsbaarheid" van een axioma is dus geen "gebrek", maar juist de hoogste "deugd" die een oordeel KAN hebben! In de wiskunde, waar men een oordeel alleen ALS WAARHEID aanvaardt als dit uit een voorgaand oordeel kan afgeleid worden, wordt het axioma vaak onteerd door er de betekenis van "spelregel" aan te geven.

Punt 3) De verdere indeling van het onderhavige hoofdstuk.

In de volgende delen gaan we de beweging van het massapunt IN HET X-O-Y-VLAK bestuderen voor de gevallen dat de plaatsfuncties in de x- en y- richtingen veeltermen zijn òf van de eerste graad òf van de tweede graad:

in deel C het samenstellen van EENPARIGE rechtlijnige bewegingen;

in deel D het samenstellen van EENPARIG VERANDERLIJKE rechtlijnige bewegingen en de combinatie van een eenparige en een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging.

D E E L C. HET SAMENSTELLEN VAN TWEE EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.

Punt 1) STELLING. Neemt een massapunt deel aan TWEE EENPARIGE rechtlijnige bewegingen, dan is DE RESULTERENDE BEWEGING IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN:

1°) RECHTLIJNIG,

2°) EENPARIG, en wel zò, dat

3°) DE SNELHEID VAN DE RESULTERENDE BEWEGING DE SOMVECTOR IS VAN DE SNELHEDEN VAN DE GEGEVEN EENPARIGE BEWEGINGEN,

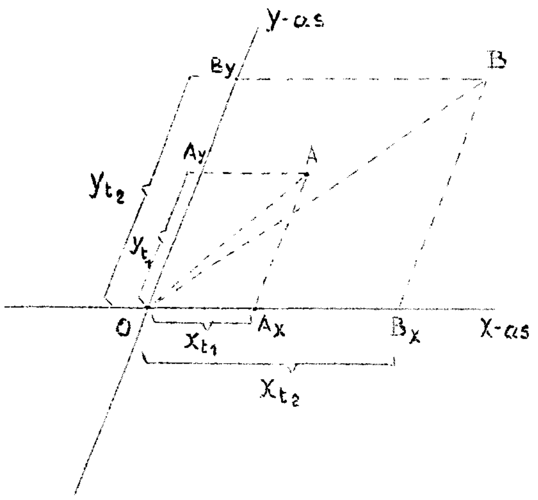
BEWIJS. In deze stelling worden dus DRIE dingen beweerd over de resulterende beweging in het vlak door de bewegingsassen. We gaan deze beweringen bewijzen in de volgorde van hun nummering.

→ ad 1°) Gegeven. Een massapunt neemt deel aan twee EENPARIGE rechtlijnige bewegingen:
in de X-richting met plaatsfunctie $X_t = v_x.t$ meter
in de Y-richting met plaatsfunctie $Y_t = v_y.t$ meter.

Te bewijzen: De resulterende beweging in het XOY-vlak is RECHTLIJNIG.

Bewijs: zie blz. 64.

Bewijs:



t	X_t	Y_t	plaats in XOY-vlak
	$X_t = v_x . t$	$Y_t = v_y . t$	
t = 0	$X_0 = 0$	$Y_0 = 0$	O
$t = t_1$	$X_{t_1} = v_x . t_1$	$Y_{t_1} = v_y . t_1$	A
$t = t_2$	$X_{t_2} = v_x . t_2$	$Y_{t_2} = v_y . t_2$	B
enz.			

Zijn $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$ in grootte en richting gegeven, alsmede de waarden van t_1 en t_2, dan kunnen we de punten A en B door parallelogramconstructies vinden.

Bovenstaande figuur is een ANALYSEFIGUUR.

We moeten nu bewijzen, dat de punten O, A en B op een rechte lijn liggen, d.w.z. dat we moeten aantonen dat $\angle A_xOA = \angle B_xOB$.

Welnu: $\triangle A_xOA \sim \triangle B_xOB$

Immers:

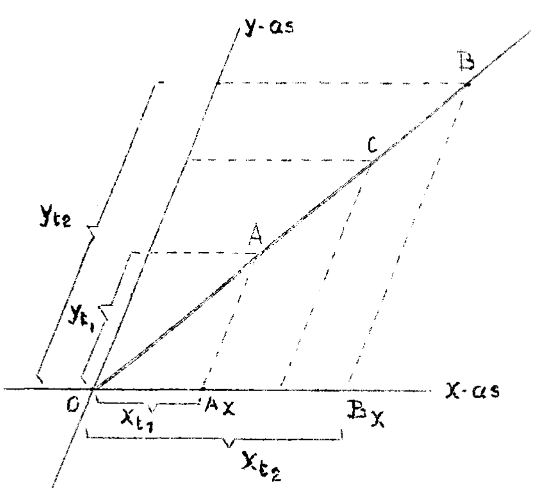
$$\left.\begin{array}{l} OA_x : A_xA = X_{t_1} : Y_{t_1} = v_x . t_1 : v_y . t_1 = v_x : v_y \\ OB_x : B_xB = X_{t_2} : Y_{t_2} = v_x . t_2 : v_y . t_2 = v_x : v_y \end{array}\right\} \text{dus: } OA_x : A_xA = OB_x : B_xB \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_xA \,//\, Y\text{-as} \\ B_xB \,//\, Y\text{-as} \end{array}\right\} \text{dus } \angle OA_xA = \angle OB_xB \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat $\triangle A_xOA \sim \triangle B_xOB$ volgens geval Z.H.Z.

In gelijkvormige driehoeken zijn de gelijkstandige hoeken gelijk.

Dus is $\angle A_xOA = \angle B_xOB$.



Het punt B moet dus liggen OP DE RECHTE LIJN DOOR O EN A.
Daar de tijdstippen t_1 en t_2 volstrekt willekeurig zijn, houdt deze bewijsvoering in dat ieder punt met de coördinaten:

$X_t = v_x t$ meter
$Y_t = v_y t$ meter

op de rechte door O en A ligt.

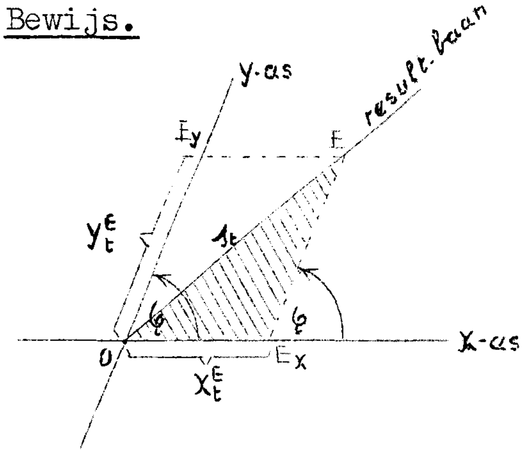
Conclusie.	Neemt een massapunt deel aan twee eenparige rechtlijnige bewegingen dan beschrijft het massapunt IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN EEN RECHTE BAAN.

→ ad 2°) Gegeven: $X_t = v_x . t$ meter
$Y_t = v_y . t$ meter

Te bewijzen: De resulterende beweging in het XOY-vlak is EENPARIG.

Bewijs:

Bewijs.



We maken nu gebruik van hetgeen we in 1°) bewezen hebben, dat de baan in het XOY-vlak RECHT is.
Op een willekeurig tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in een punt E van deze lijn.
De coördinaten van punt E zijn:

$$X_t^E = v_x . t \text{ meter}$$

$$Y_t^E = v_y . t \text{ meter.}$$

s_t (= OE) is nu DE BAANCOÖRDINAAT LANGS DE RESULTERENDE BAAN van het massapunt op het tijdstip t sec.

We hebben nu te bewijzen DAT s_t EEN LINEAIRE FUNCTIE VAN DE TIJD IS.

Welnu: Passen we in de gearceerde driehoek de cosinusregel toe op de zijde OE(= s_t), dan volgt:

$$s_t^2 = (X_t)^2 + (Y_t)^2 + 2X_tY_t.\cos\varphi$$

$$= v_x^2t^2 + v_y^2t^2 + 2v_x.v_y.t^2.\cos\varphi$$

$$= (v_x^2 + v_y^2 + 2v_x.v_y.\cos\varphi).t^2$$

dus: $s_t = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + 2v_x.v_y.\cos\varphi)}.t$ meter

dus: $s_t = \boxed{\text{constante}}\ .t$ meter.

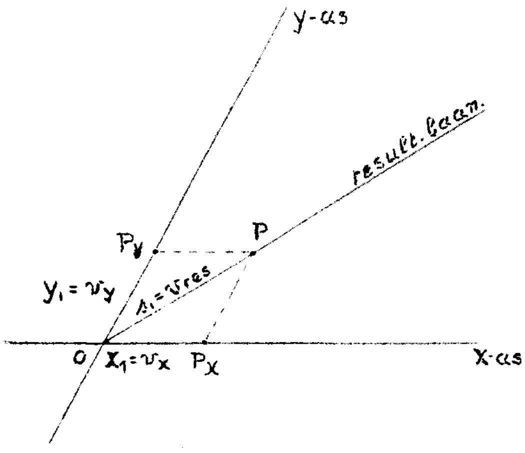
Conclusie: s_t is dus een LINEAIRE FUNCTIE van de tijd:
DE RESULTERENDE BEWEGING IS DUS EENPARIG.

Tot nu toe hebben we dus bewezen, dat de resulterende beweging in het XOY-vlak:
1°) RECHTLIJNIG en
2°) EENPARIG is.

→ ad 3°) Gegeven: $X_t = v_x.t$ meter
$Y_t = v_y.t$ meter

Te bewijzen: $\vec{v}_{res.} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

Bewijs:



We weten nu, dat de resulterende baan in het XOY-vlak RECHT is en dat deze rechte baan EENPARIG wordt doorlopen volgens de plaatsfunctie

$$s_t = \boxed{\text{constante}}\ .t \text{ meter.}$$

Die constante is dus de snelheid van de resulterende beweging.
Dus $s_t = v_{res}.t$ meter.
Hierbij is s_t op ieder tijdstip de diagonaal door O van het parallelogram met $X_t = v_x.t$ meter en $Y_t = v_y.t$ meter tot zijden.

Welnu: Op het tijdstip $t = 1$ sec. is

$$s_1 = v_{res} \text{ meter}$$
$$X_1 = v_x \text{ meter}$$
$$Y_1 = v_y \text{ meter.}$$

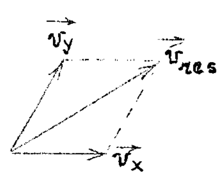
Het massapunt bevindt zich dan in het punt P, d.i. het vierde hoekpunt van het parallelogram met v_x en v_y tot zijden. De diagonaal door O van dit parallelogram is gelijk aan v_{res}. m.a.w. v_{res} is gelijk aan en gericht volgens de diagonaal door O van het parallelogram met v_x en v_y tot zijden.

Volgens de definitie van de vectorsom is $\vec{v}_{res}$ dus de vectorsom van de vectoren $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$.

Daar de resulterende beweging EENPARIG en RECHTLIJNIG is blijft de vector van de resulterende snelheid bij deze beweging constant in grootte en richting: op ieder tijdstip is dus

$$\vec{v}_{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Conclusie. Neemt een massapunt deel aan twee eenparige rechtlijnige bewegingen met snelheidsvectoren $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$, dan is de resulterende beweging in het XOY-vlak:

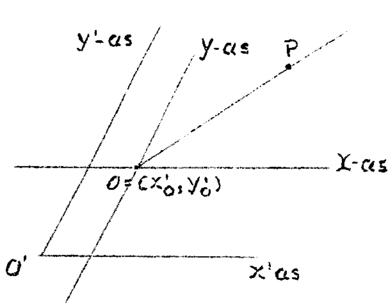


1°) rechtlijnig

2°) eenparig, zò dat

3°) $\vec{v}_{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

Opmerking. In het bewijs hebben we aangenomen dat het massapunt zich ten tijde $t = 0$ in de oorsprong van het coördinatenstelsel bevindt. Dit is slechts een bijkomstigheid: Een eventuele verplaatsing van de coördinaatassen doet niets af aan de RESULTERENDE BEWEGING IN HET BEWEGINGSVLAK.

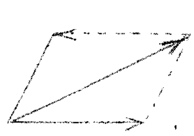


Het bewijs is dus ook geldig voor het geval dat:

$$X_t^1 = v_x t + X_0^1 \text{ meter}$$
$$Y_t^1 = v_y t + Y_0^1 \text{ meter.}$$

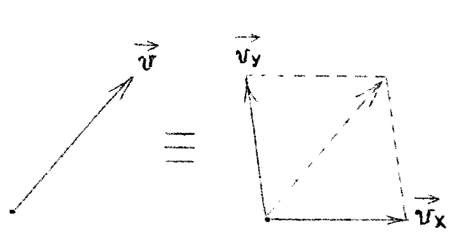
Punt 2) Algemenere conclusies.

I. De vectorrekening is dus inderdaad van toepassing op snelheidsvectoren: Men kan snelheidsvectoren SAMENSTELLEN als pijlen van de vectorrekening.



$$\vec{v}_{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

II. Omgekeerd kan men een snelheidsvector ONTBINDEN in twee componenten.



Punt 3) Opgave 29.

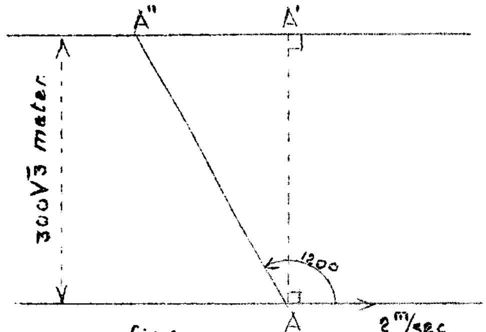


Fig 1.

Iemand wil met een cano een rivier oversteken die $300\sqrt{3}$ meter breed is. De snelheid van de stroom is 2 m/sec. Hij roeit met een constante snelheid in een richting die met de richting van de stroom een hoek van 120° maakt. Hij start in het punt A (zie fig.) en bereikt de overkant in het punt A', zodat de cano dus t.o.v. de bodem van de rivier een rechte baan beschrijft die ⊥ de rivier.

Gevraagd: a) Met welke snelheid moet hij roeien?

Oplossing. Alvorens de roeisnelheid uit te rekenen moeten we ons eerst een duidelijke voorstelling vormen van hetgeen er gebeurt.
Stroomt het water van de rivier van links naar rechts met een snelheid van 2 m/sec, dan wil dit zeggen dat alles wat op het water van de rivier drijft ten opzichte van de bodem van de rivier deelneemt aan een eenparige beweging die van links naar rechts gericht is en waarvan de snelheid 2 m/sec. is.
De cano start in A in DE RICHTING AA". Ten opzichte van de bodem van de rivier neemt de roeier dus deel aan TWEE eenparige rechtlijnige bewegingen.
Leg in bovenstaande figuur een latje langs de lijn AA". Maak op het latje merktekens op de plaatsen A en A". Beweeg het latje nu met de linkerhand eenparig naar rechts en beweeg TEGELIJKERTIJD met de rechterhand een potloodpunt eenparig vanuit het merkteken A langs het latje naar het merkteken A" met zo'n snelheid dat de potloodpunt steeds op de lijn AA' blijft. Als de potloodpunt in A' aankomt is deze op het latje aangekomen in het merkteken A".

T.O.V. HET WATEROPPERVLAK heeft de roeier dus het rechte baanstuk AA" afgelegd. Dit baanstuk wordt door het stromende water eenparig naar rechts verschoven. DE SNELHEID WAARMEE HIJ DIT BAANSTUK AFLEGT IS DE SNELHEID WAARMEE HIJ ROEIT.

T.O.V. DE RIVIERBODEM heeft de roeier echter het rechte baanstuk AA' afgelegd. DE SNELHEID WAARMEE HIJ DIT BAANSTUK AFLEGT IS ZIJN RESULTERENDE SNELHEID t.o.v. DE RIVIERBODEM.

Met welke snelheid moet hij nu roeien?

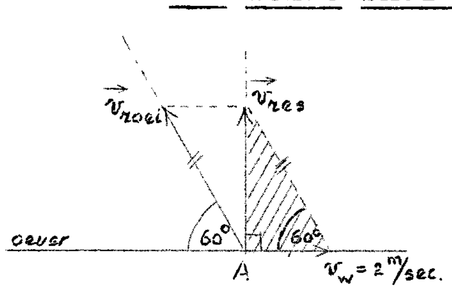


Fig. 2

De roeisnelheid $\vec{v}_{roei}$ moet zo'n waarde hebben, dat

1°) $\vec{v}_{res} = \vec{v}_{water} + \vec{v}_{roei}$ en

2°) $\vec{v}_{res} \perp$ oever.

Uit het feit dat de gearceerde driehoek rechthoekig is en een hoek van 60° heeft volgt dat

$$v_{roei} = 4 \text{ m/sec.}$$

Conclusie. Hij moet roeien met een snelheid van 4 m/sec.

Gevraagd: b) De resulterende snelheid t.o.v. de rivierbodem?

Oplossing. Uit fig. 2 volgt dat

$$\boxed{v_{res} = 2\sqrt{3} \text{ m/sec.}}$$

Gevraagd: c) In hoeveel seconden bereikt hij de overkant?

Oplossing I. $AA' = 300\sqrt{3}$ meter (zie fig. 1)

$v_{res} = 2\sqrt{3}$ m/sec.

Dus: $300\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.t$

dus $t = 150$ seconden.

Oplossing II. $AA'' = 600$ meter (zie fig. 1)

$v_{roei} = 4$ m/sec.

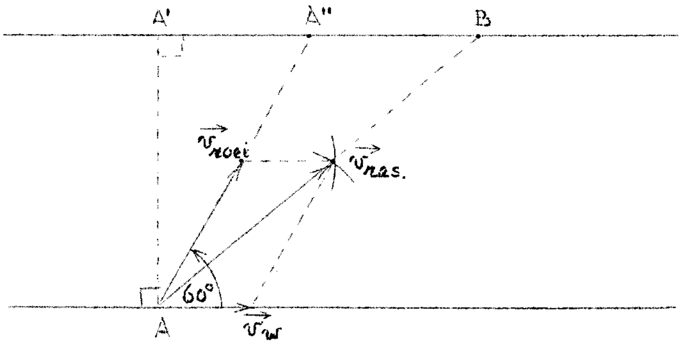
Dus: $600 = 4.t$

$t = 150$ seconden.

Conclusie. Hij bereikt de overkant in 150 sec.

Gevraagd: d) Bepaal door constructie de plaats waar hij de overkant zou bereikt hebben als hij met een snelheid van 4 m/s. geroeid had in een richting die met de stroomsnelheid een hoek van 60° maakt.

Constructie.



Conclusie. De roeier zou dan in punt B de over kant bereiken.

Gevraagd: e) Wat valt er (zonder berekening uit te voeren) te zeggen over de tijd die de roeier dan nodig heeft om de overkant te bereiken?

Antwoord I. Ten opzichte van het wateroppervlak legt hij nu het rechte baanstuk.......af, dat..........is.......... het baanstuk... in fig. 1.
De roeisnelheid is ook nu 4 m/sec.
De roeitijd is dus nu............

Antwoord II. Ontbind $\vec{v}_{res}$ in een component LANGS de oever en één component ⊥ op de oever.

De comp. ⊥ op de oever is.........in fig.2.

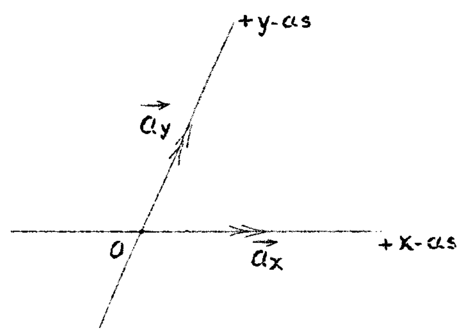
De roeier bereikt de overkant dus in sec.

Henric van Veldeke College
Maastricht.

D E E L D. HET SAMENSTELLEN VAN EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN.

§ 1. Het samenstellen van twee EENPARIG VERSNELDE rechtlijnige bewegingen ZONDER BEGINSNELHEDEN.

Punt 1) Het probleem.



We beschouwen nu het geval dat een massapunt deelneemt aan twee EENPARIG VERSNELDE rechtlijnige bewegingen ZONDER BEGINSNELHEDEN.
De baan van het massapunt ligt dan in ieder geval IN HET PLATTE VLAK DOOR HET MASSAPUNT EN DE TWEE BEWEGINGSRICHTINGEN d.i. het bewegingsvlak.
Zonder de algemeenheid van de beschouwing te schaden mogen we het punt van dit bewegingsvlak waarin het massapunt zich bevindt op t = 0 tot oorsprong van het coördinatenstelsel nemen. De + X-as kiezen we in de richting van $\vec{a}_x$; de + Y-as in de richting van $\vec{a}_y$.
De plaats- en snelheidsfuncties in de X- resp. Y-richting luiden dan:

X - as	Y - as
$X_t = \frac{1}{2}a_x t^2$ meter	$Y_t = \frac{1}{2}a_y t^2$ meter
$v_t^x = a_x t$ m/sec.	$v_t^y = a_y t$ m/sec

We vragen nu naar de baan van het massapunt in het XOY-vlak en naar de plaatsfunctie langs deze baan.

Punt 2) Stelling. Neemt een massapunt deel aan twee EENPARIG VERSNELDE rechtlijnige bewegingen ZONDER BEGINSNELHEDEN, DAN IS DE RESULTERENDE BEWEGING IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN:

1°) RECHTLIJNIG,

2°) EENPARIG VERSNELD ZONDER BEGINSNELHEID, en is

3°) DE VERSNELLING VAN DE RESULTERENDE BEWEGING DE SOMVECTOR VAN DE GEGEVEN VERSNELLINGSVECTOREN.

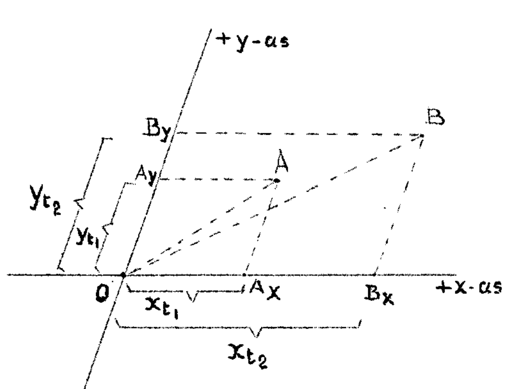
Bewijs, in drie delen.

→ ad 1°) Gegeven. a_x; $X_t = \frac{1}{2}a_x t^2$ meter.

a_y; $Y_t = \frac{1}{2}a_y t^2$ meter.

Te bewijzen: De resulterende beweging in het XOY vlak is RECHTLIJNIG.

Bewijs.



t	X_t	Y_t	plaats in XOY-vlak.
	$X_t = \frac{1}{2}a_x t^2$	$Y_t = \frac{1}{2}a_y t^2$	
t = 0	$X_0 = 0$	$Y_0 = 0$	0
t = t_1	$X_{t_1} = \frac{1}{2}a_x {t_1}^2$	$Y_{t_1} = \frac{1}{2}a_y {t_1}^2$	A
t = t_2	$X_{t_2} = \frac{1}{2}a_x {t_2}^2$	$Y_{t_2} = \frac{1}{2}a_y {t_2}^2$	B
enz.			

X_{t_1}, Y_{t_1} en X_{t_2}, Y_{t_2} zijn bekend. Dus kunnen we de punten A en B door parallelogramconstructies vinden.

De fig. op de vorige blz. is een ANALYSE FIGUUR.

We moeten nu bewijzen, dat de punten O, A en B op eenzelfde rechte lijn liggen.

Welnu: $\Delta OA_xA \backsim \Delta OB_xB$

Immers: $OA_x : A_xA = \frac{1}{2}a_xt_1{}^2 : \frac{1}{2}a_yt_1{}^2 = a_x : a_y$

$OB_x : B_xB = \frac{1}{2}a_xt_2{}^2 : \frac{1}{2}a_yt_2{}^2 = a_x : a_y$

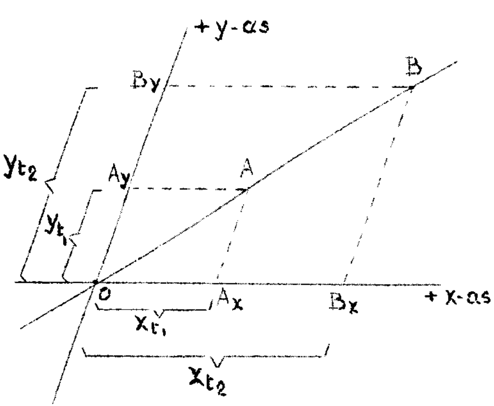
Dus: $OA_x : A_xA = OB_x : B_xB$ ①

$A_xA \parallel +$ Y-as

$B_xB \parallel +$ Y-as

Dus: $\angle OA_xA = \angle OB_xB$ ②

Uit ① en ② volgt dat $\Delta OA_xA \backsim \Delta OB_xB$ volgens geval (Z.H.Z.) In gelijkvormige driehoeken zijn de gelijkstandige hoeken aan elkaar gelijk.
Dus is $\angle A_xOA = \angle B_xOB$.



Het punt B moet dus liggen OP DE RECHTE LIJN DOOR O EN A.
Daar de tijdstippen t_1 en t_2 volstrekt willekeurig zijn, houdt deze bewijsvoering in, dat ieder punt met coördinaten

$$X_t = \tfrac{1}{2}a_xt^2 \text{ meter}$$

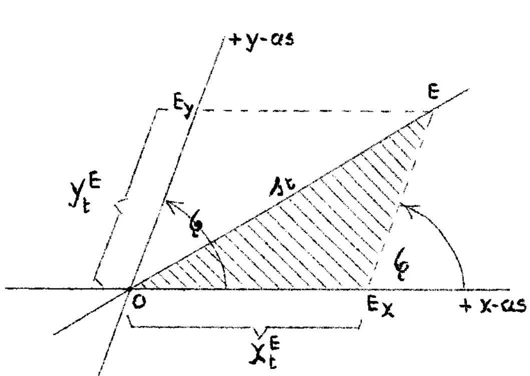
$$Y_t = \tfrac{1}{2}a_yt^2 \text{ meter}$$

op de rechte door O en A ligt.

> Conclusie. Neemt een massapunt deel aan twee eenparig versnelde rechtlijnige bewegingen ZONDER BEGINSNELHEDEN dan beschrijft het massapunt IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN EEN RECHTE BAAN.

ad 2^o) We moeten nu bewijzen dat de resulterende beweging EENPARIG VERSNELD is ZONDER BEGINSNELHEID.

Bewijs.



We maken nu gebruik van hetgeen we in 1^o) bewezen hebben, n.l. dat de baan RECHT is.
Op een willekeurig tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in een punt E van de rechte lijn.
De coördinaten van punt E zijn:

$$X_t^E = \tfrac{1}{2}a_xt^2 \text{ meter}$$

$$Y_t^E = \tfrac{1}{2}a_yt^2 \text{ meter.}$$

s_t (= OE) is nu DE BAANCOÖRDINAAT LANGS DE RESULTERENDE BAAN van het massapunt op het tijdstip t sec.
We moeten nu bewijzen dat s_t recht evenredig is met t^2.
Welnu: Passen we in de gearceerde driehoek de cosinusregel toe op de zijde OE (= s_t), dan volgt:

$$s_t{}^2 = X_t^2 + Y_t^2 + 2X_tY_t \cos\varphi$$

$$s_t{}^2 = \tfrac{1}{4}a_x^2t^4 + \tfrac{1}{4}a_y^2t^4 + 2.\tfrac{1}{4}a_xa_yt^4 \cos\varphi$$

$$s_t{}^2 = \tfrac{1}{4}(a_x^2 + a_y^2 + 2a_xa_y \cos\varphi)\, t^4$$

$$\text{Dus: } s_t = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + 2a_xa_y \cos\varphi}\,.t^2 \text{ meter}$$

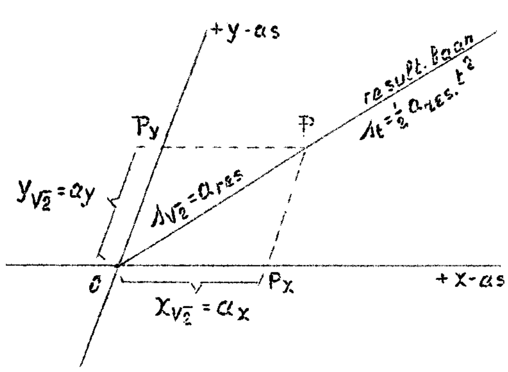
Dus: $\boxed{s_t = \frac{1}{2}\ \boxed{\text{constante}}\ .t^2 \text{ meter}}$ (1)

Maar dit is de plaatsfunctie van een eenparig versnelde beweging ZONDER BEGINSNELHEID.

Conclusie: De resulterende beweging IN HET XOY-VLAK is EEN EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING ZONDER BEGINSNELHEID.

→ ad 3°) We moeten nu bewijzen dat de versnellingsvector van de resulterende eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid DE SOMVECTOR is van de gegeven versnellingsvectoren $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$, dus dat $\vec{a}_{res} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$.

Bewijs.



In bovenstaande vergelijking (1) is de constante gelijk aan de versnelling van de resulterende beweging, dus a_{res}. We kunnen vergelijking (1) dus schrijven als

$$s_t = \tfrac{1}{2}a_{res}t^2 \text{ meter.}$$

Hierbij is s_t op ieder tijdstip gelijk aan de diagonaal door O van het parallelogram met $X_t = \frac{1}{2}a_x t^2$ meter en $Y_t = \frac{1}{2}a_y t^2$ meter tot zijden.

Welnu: Op het tijdstip $t = \sqrt{2}$ sec. is:

$$s_{\sqrt{2}} = a_{res} \text{ meter}$$

$$X_{\sqrt{2}} = a_x \text{ meter}$$

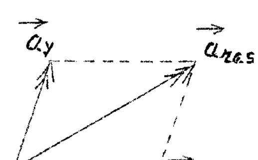
$$Y_{\sqrt{2}} = a_y \text{ meter}$$

Het massapunt bevindt zich dan in het punt P, d.i. het vierde hoekpunt van het parallelogram met a_x en a_y tot zijden; de diagonaal door O is dan a_{res} m.a.w. a_{res} is gelijk aan- en gericht volgens de diagonaal door O van het parallelogram met a_x en a_y tot zijden.

d.w.z. $\vec{a}_{res}$ is de somvector van $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$.
Daar de resulterende beweging een eenparig versnelde RECHTLIJNIGE beweging is, blijft de vector $\vec{a}_{res}$ constant van grootte en richting.
Op ieder tijdstip is dus:

$$\vec{a}_{res} = \vec{a}_x + \vec{a}_y.$$

Conclusie. Neemt een massapunt deel aan twee eenparig versnelde rechtlijnige bewegingen ZONDER BEGINSNELHEDEN, waarvan de respectievelijke versnellingsvectoren $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$ zijn, dan is de resulterende beweging in het XOY-vlak RECHTLIJNIG EENPARIG VERSNELD ZONDER BEGINSNELHEID, en is



$$\vec{a}_{res} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Punt 3) Algemene conclusies.

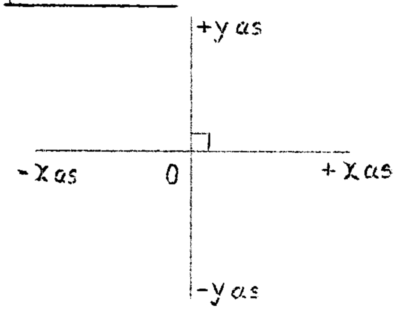
I De vectorrekening is dus ook van toepassing voor VERSNELLINGS-VECTOREN:
men kan dus versnellingsvectoren SAMENSTELLEN als pijlen van de vectorrekening.

II Omgekeerd kan een versnellingsvector ONTBONDEN worden in twee componenten.

III De vectorrekening is dus zowel voor SNELHEIDSVECTOREN als voor VERSNELLINGSVECTOREN van toepassing.

§ 2. Het samenstellen van EEN EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING en EEN EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGING waarbij DE BEWEGINGS-ASSEN LOODRECHT OP ELKAAR STAAN.

Punt 1) Het probleem.



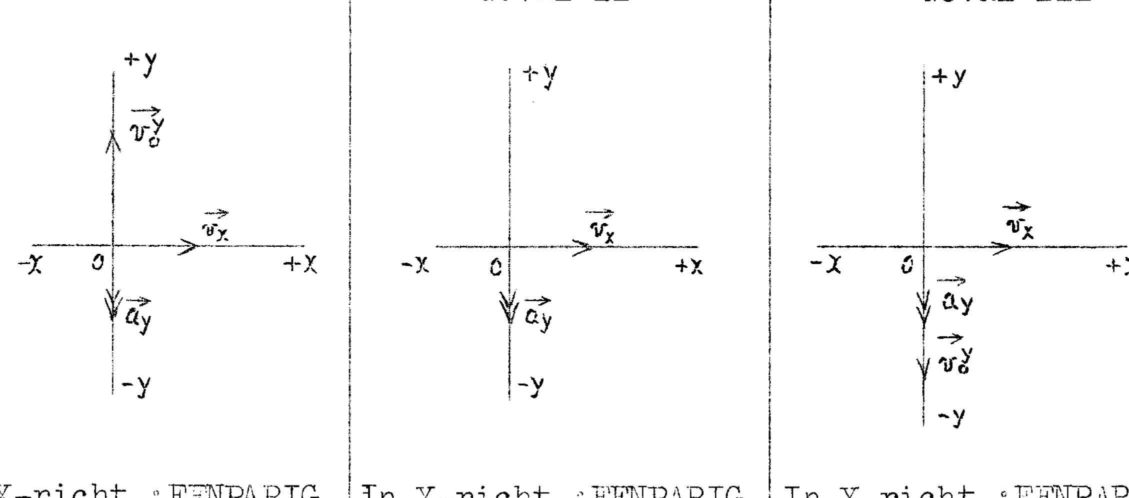
We beschouwen nu het geval dat een massapunt deelneemt aan twee bewegingen waarvan de bewegingsassen LOODRECHT op elkaar staan en waarvan de ene beweging EENPARIG en de andere beweging EENPARIG VERANDERLIJK is.
We nemen de oorsprong van het rechte XOY-coördinatenstelsel in het punt van het bewegingsvlak waarin het massapunt zich ten tijde t = 0 bevindt.

We nemen aan, dat de beweging in DE X-RICHTING EENPARIG is. De beweging IN DE Y-RICHTING is dan dus EENPARIG VERANDERLIJK, d.w.z.

òf EENPARIG VERTRAAGD, als $\vec{v}_0^{\,y}$ en $\vec{a}_y$ TEGENGESTELD GERICHT zijn,
òf EENPARIG VERSNELD, 1°) ZONDER BEGINSNELHEID, als $\vec{v}_0^{\,y} = 0$
2°) MET BEGINSNELHEID, als $\vec{v}_0^{\,y}$ en $\vec{a}_y$ GELIJK GERICHT zijn.

Er zijn dus DRIE mogelijkheden.

Nemen we voor de overzichtelijkheid aan, dat de snelheid in de X-richting $\vec{v}_x$ POSITIEF gericht is en de VERSNELLING IN DE Y-RICHTING NEGATIEF gericht is, dan zijn deze mogelijkheden:

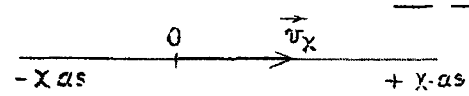


Geval I	Geval II	Geval III
In X-richt.: EENPARIG	In X-richt.: EENPARIG	In X-richt.: EENPARIG.
In Y- " EENPARIG VERTRAAGD	In Y- " EENPARIG VERSNELD ZONDER BEGINSNELHEID.	In Y- " EENPARIG VERSNELD MET BEGINSNELHEID.

WE VRAGEN NU VOOR ELK VAN DEZE GEVALLEN NAAR DE RESULTERENDE BAAN IN HET X-O-Y-VLAK.

Punt 2) Het opstellen van de plaatsfuncties in de X- en Y- richting.

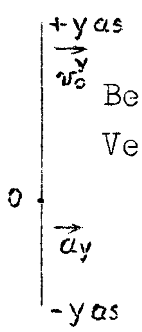
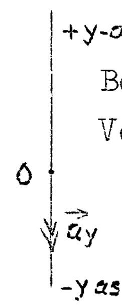
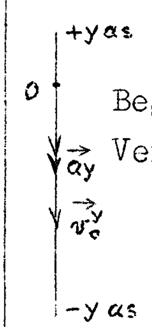
IN DE X- RICHTING: Bij het opstellen van de plaatsfunctie in de X- richting moeten we doen alsof de beweging in de Y-richting er niet is.



De beweging in de X- richting is eenparig; $X_0 = 0$.
Dus:

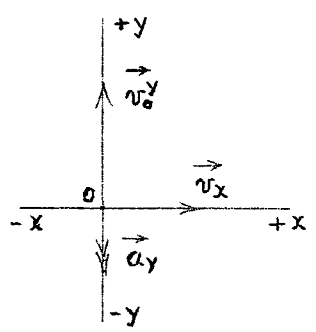
$$\boxed{X_t = + |v_x|\ t \text{ meter}}$$

IN DE Y- RICHTING: Bij het opstellen van de plaatsfunctie in de Y-richting moeten we doen alsof de beweging in de X- richting er niet is.
Voor de beweging in de Y-richting geldt in elk van de in punt 1) genoemde gevallen de formule van de eenparig veranderlijke beweging. WE MOETEN ER ECHTER GOED OP LETTEN H O E DEZE FORMULE INGEVULD MOET WORDEN.

Geval I	Geval II	Geval III
 Beginsnelh. + Versnelling -	 Beginsnelh. 0 Versnelling -	 Beginsnelh. - Versnelling -
Dus: $Y_t = +\|v_0^y\|t - \frac{1}{2}\|a_y\|t^2$ m.	Dus: $Y_t = -\frac{1}{2}\|a_y\|t^2$ meter	Dus: $Y_t = -\|v_0^y\|t - \frac{1}{2}\|a_y\|t^2$ m.

Punt 3) DE RESULTERENDE BAAN IN HET XOY-VLAK in elk van de genoemde gevallen.

Geval I.



X-richting	Y-richting
$X_t = +\|v_x\|t$ meter	$Y_t = +\|v_0^y\|t - \frac{1}{2}\|a_y\|t^2$ m.
(1)	(2)

Voor iedere waarde van t vinden we èèn waarde X_t en èèn waarde Y_t, dus èèn punt (X_t, Y_t) in het XOYvlak.
De verzameling van deze punten (X_t, Y_t) vormt de resulterende baan van het massapunt in het XOY- vlak.

Deze baan is ANALYTISCH bepaald, als we weten WELKE FUNCTIE DE Y-COÖRDINAAT VAN HET BAANPUNT OP EEN ONBENOEMD TIJDSTIP t sec. IS VAN DE X-COÖRDINAAT VAN DIT BAANPUNT.

Welnu: Deze functie vinden we DOOR DE TIJD TE ELIMINEREN UIT DE PLAATSFUNCTIES IN DE X- EN Y- RICHTING.

Uit (1) volgt: $t = \frac{X_t}{|v_x|}$

Dit substitueren in (2) levert: $Y_t = \frac{+|v_0^y|}{+|v_x|}.X_t - \frac{1}{2}\frac{|a_y|}{|v_x|^2}.X_t^2$

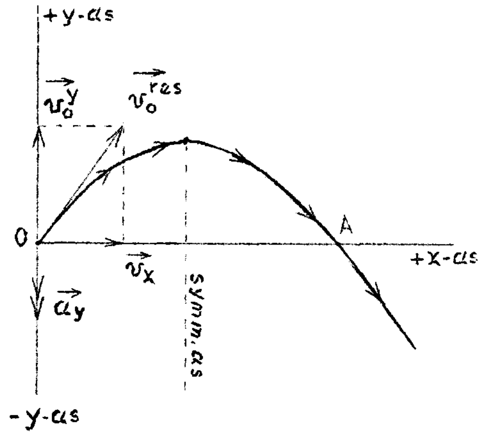
De ANALYTISCHE vergelijking van de baan luidt dus:

DE ANALYTISCHE vergelijking van de baan luidt dus:

$$\boxed{Y = \frac{+|v_0^y|}{+|v_x|} \cdot X - \frac{1}{2}\,\frac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X^2} \qquad (3)$$

Vraag: Welke gestalte heeft de baan dus?

Antw.: Vergelijking (3) is de vergelijking van een BERG PARABOOL met de volgende bijzonderheden:



1°) De parabool snijdt de X-as in de punten O(o,o)en $A(+2\,\frac{|v_x|.|v_0^y|}{|a_y|},0)$

De X-coörd. v.h. punt A is dus +

2°) De symmetrie as van de parabool loopt evenwijdig aan- en is gelijk gericht met de vector $\vec{a}_y$.

3°) De parabool RAAKT IN O aan de vector $\vec{v}_0^{res}$.

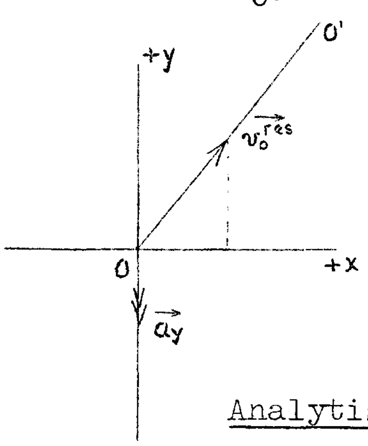
Hierbij is $\vec{v}_0^{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_0^y$

$\vec{v}_0^{res}$ is dus DE VECTOR VAN DE RESULTERENDE BEGINSNELHEID van het massapunt IN HET XOY-VLAK.

ad 3°) Populair bewijs. Op het tijdstip t = 0 heeft het massapunt in de X-richting de snelheid $\vec{v}_x$ en in de Y-richting de snelheid $\vec{v}_0^y$.

TEN OPZICHTE VAN HET XOY-VLAK heeft het massapunt op t = 0 dus een snelheid die de somvector is van $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_0^y$, dus:

$$\vec{v}_0^{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_0^y$$



Op het tijdstip t = 0 is de beweging van het massapunt in het XOY vlak dus gericht van O naar "het volgende punt van de lijn OO'".

De resulterende baan van het massapunt IN HET XOY-VLAK heeft dus in O TWEE SAMENGEVALLEN SNIJPUNTEN met de lijn OO', d.w.z. DE RESULTERENDE BAAN VAN HET MASSAPUNT RAAKT IN O AAN DE VECTOR $\vec{v}_0^{res}$.

Analytisch bewijs.

Uit vergelijking (3) volgt: $\frac{dy}{dx} = \frac{+|v_0^y|}{+|v_x|} - \frac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X$

In O is X = 0, dus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{in\,O} = \frac{+|v_0^y|}{+|v_x|}$$

Het linker lid van deze vergelijking is gelijk aan de tangens van de hoek die de halfraaklijn in O maakt met de + X-as.

Het rechter lid van deze vergelijking is gelijk aan de tangens van de hoek die de vector $\vec{v}_0^{res}$ maakt met de + X-as.

De halfraaklijn in O aan de resulterende baan valt dus langs $\vec{v}_0^{res}$.

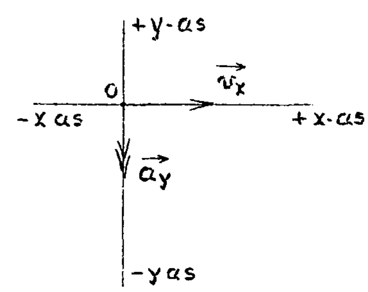
Dus moet de resulterende baan in O raken aan $\vec{v}_0^{res}$.

Conclusie. De resulterende baan van het massapunt IN HET XOY-VLAK is

EEN PARABOOL

die IN DE OORSPRONG RAAKT AAN DE RESULTERENDE BEGINSNELHEID en waarvan DE SYMMETRIE-AS EVENWIJDIG LOOPT AAN- EN GELIJK GERICHT IS MET DE VECTOR VAN DE VERSNELLING VAN DE EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGING.

→ Geval II



X-richting	Y-richting
$X_t = +\|v_x\|.t$ meter (4)	$Y_t = -\frac{1}{2}\|a_y\|.t^2$ m. (5)

Om Y als functie van X te vinden moeten we de tijd t elimineren uit (4) en (5).

Uit (4) volgt: $t = \dfrac{x_t}{+|v_x|}$

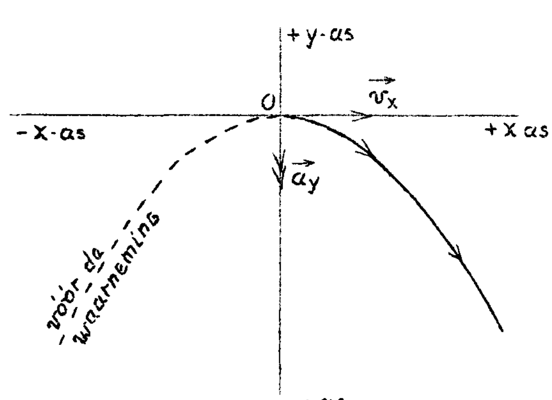
Substitutie in (5) geeft: $Y_t = -\frac{1}{2}\dfrac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X_t^2$

De ANALYTISCHE VERGELIJKING van de resulterende baan in het XOY-vlak luidt dus:

$$\boxed{Y = -\frac{1}{2}\frac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X^2} \qquad (6)$$

Vraag: Welke gestalte heeft deze baan?

Antw.: Vergelijking (6) is de vergelijking van een BERG PARABOOL met de volgende bijzonderheden:



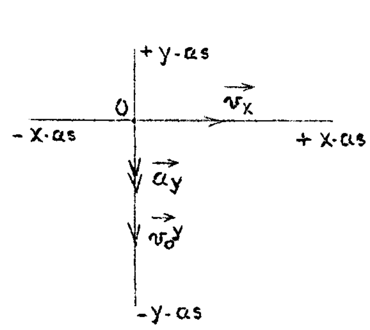
1°) O is de top van de parabool.

2°) De negatieve Y-as is de symmetrie as van de parabool.

3°) De parabool raakt in O aan $\vec{v}_x$: Ten tijde t = 0 heeft het massapunt nog alleen maar een snelheid in de X-richting, zodat de resulterende baan in het XOY-vlak in O MOET raken aan de resulterende beginsnelheid $\vec{v}_x$.

Conclusie. idem als in geval I.

→ Geval III



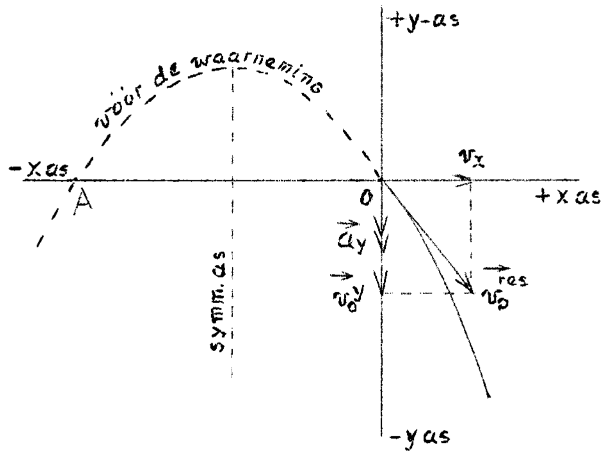
X-richting	Y-richting
$X_t = +\|v_x\|.t$ meter (7)	$Y_t = -\|v_0^y\|.t - \frac{1}{2}\|a_y\|t^2$ m. (8)

Door de tijd uit (7) en (8) te elimineren vinden we:

$$Y_t = \frac{-|v_0^y|}{+|v_x|} . X_t - \frac{1}{2} . \frac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X_t^2$$

De ANALYTISCHE VERGELIJKING van de resulterende baan in het XOY-vlak luidt dus:

$$\boxed{Y = -\frac{|v_o^y|}{|v_x|} \cdot X - \frac{1}{2}\frac{|a_y|}{|v_x|^2} \cdot X^2} \qquad (9)$$



Vergelijking (9) is de vergelijking van een BERGPARABOOL met de volgende bijzonderheden:

1°) De parabool snijdt de x-as in de punten O(o,o)en $A(-2\frac{|v_x|.|v_o^y|}{|a_y|},0)$
De X-coörd. van A is dus -

2°) De symmetrie-as van de parabool loopt evenwijdig aan- en is gelijk gericht met de vector $\vec{a}_y$.

3°) De parabool raakt in 0 aan de resulterende beginsnelheid $\vec{v}_o^{res}$

Conclusie: idem als in geval I.

In elk van de gevallen I, II en III is de resulterende baan van het massapunt in het XOY vlak dus EEN PARABOOL:

In geval I is het massapunt op t = 0 op weg naar de top van de parabool;
in geval II is het massapunt op t = 0 in de top van de parabool;
in geval III heeft het massapunt op t = 0 de top van de parabool reeds gepasseerd.

Eindconclusie: Neemt een massapunt deel aan EEN EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING en aan een daar lood recht op staande EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGING, dan is DE RESULTEREN DE BAAN IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN

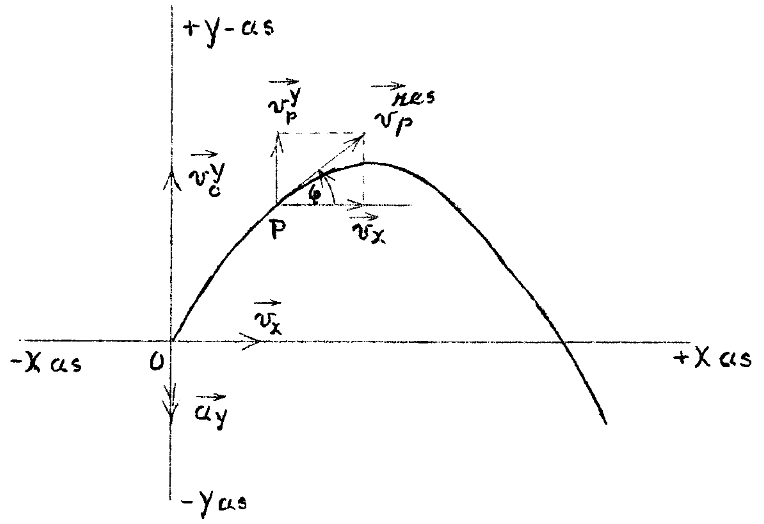
1°) EEN PARABOOL, die

2°) IN DE OORSPRONG (baanpunt op t = 0) RAAKT AAN DE RESULTERENDE BEGINSNELHEID, en waarvan

3°) DE SYMMETRIE-AS EVENWIJDIG LOOPT AAN- EN GELIJK GERICHT IS MET DE VECTOR VAN DE VERSNELLING VAN DE EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGING.

Punt 4) De resulterende snelheid in een willekeurig punt van de parabolische baan.

Gegeven: In de fig. op blz. 77 stelt de parabool de resulterende baan in het XOY-vlak voor van een massapunt dat in het XOY- vlak deelneemt aan een eenparige beweging langs de X-as met snelheid $\vec{v}_x$ en eenparig vertraagde beweging langs de Y-as met beginsnelheid $\vec{v}_o^y$ en versnellingsvector $\vec{a}_y$



De plaatsfuncties en de snelheidsfuncties in de asrichtingen luiden dus:

X - richting	Y - richting
$X_t = + \lvert v_x \rvert \cdot t$ meter	$Y_t = + \lvert v_o^y \rvert t - \frac{1}{2} \lvert a_y \rvert t^2$ meter
$v_t^x = + \lvert v_x \rvert$ $^m/sec.$	$v_t^y = + \lvert v_o^y \rvert - \lvert a_y \rvert t$ $^m/sec.$

Stel, dat het massapunt zich op het tijdstip p sec. in het punt P van de baan bevindt.

Gevraagd: a) De snelheden in de X- en Y richting van het massapunt op het tijdstip t_p.

Oplossing. $v_p^x = + \lvert v_x \rvert$ $^m/sec.$

$v_p^y = + \lvert v_o^y \rvert - \lvert a_y \rvert . p$ $^m/sec.$

Gevraagd: b) De vector van de resulterende snelheid in het XOY-vlak op het tijdstip p sec.

Oplossing. Is $\vec{v}_p^{res}$ de resulterende snelheidsvector op het tijdstip p sec., dan is volgens de vectorrekening:

$$\boxed{\vec{v}_p^{res} = \vec{v}_x + \vec{v}_p^y}$$

DE GROOTTE VAN $\vec{v}_p^{res}$: $\quad \vec{v}_p^{res} = \sqrt{(v_x)^2 + (v_p^y)^2}$ $^m/sec.$

DE RICHTING VAN $\vec{v}_p^{res}$: Is φ de hoek die $\vec{v}_p^{res}$ maakt met de POSITIEVE X-as, dan is

$$\mathrm{tg}\ \varphi . = \frac{v_p^y}{v_x}$$

Gevraagd: c) Welke hoek maakt de halfraaklijn aan de parabool in P met de + X-as?

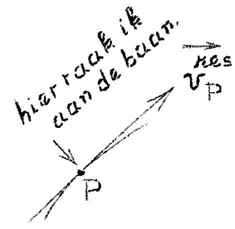
Oplossing. Stel, dat de halfraaklijn in P de hoek φ' maakt met de + X-as, dan leert de analytische meetkunde dat:

$$\mathrm{tg}\ \varphi' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{in P}} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\text{in P}}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{in P}}} = \frac{v_{\text{in P}}^y}{v_{\text{in P}}^x} = \frac{v_p^y}{v_x}$$

Dus $\varphi' = \varphi$

De vector $\vec{v}_P^{\,res}$ valt dus LANGS DE HALFRAAKLIJN IN P aan de parabool.

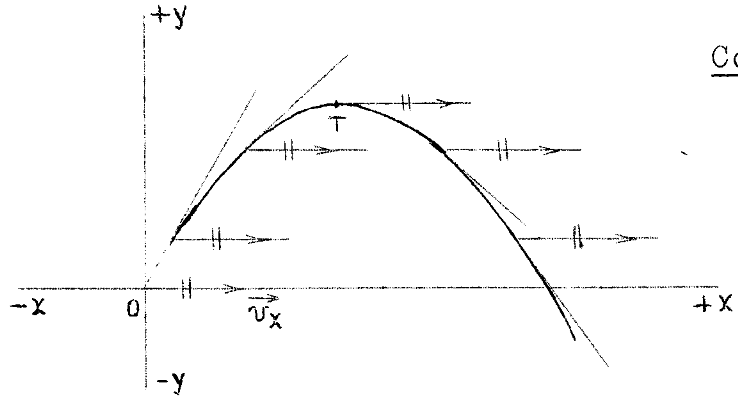
N.B. **CONCLUSIE.**



N.B. DE RESULTERENDE SNELHEID VAN HET MASSAPUNT IN HET XOY-VLAK RAAKT OP IEDER OGENBLIK IN HET BAANPUNT VAN DAT OGENBLIK AAN DE RESULTERENDE BAAN.

N.B.

Gevraagd: d) CONSTRUEER de resulterende snelheidsvector in een willekeurig aan te wijzen punt van de resulterende baan als de baan en $\vec{v}_x$ gegeven zijn.



Constructie.

①

②

③

Conclusies:

I Tijdens de beweging langs de parabool blijft DE X - COMPONENT van de resulterende snelheid in grootte en richting gelijk aan $\vec{v}_x$.

II OP WEG NAAR DE TOP T neemt DE Y-COMPONENT van de resulterende snelheid (lineair) AF in + richting.

III IN DE TOP T is de Y-COMPONENT van de resulterende snelheid NUL.

NB — DE RESULTERENDE SNELHEID IS IN DE TOP ECHTER N I E T N U L;

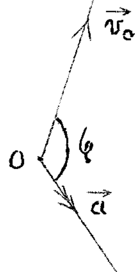
NB — DE RESULTERENDE SNELHEID IN DE TOP IS IN GROOTTE EN RICHTING GELIJK AAN $\vec{v}_x$.
Dus:

NB — $$\boxed{\vec{v}_{TOP}^{\,res} = \vec{v}_x.}$$

IV NA HET PASSEREN VAN DE TOP neemt DE Y-COMPONENT van de resulterende snelheid (lineair) TOE in - richting.

§ 3. Het samenstellen van een EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING en een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING ZONDER BEGINSNELHEID.

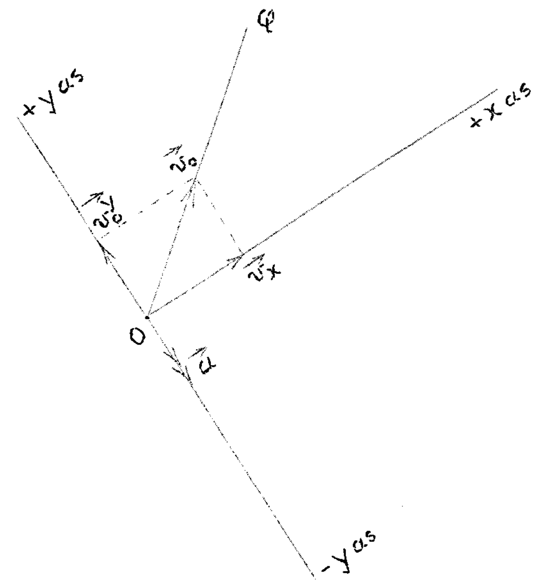
Punt 1) Het probleem.



We beschouwen nu het geval dat een massapunt in het vlak van tekening tegelijkertijd deelneemt aan een EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING met SNELHEIDSVECTOR $\vec{v}_o$ en aan een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING met VERSNELLINGSVECTOR $\vec{a}$.
De hoek φ tussen de vectoren $\vec{v}_o$ en $\vec{a}$ is willekeurig.
We vragen weer naar de resulterende baan.

Punt 2) <u>Stelling.</u> Neemt een massapunt deel aan een EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING met SNELHEIDSVECTOR $\vec{v}_0$ en aan een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING ZONDER BEGINSNELHEID met VERSNELLINGSVECTOR $\vec{a}$, dan is de resulterende baan EEN PARABOOL IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN, die in de oorsprong RAAKT aan de vector $\vec{v}_0$ en waarvan de symmetrie as evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de vector $\vec{a}$.

<u>Bewijs.</u>



We kiezen de oorsprong van het coördinatenstelsel in O; de negatieve Y-as kiezen we in de richting van $\vec{a}$.
We ontbinden de beginsnelheid $\vec{v}_0$ in een component LANGS DE Y-as en een component LOODRECHT OP de Y-as.
We kiezen de positieve X-as in de richting van deze tweede component van $\vec{v}_0$. We krijgen aldus de in nevenstaande figuur aangegeven situatie.

DE GEGEVEN EENPARIGE BEWEGING langs de lijn OQ met snelheid $\vec{v}_0$ kan nu opgevat worden ALS DE RESULTANTE VAN EEN EENPARIGE BEWEGING LANGS DE + X-as MET SNELHEID $\vec{v}_x$ EN EEN EENPARIGE BEWEGING LANGS DE Y-as MET SNELHEID $\vec{v}_0^y$.

Aldus opgevat, neemt het massapunt in het XOY-vlak dus deel aan DRIE bewegingen, n.l.

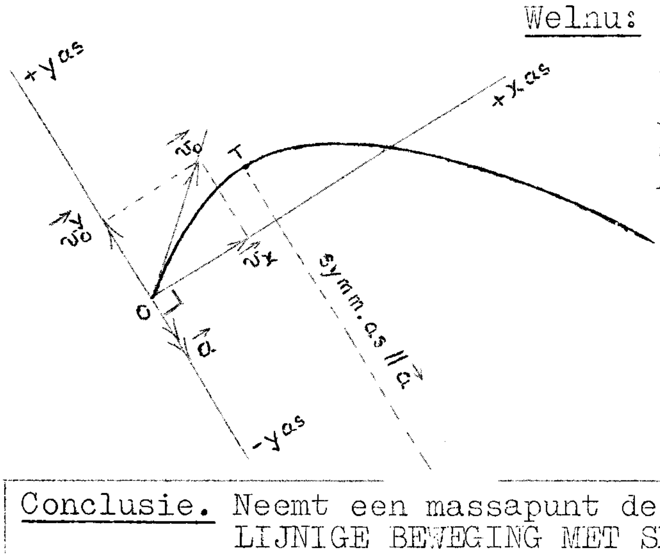
<u>langs de X-as:</u> een eenp. bew. met snelheidsvector $\vec{v}_x$.

<u>langs de Y-as:</u> a) een eenparige beweging met snelheidsvector $\vec{v}_0^y$.

b) een eenparig versnelde beweging zonder beginsnelheid met versnellingsvector $\vec{a}_y$.

De bewegingen a) en b) langs de Y-as vormen SAMEN echter ÉÉN EENPARIG VERANDERLIJKE RECHTLIJNIGE BEWEGING waarvan $\vec{v}_0^y$ de vector van de beginsnelheid is en $\vec{a}$ de vector van de versnelling.

DE RESULTERENDE BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN HET XOY-VLAK KAN DUS OPGEVAT WORDEN ALS HET RESULTAAT VAN DE DEELNAME AAN EEN EENPARIGE BEWEGING LANGS DE + X-as MET SNELHEIDSVECTOR $\vec{v}_x$ EN EEN EENPARIG VERANDERLIJKE BEWEGING LANGS DE Y-as MET BEGINSNELHEID $\vec{v}_0^y$ EN VERSNELLING $\vec{a}$.



<u>Welnu:</u> Volgens § 2 is de RESULTERENDE BAAN EEN PARABOOL IN HET XOY-VLAK, DIE IN DE OORSPRONG RAAKT AAN DE VECTOR $\vec{v}_0$ en waarvan DE SYMMETRIE-AS EVENWIJDIG LOOPT AAN- EN GELIJK GERICHT IS MET DE VECTOR $\vec{a}$.

q.e.d.

<u>Conclusie.</u> Neemt een massapunt deel aan een EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING MET SNELHEIDSVECTOR $\vec{v}_0$ en aan een EENPARIG VERSNELDE RECHTL. BEWEGING ZONDER BEGINSNELHEID MET VERSNELLINGSVECTOR $\vec{a}$, dan is de resulterende baan EEN PARABOOL IN HET VLAK DOOR DE BEWEGINGSASSEN die IN DE OORSPRONG RAAKT aan de vector $\vec{v}_0$ en waarvan de symm.as // loopt aan- en gelijk gericht is met de vector $\vec{a}$.

Opmerking. De coördinaten van de top T zijn:

$$X_{top} = \frac{|v_x| \cdot |v_{o_y}|}{a} \; ; \quad Y_{top} = \frac{|v_{o_y}|^2}{2a}$$

Men kan deze coördinaten dus CONSTRUEREN met behulp van evenredigheids-constructies.

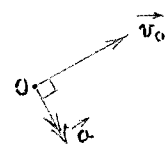
Punt 3) Mogelijke gevallen.

De hoek φ tussen $\vec{v_o}$ en $\vec{a}$ mag iedere waarde hebben tussen 0^o en 180^o. We onderscheiden drie gevallen: φ stomp, φ recht en φ scherp.

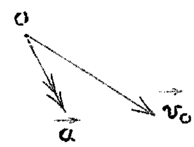
Opgave 30. Schets de parabool in elk van deze gevallen.

φ stomp.

φ recht.



φ scherp.

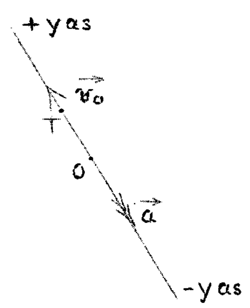


Punt 4) Bijzondere gevallen.

Vraag: Welke baan beschrijft het massapunt als $\angle \varphi = 180^o$ of als $\angle \varphi = 0^o$?

Antw.:

$\angle \varphi = 180^o$.

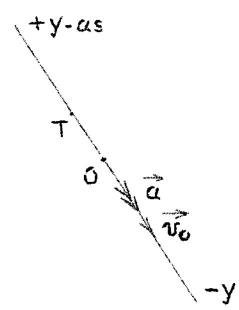


$\vec{v_o}$ en $\vec{a}$ liggen dus op èèn lijn en wijzen in tegengestelde richtingen.
Nemen we deze lijn tot Y-as met de richting van $\vec{a}$ tot negatieve richting, dan luidt de plaatsfunctie:

$$Y_t = + |v_o|\, t - \tfrac{1}{2} |a|\, t^2 \text{ m.}$$

Aanvankelijk beweegt het m.pt. dus eenparig vertraagd in de +Y richting tot de snelheid nul is (dit is in T), keert dan om en beweegt verder eenparig versneld in de - Y richting.
DE BAAN VAN HET MASSAPUNT BESTAAT DUS UIT DE HALFLIJN $T \rightarrow 0 \rightarrow \infty$

$\angle \varphi = 0^o$.



$\vec{v_o}$ en $\vec{a}$ liggen dus op èèn lijn en wijzen in dezelfde richting.
Nemen we deze lijn tot Y-as met de richting van $\vec{a}$ tot negatieve richting, dan luidt de plaatsfunctie:

$$Y_t = - |v_o|\, t - \tfrac{1}{2} |a|\, t^2 \text{ m.}$$

Nemen we aan, dat het m.pt. zich van $t = -\infty$ volgens deze plaatsfunctie bewogen heeft, dan is het massapunt VÓÓR de waarneming begon eenparig vertraagd van $Y = -\infty$ naar het punt T gegaan, in T omgekeerd en eenparig versneld van T naar 0. Op het ogenblik dat het massapunt 0 passeert begint de waarneming en beweegt het massapunt verder eenparig versneld met beginsnelheid in de - Y richting.
DE BAAN VAN HET MASSAPUNT BESTAAT DUS UIT DE HALFLIJN $T \rightarrow 0 \rightarrow \infty$

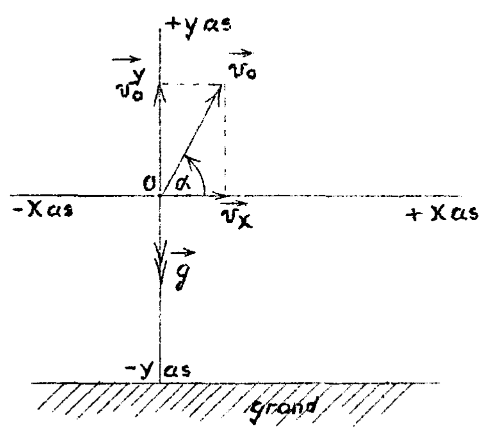
In de gevallen dat $\angle \phi = 180^\circ$ en $\angle \phi = 0^\circ$ is de parabool van punt 2) dus "samengeschrompeld" tot EEN HALFLIJN.

Opmerking. Deze bijzondere gevallen zijn "erg gewild" in eindexamen- en proefwerk opgaven!

NB WANNEER DUS VAN EEN BEWEGEND MASSAPUNT $\vec{v}_o$ EN $\vec{a}$ GEGEVEN ZIJN DIENT MEN NAUWKEURIG TE ONDERZOEKEN OF $\vec{v}_o$ en $\vec{a}$ NIET LANGS EENZELFDE LIJN GERICHT ZIJN!!

§ 4. DE KOGELBAAN ONDER INVLOED VAN DE ZWAARTEKRACHT ALLEEN.

Punt 1) Het probleem.



We beschouwen nu het geval dat een kogel (massapunt) vanaf de grond of vanuit een punt op enige hoogte boven de grond onder een hoek α met de horizon (elevatiehoek) met een snelheid $\vec{v}_o$ wordt opgeschoten.
WE VERONDERSTELLEN DAT ER TIJDENS DE BEWEGING DOOR DE LUCHT OP DE KOGEL GEEN ANDERE KRACHT WERKT DAN DE ZWAARTE KRACHT, DIE (ongeacht het gewicht van de kogel) AAN DE KOGEL EEN VERTICAAL NAAR BENEDEN GERICHTE VERSNELLING GEEFT TER GROOTTE VAN g $^m/sec^2$.

We vragen naar de plaats- en snelheidsfuncties van de kogel in de horizontale- en de verticale richting, naar de baan van de kogel door de lucht en naar de resulterende snelheidsvector op een gegeven tijdstip.

Punt 2) De plaats- en snelheidsfuncties in de horizontale- en verticale richting.

We kiezen de oorsprong van het coördinatenstelsel in het punt van waaruit de kogel wordt opgeschoten; de verticaal door dat punt kiezen we tot Y-as en wel zo, dat $\vec{g}$ gericht is volgens de NEGATIEVE Y-as.
We ontbinden de vector van de beginsnelheid $\vec{v}_o$ in een horizontale- en in een verticale component, zodat dus

$$\vec{v}_o = \vec{v}_o^{\,y} + \vec{v}_x$$

De X-as kiezen we langs $\vec{v}_x$ en wel zo, dat $\vec{v}_x$ in de POSITIEVE X-richting wijst.

Vraag: Wat valt er te zeggen van de beweging in de X-richting?

Antw.: In de X- richting werkt er op de kogel GEEN KRACHT:

DE BEWEGING IN DE X - RICHTING IS DUS EENPARIG.

DE PLAATSFUNCTIE IN DE X - RICHTING luidt dus:

$$\boxed{X_t = v_x \cdot t \text{ meter}}$$

Hierin is $\boxed{v_x = v_o \cos\alpha \;\; ^m/s.}$

Vraag: Wat valt er te zeggen van de beweging in de Y - richting?

Antw.: In de Y - richting is de beweging EENPARIG VERANDERLIJK met BEGINSNELHEID $\vec{v}_o^{\,y}$ en VERSNELLING $\vec{g}$.

DE PLAATSFUNCTIE IN DE Y-RICHTING luidt dan:

$$Y_t = v_o^y t - \tfrac{1}{2}|g|t^2 \text{ meter}$$

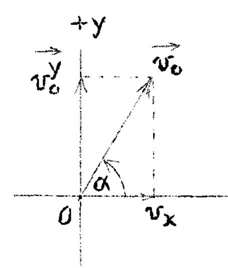
MITS

WE VOOR v_o^y INVULLEN:

$$v_o^y = v_o \sin \alpha \ \ {}^m/\text{sec.}$$

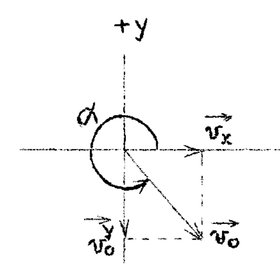
waarbij α de hoek is die de vector $\vec{v}_o$ maakt met de + X - as.

Dus.



α in 1° kwadrant:

v_o^y is +



α in 4° kwadrant:

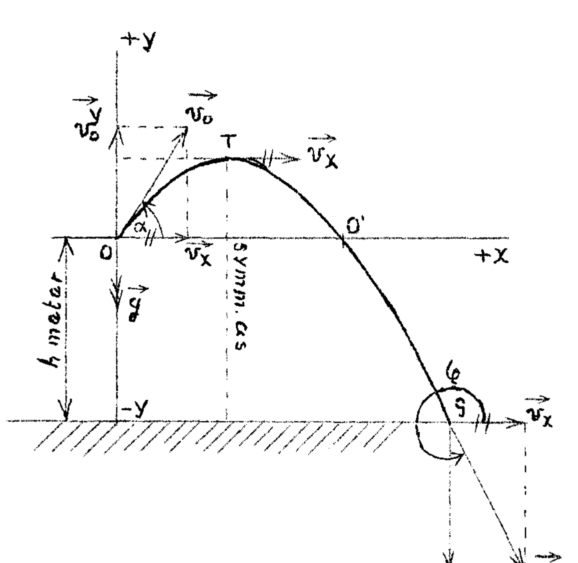
v_o^y is -

<u>Vraag:</u> <u>Hoe luiden dus de plaatsfuncties en de snelheidsfuncties in de X- en Y - richting?</u>

<u>Antw.:</u>

X - richting	Y - richting
$X_t = v_x \cdot t$ meter	$Y_t = v_o^y \cdot t - \frac{1}{2}\lvert g\rvert t^2$ m.
$v_t^x = v_x$ ${}^m/\text{sec}$	$v_t^y = v_o^y - \lvert g\rvert t$ ${}^m/\text{s.}$

Punt 3) <u>De baan van de kogel.</u>



We elimineren de tijd uit de plaatsfunctie: $t = \dfrac{X_t}{v_x}$
Dan volgt:

$$Y_t = \frac{v_o^y}{v_x} \cdot X_t - \frac{1}{2}\frac{|g|}{v_x^2} \cdot X_t^2$$

<u>Conclusie:</u>

De resulterende baan van de kogel is een BERGPARABOOL, die IN DE OORSPRONG RAAKT AAN DE VECTOR $\vec{v}_o$ en waarvan de symmetrie-as // loopt aan- en gelijk gericht is met de vector $\vec{g}$.

<u>Gevraagd:</u> a) <u>De stijgtijd.</u>

<u>Oplossing.</u> Dit is de tijd die de kogel nodig heeft om van O naar T te gaan.

In de top T is $v_t^y = 0$

Dus $0 = v_0^y - |g| \cdot t$

dus: $t = \dfrac{v_0^y}{|g|}$ sec.

<u>Gevraagd:</u> b) <u>De coördinaten van de top T.</u>

<u>Oplossing.</u> De kogel bereikt de top op het tijdstip

$t = \dfrac{v_0^y}{|g|}$ sec.

Dus:

$$X_{top} = \frac{v_x \cdot v_y}{|g|} \text{ meter.}$$

$$Y_{top} = v_0^y \cdot \frac{v_0^y}{|g|} - \tfrac{1}{2}|g| \cdot \frac{(v_0^y)^2}{|g|^2} = \frac{(v_0^y)^2}{|g|^2} \text{ m.}$$

<u>Gevraagd:</u> c) <u>De snelheid in de top.</u>

<u>Oplossing.</u> In de top is $v_{top}^x = v_x$

$v_{top}^y = 0$

<u>N.B.</u> <u>Conclusie.</u> De snelheid in de top is in grootte en richting gelijk aan $\vec{v_x}$.

<u>Gevraagd:</u> d) <u>Op welk tijdstip komt de kogel in O'</u> (zie fig.)

<u>Oplossing.</u> In O' is $Y_t = 0$

Dus: $0 = v_0^y \cdot t - \tfrac{1}{2}|g| \cdot t^2$

$0 = t(v_0^y - \tfrac{1}{2}|g| \cdot t)$

$t = 0$ voldoet niet. Dan is de kogel in O.

$t = \dfrac{2v_0^y}{|g|}$ sec.

We merken op dat de stijgtijd $(O \rightarrow T)$ gelijk is aan de valtijd $(T \rightarrow O')$

<u>Gevraagd:</u> e) <u>De X- coördinaat van het punt O'.</u>

<u>Oplossing.</u> De kogel is in O' op het tijdstip $t = \dfrac{2v_0^y}{|g|}$ s.

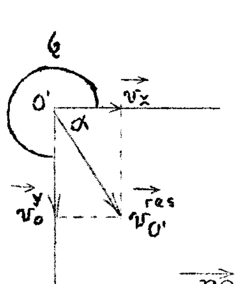
Dus:

$$X_{O'} = 2\,\frac{v_x v_0^y}{|g|} \text{ meter}$$

De X-coördinaat van O' is dus het dubbele van de X- coördinaat van T.

<u>Gevraagd:</u> f) <u>De resulterende snelheid in O'</u>

<u>Oplossing.</u> De kogel is in O' op het tijdstip $t = \dfrac{2v_0^y}{|g|}$ s.



$v_{O'}^x = v_x$ m/sec.

$v_{O'}^y = v_0^y - |g| \cdot \dfrac{2v_0^y}{|g|} = v_0^y - 2v_0^y = -v_0^y$ m/sec.

$\overrightarrow{v_{O'}^{res}}$

<u>grootte</u> $(v_{O'}^{res})^2 = (v_x)^2 + (-v_0^y)^2 = v_x^2 + (v_0^y)^2 = v_0^2$

Dus $\boxed{v_{O'}^{res} = v_0}$

<u>richting</u> $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-v_0^y}{v_x} = -\operatorname{tg} \alpha$ dus $\boxed{\varphi = 360^\circ - \alpha}$

Conclusie. In O' heeft de snelheid dus DEZELFDE GROOTTE als in O; de hoek die de snelheidsvector in O' maakt met de + X as is gelijk aan $\varphi = 360^\circ - \alpha$.

Vraag. $(v_{O'}^{res})^2 = v_o^2$. Moeten we hier niet uit besluiten dat $v_{O'}^{res} = - v_o$? De snelheid in O' is immers schuin naar boven gericht en in O' schuin naar beneden!

Antw.: De stelling van Pythagoras geeft ons alleen de GETALLEN WAARDE van een zijde van een driehoek. Uit $(v_{O'}^{res})^2 = v_o^2$ mogen we dus alleen maar besluiten DAT DE GETALLENWAARDE VAN $v_{O'}^{res}$ GELIJK IS AAN DE GETALLEN WAARDE VAN v_o.

Dus $v_{O'}^{res} = v_o$.

Gevraagd: g) Op welk tijdstip komt de kogel in het punt G (zie fig) aan?

Oplossing. De Y- coördinaat van het punt G is $-|h|$ meter.

We moeten t dus oplossen uit de vergelijking:

$$-|h| = v_o^y t - \tfrac{1}{2}|g|t^2 \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{2}|g|t^2 - v_o^y t - |h| = 0$$

Zijn t_1 en t_2 de wortels van deze vierkants-vergelijking, dan is

$$t_1 t_2 = -\frac{2|h|}{|g|} = \text{negatief.}$$

We vinden dus als oplossing een positieve- en een negatieve wortel: De positieve wortel geeft het tijdstip aan waarop de kogel in G aankomt; de negatieve wortel geeft het tijdstip vóór de waarneming aan waarop de kogel de lijn $y = -|h|$ meter zou gepasseerd zijn als deze zich van eeuwigheid volgens vergelijking (1) bewogen had.

Gevraagd: h) De schootsverte (d.i. de X - coörd. van G)

Oplossing: We moeten dan de positieve wortel van (1) substitueren in de vergelijking

$$X_t = v_x \cdot t \text{ meter.}$$

Gevraagd: i) Met welke snelheid treft de kogel de grond?

Oplossing. De X- component van de trefsnelheid is v_x m/sec.

De Y- component van de trefsnelheid vinden we door de positieve wortel van (1) te substitueren in de snelheidsfunctie in de Y - richting.

$$v_{grond}^y = v_o^y - |g| \cdot t_{grond} \text{ m/sec.}$$

We vinden dan:

$\vec{v}_{grond}$:
- grootte $v_{gr} = \sqrt{v_x^2 + (v_{grond}^y)^2}$ m/sec.
- richting Is φ de hoek die $\vec{v}_{grond}$ maakt met de + X-as, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{grond}^y}{v_x}$$

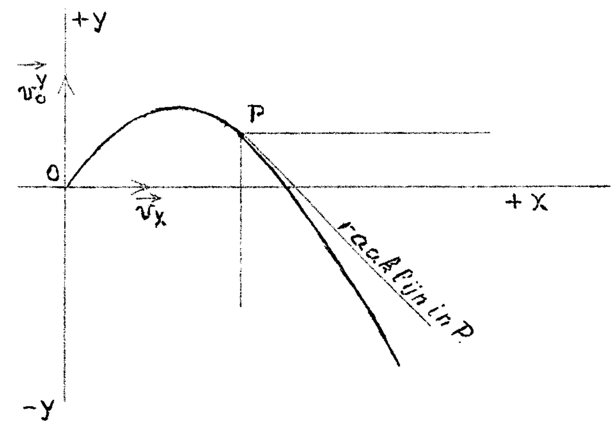
NB. $\vec{v}_{grond}$ moet in G RAKEN aan de parabool!

<u>Vraag.</u> Is het mogelijk, dat de kogel de grond loodrecht treft?

<u>Antw.:</u> HEEL BESLIST NIET! Want de X- comp. van de tref snelheid met de grond is altijd in grootte en richting gelijk aan $\vec{v}_x$.

<u>Gevraagd:</u> j) <u>Construeer de vector van de resulterende snelheid in het punt P (zie fig.) van de parabool.</u>

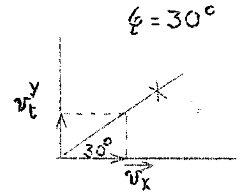
<u>Constructie.</u>



<u>Gevraagd:</u> k) <u>Op welk tijdstip maakt de resulterende snelheidsvector een hoek van 30^o met de + X-as; wanneer een hoek van 330^o?</u>

<u>Oplossing.</u>

$\varphi = 30°$

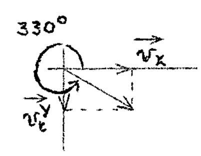


Dan is $v_t^y = +\frac{1}{3} v_x \sqrt{3}$

We moeten dus t oplossen uit:

$$+\frac{1}{3} v_x \sqrt{3} = v_o^y - |g|\, t$$

$\varphi = 330°$



Dan is $v_t^y = -\frac{1}{3} v_x \sqrt{3}$

We moeten dus t oplossen uit:

$$-\frac{1}{3} v_x \sqrt{3} = v_o^y - |g|\, t$$

<u>Opmerkingen.</u>

a) Met nadruk wijzen we er op, dat ALLE VRAGEN OVER DE KOGELBAAN, vragen zijn over het vergelijkingenschema:

X - richting	Y - richting
$X_t = v_x \cdot t$ meter	$Y_t = v_o^y t - \frac{1}{2} \lvert g \rvert t^2$ meter waarbij $v_o^y = v_o \sin \alpha_o$
$v_t^x = v_x$ $^m/sec.$	$v_t^y = v_o^y - \lvert g \rvert t$ $^m/sec.$

<u>NB.</u> BEGIN DE OPLOSSING VAN EEN SOM OVER DE KOGELBAAN DUS ALTIJD MET DE OPSTELLING VAN DIT VERGELIJKINGEN SCHEMA.

b) <u>$v_o^y = v_o \sin \alpha$ $^m/sec.$</u>

α kan iedere waarde hebben van 0^o tot 360^o. Met betrekking tot v_o^y zijn er dus drie mogelijkheden:

1^o) <u>v_o^y is positief:</u> In de oorsprong 0 is de kogel dan op weg naar de top. We kunnen zeggen, dat 0 dan op de stijgende tak van de bergparabool ligt. (zie fig.)

2^o) <u>$v_o^y = 0$</u> : 0 ligt dan in de top van de parabool. De snelheid in 0 is dan $\vec{v}_x$. (zie figuur)

3°) v_o^y is negatief: O ligt dan op de dalende tak van de bergparabool. In bovenstaande figuur (blz. 85) zou O' dan de oorsprong kunnen zijn.

HOOFDSTUK III. DE KROMLIJNIGE BEWEGING IN EEN PLAT VLAK.

§ 1) Inleiding.

In hoofdstuk I hebben we de RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN bestudeerd: we hebben toen gezien dat men de SNELHEIDSFUNCTIE v_t vindt door de PLAATSFUNCTIE s_t te differentiëren naar de tijd, en de VERSNELLINGS - FUNCTIE a_t door de snelheidsfunctie te differentiëren naar de tijd. We hebben er toen echter bij herhaling en met nadruk op gewezen, dat de theorie van dat hoofdstuk I alleen geldig was voor EEN RECHTLIJNIGE beweging.

In het onderhavige hoofdstuk III beschouwen we het geval dat een massapunt volgens een gegeven plaatsfunctie beweegt langs een VAN TE VOREN WILLEKEURIG GEKOZEN, IN EEN PLAT VLAK GELEGEN KROMLIJNIGE BAAN.
Van de baan veronderstellen we dus:

1°) dat deze IN EEN PLAT VLAK ligt. Dit vlak zullen we HET BEWEGINGSVLAK noemen. Meestal kiezen we daarvoor het vlak van tekening.

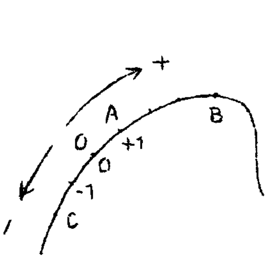
2°) dat deze KROMLIJNIG is. Hier krijgen we dus te maken met het (in de opmerkingen van hoofdstuk I aangeduidde) onderscheid tussen DE VERPLAATSING LANGS DE BAAN en DE VERPLAATSING TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK.

3°) dat deze WILLEKEURIG GEKOZEN mag zijn.

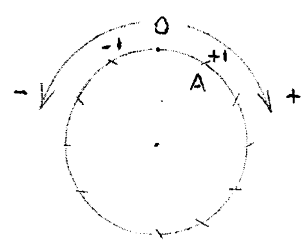
In de nu volgende paragrafen gaan we de bewegingsleer van hoofdstuk I UITBREIDEN voor deze kromlijnige bewegingen: In par. 2 zullen we vragen naar DE SNELHEID die het massapunt daarbij op een gegeven ogenblik heeft TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK; in par. 3 naar DE VERSNELLING die het massapunt op een gegeven ogenblik heeft TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK.
Het zal ons daarbij blijken, dat de bewegingsleer van hoofdstuk I onverkort geldig blijft VOOR DE SNELHEID EN DE VERSNELLING TEN OPZICHTE VAN DE BAAN.

§ 2. DE SNELHEID t.o.v. HET BEWEGINGSVLAK op een bepaald ogenblik.

Punt 1) De plaatsbepaling op de kromlijnige baan.



De plaatsbepaling op de kromlijnige baan geschiedt op dezelfde wijze als bij de rechtlijnige beweging: We kiezen een willekeurig punt O van de baan tot oorsprong van een coördinatenstelsel dat LANGS DE GEKROMDE BAAN ligt. We geven duidelijk aan in welke richting de baancoördinaten positief en in welke richting deze negatief zijn.
Heeft in nevenstaande figuur het punt A de baancoördinaat + 1 meter, dan is de baancoördinaat van B + 4 meter, en de baancoördinaat van C - 2 meter.

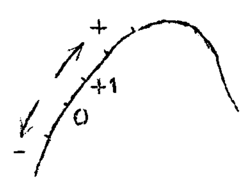


In de sommen komt het vaak voor dat de baan een cirkel is. Het punt met baancoörd. b.v. + 3 meter vindt men dan door vanuit 0 in positieve richting LANGS DE CIRKELOMTREK een booglengte van 3 meter af te leggen.

Opgave 31. Gegeven. Het punt A op bovenstaande cirkelomtrek heeft de baan coördinaat + 1 meter. De lengte van $\frown AB$ is $\frac{1}{12}$ van de cirkelomtrek.

Gevraagd. Wijs de volgende punten aan: B (+ 7 meter); C(+12 meter); D(+13 meter), E(+15 meter); F(- 1 meter); G(-11 meter); H(-12 meter); K(-15 meter).

Punt 2) De plaatsbepaling IN HET BEWEGINGSVLAK.

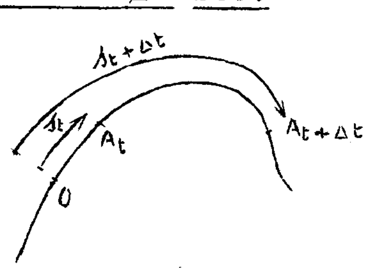


Als de baan in het bewegingsvlak vast ligt, ligt dus ook de plaats van ieder baanpunt vast. Beweegt nu een massapunt volgens een gegeven plaatsfunctie langs de gegeven kromme baan, DAN BEPAALT DEZE PLAATSFUNCTIE OP IEDER OGENBLIK OOK DE PLAATS VAN HET MASSAPUNT IN HET BEWEGINGSVLAK.

Het is van wezenlijk belang dat we dit goed inzien, want als we de snelheid willen bepalen die het massapunt op een gegeven ogenblik heeft TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK moeten we de beweging niet zien als een beweging LANGS DE BAAN maar als EEN BEWEGING IN HET BEWEGINGSVLAK,

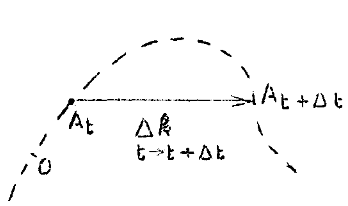
Punt 3) DE VERPLAATSING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t \rightarrow t + \Delta t$ sec.

N.B.



In nevenstaande figuur stelt de kromme lijn de baan van het massapunt IN HET BEWEGINGSVLAK voor: Op het tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt A_t; op het tijdstip $t+\Delta t$ sec. in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$

WE VRAGEN NU NAAR DE RESULTERENDE VERPLAATSING VAN HET MASSAPUNT TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK.



Bij deze vraag moeten we de baanpunten A_t en $A_{t+\Delta t}$ dus beschouwen ALS PUNTEN VAN HET BEWEGINGSVLAK. De resulterende verplaatsing die het massapunt TEN OPZICHTE VAN HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t \rightarrow t+\Delta t$ sec. heeft ondergaan is dus IN GROOTTE gelijk aan de lengte van DE BAANKOORDE $A_tA_{t+\Delta t}$ en is GERICHT van het punt A_t naar het punt $A_{t+\Delta t}$.

Deze resulterende verplaatsing heeft dus EEN GROOTTE en EEN RICHTING: HET IS DUS EEN VECTOR.

In de toekomst zullen we niet meer spreken van de RESULTERENDE verplaatsing t.o.v. het bewegingsvlak, maar kortweg van DE verplaatsing t.o.v.h.bewegingsvlak in een bepaald tijdsinterval.

Definitie. Onder DE VERPLAATSING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK van een massapunt in het tijdsinterval van $t \rightarrow t+\Delta t$ sec. verstaat men DE VECTOR DIE VANUIT HET BAANPUNT OP HET TIJDSTIP t sec. (dus A_t) GERICHT IS NAAR- EN REIKT TOT HET BAANPUNT OP HET TIJDSTIP $t+\Delta t$ sec. (dus $A_{t+\Delta t}$)

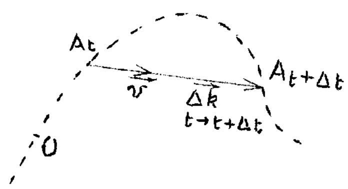
Benaming. Deze vector noemt men DE VERPLAATSINGSVECTOR IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \rightarrow t+\Delta t$ sec.

Notatie: De verplaatsingsvector in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ s. wordt in de tekst aangeduid door het symbool

$$\underset{t \to t+\Delta t}{\overrightarrow{\Delta k}}$$

Dimensie. De grootte van de verplaatsingsvector wordt uitgedrukt in meter.

Punt 4) DE GEMIDDELDE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in een gegeven tijdsinterval.



In nevenstaande figuur is de vector $\underset{t \to t+\Delta t}{\overrightarrow{\Delta k}}$ dus de verplaatsingsvector in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

Vraag: Welke snelheid ZOU het massapunt t.o.v. het bewegingsvlak GEHAD HEBBEN als bij deze verplaatsingsvector DE BEWEGING IN HET BEWEGINGSVLAK EENPARIG EN RECHTLIJNIG GEWEEST WAS?

Antwoord. Dan zou het massapunt in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. LANGS DE RECHTE $A_t A_{t+\Delta t}$ EENPARIG van het punt A_t naar het punt $A_{t+\Delta t}$ zijn gegaan.

DE SNELHEIDSVECTOR T.O.V HET BEWEGINGSVLAK was dan dus gericht langs de lijn $A_t A_{t+\Delta t}$ van A_t naar $A_{t+\Delta t}$ en in grootte gelijk aan $\frac{\Delta k}{\Delta t}$ m/sec.

Stellen we deze snelheidsvector voor door $\vec{v}$, dan zou dus

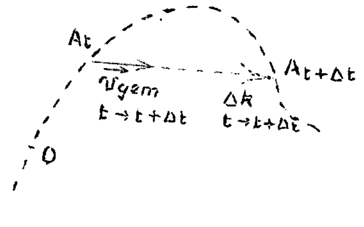
$$\vec{v} \begin{cases} \text{grootte:} \quad v = \dfrac{\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta k}}{\Delta t} \ \text{m/sec.} \\ \text{richting: gelijk gericht met } \underset{t \to t+\Delta t}{\overrightarrow{\Delta k}} \end{cases}$$

Vraag: Welke betekenis heeft de aldus gevonden vector $\vec{v}$ voor de gegeven kromlijnige beweging?

Antw.: Bij de rechtlijnige beweging werd het quotient $\dfrac{\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta s}}{\Delta t}$ gedefinieerd als gemiddelde snelheid voor in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.
Zoals we toen hadden opgemerkt was dit eigenlijk DE GEMIDDELDE SNELHEID LANGS DE BAAN in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec., want ΔS was de (RESULTERENDE) VERPLAATSING LANGS DE BAAN $t \to t+\Delta t$ in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.
Nu is in bovenstaande figuur $\underset{t \to t+\Delta t}{\overrightarrow{\Delta k}}$ de (RESULTERENDE) VERPLAATSING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

De bovengenoemde vector $\vec{v} = \left(\dfrac{\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta k}}{\Delta t}\right)$ STELT NU DUS DE GEMIDDELDE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK van het massapunt in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. voor.
We zullen deze vector aanduiden door het symbool $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{v}_{gem}}$

Definitie.



Onder DE GEMIDDELDE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec. verstaat men DE VECTOR DIE

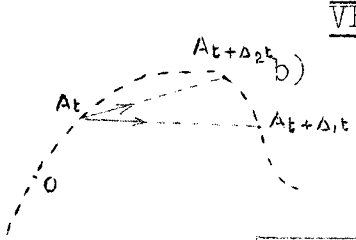
IN GROOTTE gelijk is aan $\dfrac{\underset{t \to t+\Delta t}{\Delta k}}{\Delta t}$ m/s.
EN
IN RICHTING samenvalt met $\underset{t \to t+\Delta t}{\overrightarrow{\Delta k}}$

Dus: $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$

GROOTTE: $v_{\substack{gem. \\ t \to t+\Delta t}} = \dfrac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}$ m/sec.

RICHTING: gelijk gericht met $\vec{\Delta k}_{t \to t+\Delta t}$

Opmerkingen. a) Men noemt de vector $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$ ook wel kortweg DE GEMIDDELDE SNELHEIDSVECTOR in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.



b) Tot goed begrip van het komende, wijzen we er met nadruk op, dat, bij verandering van Δt, de vector $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$ ZOWEL VAN GROOTTE ALS VAN RICHTING VERANDERT.

Voor iedere waarde van Δt moeten
DE GROOTTE en
DE RICHTING
van $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$ OPNIEUW EN AFZONDERLIJK
bepaald worden.

Punt 5) De definitie van DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK op het tijdstip t sec.

Definitie. Onder DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK op het tijdstip t sec. verstaat men
DE LIMIET
waartoe DE GEMIDDELDE SNELHEIDSVECTOR IN HET TIJDSINTERVAL
$t \to t+\Delta t$ sec.
nadert
als Δt nadert tot nul.

Punt 6) THEORETISCHE BEPALING VAN DE LIMIET VAN $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$ ALS ΔT NADERT TOT NUL.

We moeten nu TWEE LIMIETEN bepalen, n.l.:

1°) DE LIMIET VAN DE GROOTTE VAN $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$

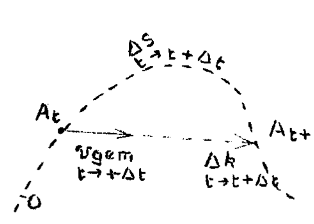
2°) DE LIMIET VAN DE RICHTING VAN $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$

→ ad 1°) DE LIMIET VAN DE GROOTTE VAN $\vec{v}_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}}$ ALS $\Delta t \to 0$

Oplossing.

$$v_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}} = \frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \text{ m/sec.}$$

We passen nu een KUNSTGREEP toe:



$$v_{\substack{gem \\ t \to t+\Delta t}} = \frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta S_{t+\Delta t}}{\Delta S_{t \to t+\Delta t}} =$$

$$\frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta S_{t \to t+\Delta t}} \cdot \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \text{ m/sec.}$$

Hierin is $\Delta S_{t \to t+\Delta t} = S_{t+\Delta t} - S_t$ meter,

dus de verplaatsing LANGS DE BAAN in het tijds interval van $t \to t + \Delta t$ sec.

Dus:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{gem\ t \to t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta S_{t \to t+\Delta t}} \cdot \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \quad {}^{m}/sec.$$

Dus:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{gem\ t \to t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta S_{t \to t+\Delta t}} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \quad {}^{m}/sec.$$

Welnu:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta k_{t \to t+\Delta t}}{\Delta S_{t \to t+\Delta t}} = 1.$$ Dit wordt in de wiskunde bewezen.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v_t \ {}^{m}/sec.$$ Dit is dus dezelfde snelheid als het massapunt op het tijdstip t sec. zou gehad hebben als de baan recht was.

① Conclusie:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{gem\ t \to t+\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v_t \ {}^{m}/sec.$$

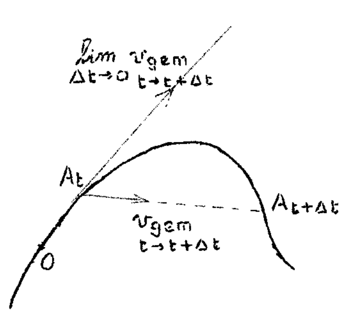
→ ad 2°) DE LIMIET VAN DE RICHTING VAN $\vec{v}_{gem\ t \to t+\Delta t}$ ALS $\Delta t \to 0$

Oplossing.

Als $\Delta t \to 0$ nadert het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ tot het baanpunt A_t:
In de limiet ligt $A_{t+\Delta t}$ tegen het baanpunt A_t aan. De halflijn $A_tA_{t+\Delta t}$ valt dan langs de raaklijn A_t aan de baan.

② Conclusie: DE LIMIET VAN DE RICHTING VAN $\vec{v}_{gem\ t \to t+\Delta t}$ als $\Delta t \to 0$ IS DE RICHTING VAN DE HALFRAAKLIJN IN HET BAANPUNT A_t AAN DE GEGEVEN BAAN van het massapunt in het bewegingsvlak.

Conclusie uit 1° en 2°



DE LIMIET VAN VECTOR $\vec{v}_{gem\ t \to t+\Delta t}$ ALS $\Delta t \to 0$ IS EEN VECTOR DIE

1°) IN GROOTTE gelijk is aan

$\left(\frac{ds}{dt}\right)$ op het tijdst. t sec. $= v_t \ {}^{m}/sec$

EN

2°) Waarvan DE RICHTING SAMENVALT MET DE RICHTING VAN DE HALFRAAKLIJN IN HET BAANPUNT A_t AAN DE GEGEVEN KROMLIJNIGE BAAN VAN HET MASSAPUNT.

Vraag: Wat stelt deze limietvector voor?

Antw.: Volgens de definitie van DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK OP HET TIJDSTIP t sec. stelt bovenstaande limietvector dus

DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK

voor van het massapunt op het tijdstip t sec.

Vraag: Wat is in het bovenstaande dus bewezen over DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK van het massapunt op het tijdstip t sec?

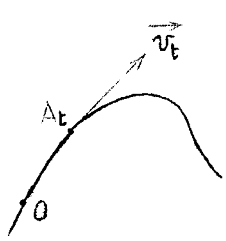
Antw.: TWEE dingen:

1°) Dat de snelheidsvector t.o.v. het bewegingsvlak op het tijdstip t sec.
IN HET BAANPUNT A_t
RAAKT AAN
de gegeven kromlijnige baan van het massapunt.

2°) Dat men DE GROOTTE van deze snelheidsvector moet berekenen ALSOF DE BAAN RECHT WAS,
dus:

$$v_t = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{\text{op het tijdstip t sec.}} \ {}^{m}/\text{sec.}$$

EINDCONCLUSIE.



BEWEEGT EEN MASSAPUNT ZICH VOLGENS EEN GEGEVEN PLAATSFUNCTIE LANGS EEN GEGEVEN, IN EEN PLAT VLAK GELEGEN BAAN, DAN IS
DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK
OP HET TIJDSTIP t SEC.
DE VECTOR DIE

1°) IN GROOTTE gelijk is aan

$$v_t = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{\text{op het tijdst.t sec.}} \ {}^{m}/\text{sec}$$

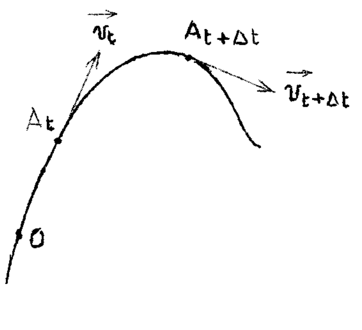
en

2°) IN RICHTING SAMENVALT MET DE HALF-RAAKLIJN in het baanpunt A_t aan de gegeven (kromlijnige) baan.

Opmerking. Bovenstaande eindconclusie komt eigenlijk hier op neer, dat DE SNELHEID die een massapunt op een gegeven ogenblik heeft LANGS DE BAAN (d.i. $\frac{ds}{dt}$ ^{m}/sec.) IDENTIEK IS MET DE SNELHEID T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK op dat ogenblik en omgekeerd.
Bij de behandeling van de kogelbaan hebben we bewezen (zie Hoofdstuk II par. 2 punt 4 b en c) dat DE RESULTANTE van de snelheidsvectoren $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$ in het baanpunt behorende bij het tijdstip t sec. RAAKT AAN de parabool.
Op grond van bovenstaande eindconclusie zijn we er nu zeker van dat deze resultante DE WERKELIJKE SNELHEID is die het massapunt heeft op het tijdstip t = p sec.,want deze resultante is de snelheid t.o.v. het bewegingsvlak en blijkens bovenstaande conclusie is deze identiek met de snelheid LANGS DE BAAN.
In de volgende paragraaf zullen we zien, dat DE VERSNELLING LANGS DE BAAN ($\frac{d^2s}{dt^2}$ ^{m}/sec^2) NIET IDENTIEK IS MET DE VERSNELLING T.O.V. het BEWEGINGSVLAK.

§ 3. DE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK op een bepaald tijdstip.

Punt 1) DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in een bepaald tijdsinterval.



In nevenstaande figuur stelt de kromme lijn een willekeurig gekozen, in het vlak van tekening gelegen baan voor.
We beschouwen het geval dat een massapunt volgens een gegeven plaatsfunctie langs deze baan beweegt: Op het tijdstip t sec..bevindt het massapunt zich in het baanpunt A_t en heeft dan de snelheid $\vec{v}_t$; op het tijdstip $t + \Delta t$ sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt

$A_{t+\Delta t}$ en heeft dan de snelheid $\vec{v}_{t+\Delta t}$.

WE VRAGEN NU NAAR DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

De nadruk ligt hier op de toevoeging "T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK". We vragen nu dus NIET naar de snelheids verandering LANGS DE BAAN. Deze zou zijn

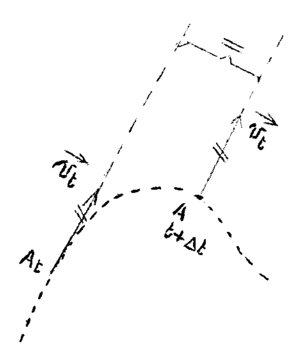
$$v_{t+\Delta t} - v_t \quad {}^{m}/sec.$$

$$\text{dus} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t+\Delta t} - \left(\frac{ds}{dt}\right)_t \quad {}^{m}/sec.$$

Dit verschil geeft ons alleen de snelheidsverandering LANGS DE BAAN TEN GEVOLGE VAN DE SNELHEIDSFUNCTIE LANGS DE BAAN; dit verschil zegt niets over de RICHTINGS VERANDERING DIE DE SNELHEIDSVECTOR NOG BOVENDIEN T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK ONDERGAAT TEN GEVOLGE VAN DE KROMMING VAN DE BAAN.
Dit verschil is dus NIET de gevraagde snelheidsverandering T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

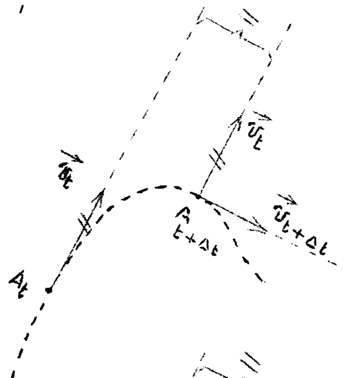
In de definitie van DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec. zal dus zowel de verandering van de snelheid t.g.v. de snelheidsfunctie als de richtingsverandering t.g.v. de kromming van de baan verdisconteerd moeten worden. Om tot deze definitie te komen moeten we de snelheidsvectoren $\vec{v}_t$ en $\vec{v}_{t+\Delta t}$ dus niet alleen zien ALS VECTOREN-LANGS-DE-BAAN, MAAR OOK EN VOORAL ALS VECTOREN-IN-HET-BEWEGINGSVLAK.

DE VRAAG NAAR DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ SEC. IS DUS EEN VRAAG NAAR DE VERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK VAN DE SNELHEIDSVECTOR IN HET TIJDS INTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ SEC.



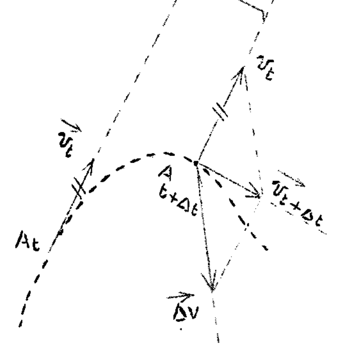
Vraag. Welke grootte en richting zou de snelheidsvector in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ gehad hebben als de snelheidsvector in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK GEEN VERANDERING HAD ONDERGAAN?

Antwoord. Als er niets verandert blijft alles hetzelfde: De snelheidsvector in het baanpunt had dan DEZELFDE GROOTTE en DEZELFDE RICHTING moeten hebben als de snelheidsvector in het baanpunt A_t.
De in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ getekende vector $\vec{v}_t$ had dan dus de snelheidsvector in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ moeten zijn.



Vraag. Welke verandering heeft de snelheidsvector dus T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK ondergaan in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec?

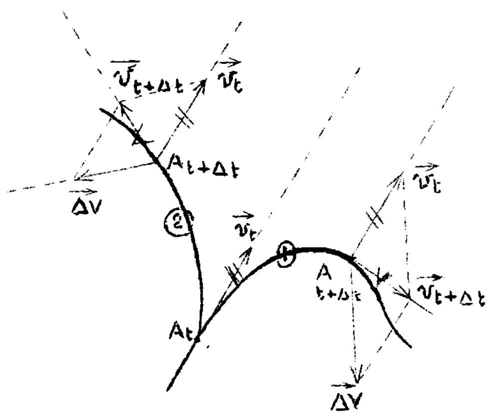
Antwoord. In het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. is de snelheidsvector overgegaan van de vector $\vec{v}_t$ in de vector $\vec{v}_{t+\Delta t}$



Vraag. Welke vectoriële bewerking is er nodig om van de in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ getekende vector $\vec{v}_t$ te komen tot de vector $\vec{v}_{t+\Delta t}$?

Antwoord. We komen vectorieel van de in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ getekende vector $\vec{v}_t$ tot de vector $\vec{v}_{t+\Delta t}$, door bij de vector $\vec{v}_t$ een vector $\vec{\Delta v}$ op te TELLEN, zò, dat vector $\vec{v}_{t+\Delta t}$ de vectorsom wordt van de vectoren $\vec{v}_t$ en $\vec{\Delta v}$.

Dus: $\vec{v}_{t+\Delta t} = \vec{v}_t + \vec{\Delta v}$.



Nadere beschouwing van vector $\vec{\Delta v}$.

In deze vector $\vec{\Delta v}$ is zowel de snelheidsverandering langs de baan t.g.v. de snelheidsfunctie als de richtingsverandering t.g.v. de kromming van de baan verdisconteerd.
Nevenstaande figuur brengt dit in beeld: ① en ② zijn twee kromme banen in het vlak van tekening die volgens dezelfde plaatsfunctie beschreven worden.
$A_tA_{t+\Delta t}$ op baan ① is dus gelijk aan $A_tA_{t+\Delta t}$ op baan ②, en de grootte van $\vec{v}_{t+\Delta t}$ op baan ① is gelijk aan de grootte van $\vec{v}_{t+\Delta t}$ op baan ②

DE VECTOREN $\vec{\Delta V}$ ZIJN VOOR DE BANEN ① en ② ECHTER NIET GELIJK!

Conclusie. De grootte en de richting van de vector $\vec{\Delta v}$ worden bepaald:

1°) door de snelheidsfunctie LANGS DE BAAN

2°) door de vorm van de baan.

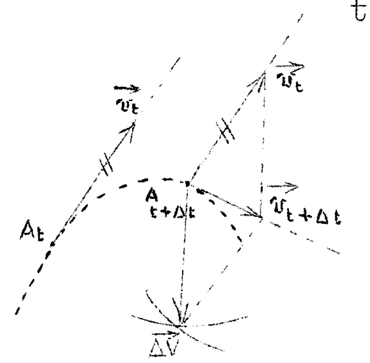
Welnu: Deze vector $\vec{\Delta v}$, die men dus bij de vector $\vec{v}_t$ moet OPTELLEN om de vector $v_{t+\Delta t}$ tot vectorsom te krijgen, noemt men DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec.

DEFINITIE. Onder DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGS VLAK IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL verstaat men
DE VECTOR
DIE MEN BIJ DE SNELHEIDSVECTOR AAN HET BEGIN VAN HET TIJDSINTERVAL
MOET OPTELLEN
OM DE SNELHEIDSVECTOR AAN HET EINDE VAN HET TIJDS INTERVAL
TOT SOMVECTOR TE KRIJGEN.

Notatie. De snelheidsverandering t.o.v. het bewegingsvlak in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec. zullen we aanduiden door het symbool

$$\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$$

De constructie van $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$



1°) Bepaal de baanpunten A_t en $A_{t+\Delta t}$

2°) Bepaal in deze baanpunten de snelheidsvectoren $\vec{v}_t$ resp. $\vec{v}_{t+\Delta t}$. Deze raken in de baanpunten aan de baan.

3°) Construeer in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ de vector $\vec{v}_t$ gelijk, evenwijdig aan- en gelijk gericht met de snelheidsvector A_t.

NB. 4°) CONSTRUEER HET VECTOR-PARALLELOGRAM MET:
I) DE IN $A_{t+\Delta t}$ AANGRIJPENDE VECTOR $\vec{v}_t$ TOT ZIJDE, en
NB. II) DE VECTOR $\vec{v}_{t+\Delta t}$ TOT DIAGONAAL.

NB. 5°) DE DERDE VECTOR VAN DIT VECTOR-PARALLELOGRAM IS DAN DE GEVRAAGDE VECTOR $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

Conclusie. In de figuur op blz. 93 is

vector $\vec{\Delta v}_{t \to t + \Delta t}$

DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t + \Delta t$ sec.
want:

$$\vec{v}_t + \vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t} = \vec{v}_{t+\Delta t}$$

Opmerkingen: a)

$$\vec{v}_t + \vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t} = \vec{v}_{t+\Delta t}$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$\boxed{\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t} = \vec{v}_{t+\Delta t} - \vec{v}_t}$$

We kunnen de snelheidsverandering t.o.v. het bewegingsvlak dus ook definiëren ALS HET VECTORVERSCHIL:

$$\vec{v}_{t+\Delta t} - \vec{v}_t$$

Snelh. VECTOR aan het EINDE v.h. tijdsinterval — Snelh. Vector aan het BEGIN v.h. tijdsinterval

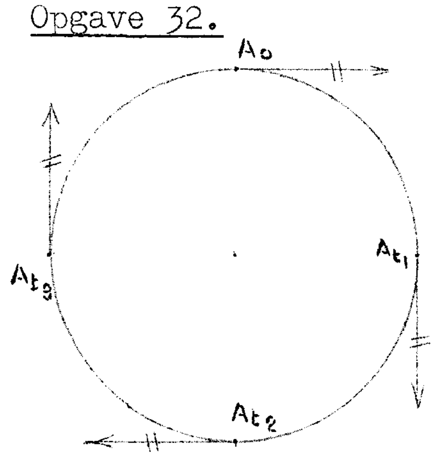
b) Als DE BAAN RECHT is kan de bepaling van de vector $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ herleid worden TOT EEN ALGEBRAÏSCH PROBLEEM (zie blz. 31, punt 3)

c) Wij hebben de vector $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ genoemd DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec.

In de eindexamenopgaven wordt de vector $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ kortweg genoemd:
DE SNELHEIDSVERANDERING IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec.

Als dus in een eindexamenopgave gesproken wordt over DE SNELHEIDSVERANDERING IN EEN TIJDSINTERVAL, wordt daar ALTIJD mee bedoeld: DE SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN DAT TIJDSINTERVAL, dus de VECTOR $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

Opgave 32.



Gegeven: Een massapunt doorloopt de omtrek van de in nevenstaande figuur getekende cirkel EENPARIG met snelheid v m/sec.

Gevraagd: Construeer de vector $\vec{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ voor elk van de volgende tijdsintervallen:

a) $0 \to t_1$ sec.
b) $0 \to t_2$ sec.
c) $0 \to t_3$ sec.
d) $t_2 \to t_3$ sec.

Opmerking: Uit bovenstaande constructies blijkt duidelijk, dat er OOK BIJ DE EENPARIGE BEWEGING EEN SNELHEIDSVERANDERING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK KAN OPTREDEN, n.l. ALS DE BAAN GEKROMD IS.

Vraag: Bij welke beweging treedt er GEEN SNELHEIDSVERANDERING OP?

Antw.: Wil er geen snelheidsverandering optreden, dan moet de beweging aan TWEE VOORWAARDEN voldoen:

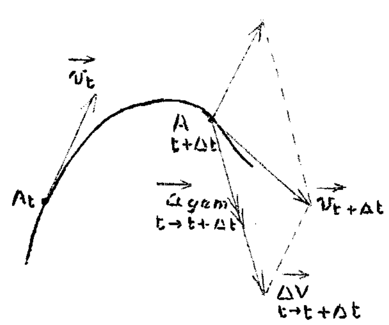
1°) DE BAAN MOET RECHT ZIJN

2°) DE BEWEGING MOET EENPARIG ZIJN.

CONCLUSIE: DE EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING IS DE ENIGE BEWEGING WAARBIJ GEEN SNELHEIDSVERANDERING OPTREEDT.

Punt 2) DE GEMIDDELDE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN EEN BEPAALD TIJDSINTERVAL.

Definitie.



Onder de GEMIDDELDE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t \rightarrow t+\Delta t$ sec. verstaat men

DE VECTOR DIE

- IN GROOTTE gelijk is aan HET QUOTIENT:

$$\frac{\text{DE GROOTTE VAN } \vec{\Delta v}_{t \rightarrow t+\Delta t}}{\Delta t} \ \frac{m}{sec^2}$$ en

- IN RICHTING samenvalt met de richting van $\vec{\Delta v}_{t \rightarrow t+\Delta t}$

Notatie. De gemiddelde versnelling t.o.v. het bewegingsvlak in het tijdsinterval van $t \rightarrow t+\Delta t$ sec. wordt aangeduid door het symbool

$$\vec{a}_{gem\ t \rightarrow t+\Delta t}$$

Dus:

$$\vec{a}_{gem\ t \rightarrow t+\Delta t} = \frac{\vec{\Delta v}_{t \rightarrow t+\Delta t}}{\Delta t}$$

grootte in $\frac{m}{sec^2}$

Punt 3) DE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK OP EEN BEPAALD TIJDSTIP.

Definitie. Onder DE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK OP HET TIJDSTIP t sec. verstaat men DE LIMIET waartoe DE VECTOR VAN DE GEMIDDELDE VERSNELLING T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK genomen over het tijdsinterval van $t \rightarrow t+\Delta t$ sec. nadert, als Δt nadert tot NUL.

Notatie. De versnelling t.o.v. het bewegingsvlak op het tijdstip t sec. wordt aangeduid door het symbool

$$\vec{a}_t$$

Dus:

$$\boxed{\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{gem\; t \to t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\text{grootte in } \frac{m}{sec^2}}$$

NB. Bij het bepalen van de vector $\vec{a}_t$ moet men dus TWEE LIMIETEN bepalen, n.l.

1°) De LIMIET VAN DE GROOTTE van $\vec{a}_{gem\; t \to t+\Delta t}$

2°) De LIMIET VAN DE RICHTING van $\vec{a}_{gem\; t \to t+\Delta t}$

In zijn algemeenheid is dit probleem voor ons onoplosbaar: wij kunnen deze limieten slechts bepalen voor BIJZONDERE GEVALLEN, n.l.

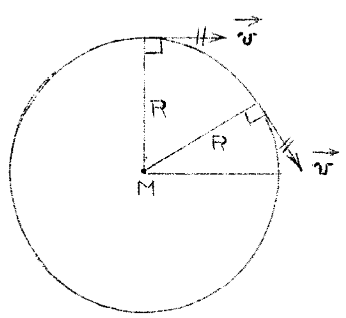
1°) ALS DE BAAN RECHT IS. Dan is $a_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ $^m/sec^2$

2°) BIJ DE EENPARIGE CIRKELVORMIGE BEWEGING.

3°) Bij de KOGELBAAN.

§ 4. DE EENPARIGE CIRKELVORMIGE BEWEGING.

Punt 1) De snelheid langs de baan en de hoeksnelheid.



We beschouwen nu de beweging van een massapunt dat de omtrek van een cirkel EENPARIG doorloopt, d.w.z. in gelijke tijdsdelen bogen van gelijke lengten aflegt. De plaatsfunctie van het massapunt langs de cirkelomtrek is dus een lineaire functie van de tijd.
De snelheid van het massapunt is op ieder ogenblik gericht langs de halfraaklijn in het momentele baanpunt aan de cirkel:
DE SNELHEIDSVECTOR VERANDERT T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK DUS VOORTDUREND VAN RICHTING; OMDAT DE BEWEGING EENPARIG IS VERANDERT DE SNELHEIDSVECTOR ECHTER NIET VAN GROOTTE.

Gegeven: De straal van de cirkel is R meter; de omloopstijd (d.i. de tijd die het massapunt nodig heeft om de cirkelomtrek te doorlopen) is T sec.

Gevraagd: a) Hoe groot is de snelheid langs de baan?

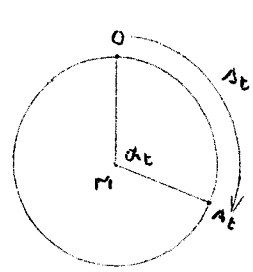
Oplossing: De omtrek van de cirkel is $2\pi R$ meter. Deze wordt in T sec. èèn keer eenparig doorlopen.

Dus $v = \frac{\text{omtrek} \odot}{\text{omloopstijd}} = \frac{2\pi R}{T}$ $^m/sec.$

Dus $$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}\ ^m/sec.}$$ ①

Opmerking. Deze snelheid langs de baan noemt men ook wel de LINEAIRE SNELHEID.

Gevraagd: b) Stel, dat het massapunt zich ten tijde t = 0 in het punt O van de cirkelomtrek bevindt, bepaal dan de baancoördinaat langs de cirkelomtrek op het tijdstip t sec.



Antwoord. $s_t = vt$ meter.

dus: $s_t = \frac{2\pi R}{T}.t$ meter.

Gevraagd: c) Bepaal het aantal RADIALEN van de middelpuntshoek α_t die DE VOERSTRAAL (d.i. de straal van de cirkel die vanuit het middelpunt M wijst naar de MOMENTELE PLAATS van het massapunt op de cirkelomtrek) heeft beschreven in het tijdsinterval van $0 \rightarrow t$ sec.

Oplossing:

$$\alpha_t = \frac{\frown OA_t}{R} = \frac{s_t}{R} = \frac{\frac{2\pi R}{T}t}{R} = \frac{2\pi}{T}.t \text{ radialen}$$

Dus:

$$\boxed{\alpha_t = \frac{2\pi}{T}.t \text{ rad.}} \qquad ②$$

Gevraagd: d) Wat stelt de factor $\frac{2\pi}{T}$ in de vergelijking ② voor?

Antwoord. Uit vergelijking ② volgt, dat de middelpuntshoek α_t een LINEAIRE functie is van de tijd: De middelpuntshoek neemt dus EENPARIG TOE en wel MET $\frac{2\pi}{T}$ rad. PER SECONDE.

De factor $\frac{2\pi}{T}$ in de vergelijking ① stelt dus DE TOENAME VAN DE MIDDELPUNTSHOEK (uitgedrukt in radialen) PER SECONDE voor.

Welnu: DEZE TOENAME PER SECONDE van de middelpuntshoek noemt men DE HOEKSNELHEID van het massapunt.

Definitie. Onder DE HOEKSNELHEID van een massapunt dat de omtrek van een cirkel eenparig doorloopt verstaat men DE TOENAME PER SECONDE van de door de voerstraal beschreven MIDDEL - PUNTSHOEK.

Notatie. De hoeksnelheid wordt aangeduid door de griekse letter omega ω

De dimensie van de hoeksnelheid is $\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$

Conclusie. Doorloopt een massapunt de omtrek van een cirkel eenparig met omloopstijd T sec., dan heeft het massapunt de HOEKSNELHEID

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}} \qquad ③$$

Gevraagd: e) Welk verband bestaat er dus tussen α_t en ω?

Antwoord.

$$\boxed{\alpha_t = \omega.t \text{ rad.}} \qquad ④$$

Gevraagd: f) Welk verband bestaat er tussen de lineaire snelheid v en ω?

Oplossing. $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T}.R = \omega.R \ ^m/\text{sec.}$

Dus:

$$\boxed{v = \omega.R \ ^m/\text{sec.}} \qquad ⑤$$

Opmerkingen. α) De vergelijkingen 1 t/m 5 moeten onvoorwaardelijk van buiten gekend worden.

β) Dat de voerstraal in ieder tijdsinterval van èèn seconde een middelpuntshoek van $\frac{2\pi}{T}$ radialen beschrijft, kunnen we ook aldus inzien:
In T sec. beschrijft de voerstraal een hoek van 2π rad.
Dus in èèn seconde een hoek van $\frac{2\pi}{T}$ rad.

γ) Vergelijking 2 luidt:

$$\alpha_t = \frac{2\pi}{T}\, t \text{ rad.}$$

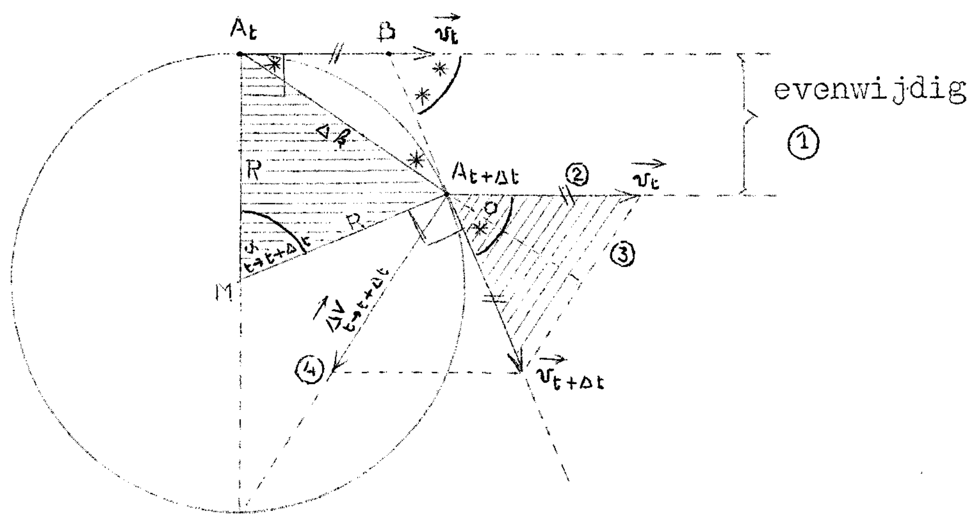
Door differentiëren vinden we:

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = \frac{2\pi}{T}\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$$

Dus:

$$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt}\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}}$$

Punt 2) De snelheidsVERANDERING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in een bepaald tijdsinterval bij de eenparige cirkelvormige beweging.



Gegeven: Een massapunt voert een EENPARIGE BEWEGING uit langs de omtrek van de in bovenstaande figuur getekende cirkel waarvan de straal R meter is.
Op het tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt A_t en is de snelheidsvector $\vec{v}_t$; op het tijdstip $t+\Delta t$ sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$ en is de snelheidsvector $\vec{v}_{t+\Delta t}$.
Omdat de beweging eenparig is, is de grootte van $\vec{v}_t$ GELIJK aan de grootte van $\vec{v}_{t+\Delta t}$.

Gevraagd: a) Construeer de SNELHEIDSVERANDERING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

Constructie. Zie figuur; volg de nummers.
$\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}$ is de gevraagde snelheidsverandering in het tijdsinterval $t \to t+\Delta t$ sec.

Opmerking. De ervaring leert, dat het niet overbodig is om er nogmaals op te wijzen, dat er ook bij een eenparige cirkelbeweging een snelheidsverandering T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK optreedt!

Gevraagd: b)

Gevraagd: b) DE GROOTTE van vector $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ ALS FUNCTIE VAN v, R en Δk (zie fig.)

Oplossing. De gearceerde driehoeken in bovenstaande figuur zijn gelijkvormig volgens het geval (ZHZ), want het zijn twee gelijkbenige $\triangle\triangle$ met gelijke tophoeken.

Dus: $\Delta v_{t \to t+\Delta t} : \Delta k = v : R$

Dus:

$$\boxed{\Delta v_{t \to t+\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \Delta k \ \ {}^{m}/sec.}$$

Opmerking: De grootte van Δk kunnen we berekenen met behulp van de cosinus-regel;

$$\angle \alpha_{t \to t+\Delta t} = \omega \cdot \Delta t \ \text{ rad.}$$

Gevraagd: c) De RICHTING van vector $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

Oplossing. In voorgaande figuur zijn de met een $*$ gemerkte hoeken aan elkaar gelijk.
Dus $\angle B_{\urcorner} = 2.\angle *$
Daar bij twee evenwijdige lijnen gesneden door een der de de overeenkomstige hoeken gelijk zijn, volgt

$$\angle B_{\urcorner} = \angle * + \angle o$$

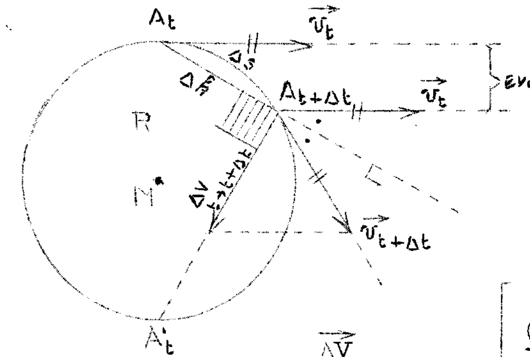
Dus: $\angle * + \angle o = 2.\angle *$
Dus: $\angle o = \angle *$

De halflijn $A_tA_{t+\Delta t}$ is dus bissectrice van $\angle A_{\urcorner}^{t+\Delta t}$, en staat dus loodrecht op de lijn (3) en dus ook loodrecht op $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

Dus:

$$\boxed{\vec{v}_{t \to t+\Delta t} \perp \text{de baankoorde } A_tA_{t+\Delta t}}$$

Conclusie uit a), b) en c).



De vector $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$ is de SNELHEIDS VERANDERING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

$\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

- GROOTTE $\Delta v_{t \to t+\Delta t} = \frac{v}{R} \Delta k \ \ {}^{m}/sec.$
- RICHTING $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t} \perp$ baankoorde $A_tA_{t+\Delta t}$

Opmerking. Uit bovenstaande figuur volgt, dat de lijn $A_{t+\Delta t}.A'_t$ DE DRAGER is van de vector $\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}$

Punt 3) DE GEMIDDELDE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) IN HET TIJDS-INTERVAL VAN $t \to t+\Delta t$ sec. bij een eenparige cirkelvormige beweging.

$$\vec{a}_{gem\; t\to t+\Delta t} = \frac{\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$$

GROOTTE $a_{gem\; t\to t+\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta k}{\Delta t}$ $^{m}/sec^{2}$.

RICHTING $\vec{a}_{gem\; t\to t+\Delta t}$ is GELIJK GERICHT met $\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}$

dus:

$\vec{a}_{gem\; t\to t+\Delta t}$ $\perp$ baankoorde $A_t A_{t+\Delta t}$

Punt 4) DE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) OP HET TIJDSTIP t sec. bij de eenparige cirkelvormige beweging.

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t} \qquad \text{Grootte in } \frac{m}{sec^2}$$

We moeten dus TWEE LIMIETEN bepalen:

1°) DE LIMIET V.D. GROOTTE van $\frac{\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$

Oplossing.

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta v_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta k}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta k}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta k}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta k}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Welnu:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta s} = 1 \text{ (zie wiskunde)}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v.\Delta t}{\Delta t} = v$$

Dus:

$$a_t = \frac{v}{R} \cdot 1 \cdot v = \frac{v^2}{R} \; ^{m}/sec^{2}.$$

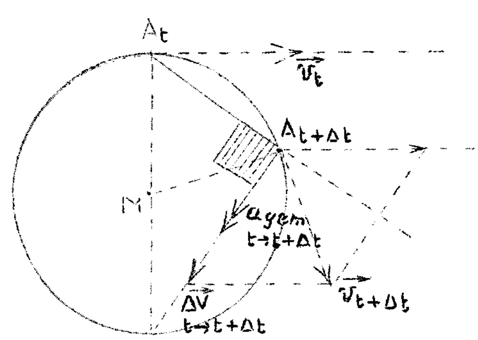
Conclusie.

$$\boxed{a_t = \frac{v^2}{R} \; ^{m}/sec^{2}}$$

Opmerkingen.

α) Het rechter-lid van bovenstaande vergelijking is geen functie van de tijd: a_t heeft dus op ieder ogenblik dezelfde waarde.

2°) DE LIMIET V.D. RICHTING van $\frac{\vec{\Delta v}_{t\to t+\Delta t}}{\Delta t}$



$\vec{a}_{gem\; t\to t+\Delta t}$ staat loodrecht op de baankoorde $A_t A_{t+\Delta t}$, VOOR IEDERE WAARDE VAN Δt.

Als dus $\Delta t \to 0$ blijft $\vec{a}_{gem\; t\to t+\Delta t}$ loodrecht staan op de bijbehorende baankoorde $A_t A_{t+\Delta t}$

Welnu: Als $\Delta t \to 0$ nadert de halflijn $A_t A_{t+\Delta t}$ tot de halfraaklijn in het baanpunt A_t aan de cirkel.

Conclusie.

$\vec{a}_t$ $\perp$ de halfraaklijn in het baanpunt A_t en is naar M TOE gericht.

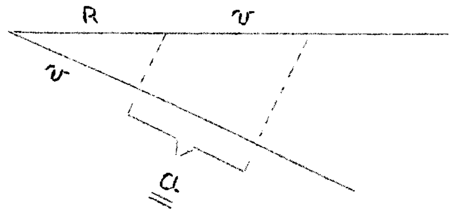
β) a_t is de vierde evenredige van R, v en v.
We kunnen a_t dus CONSTRUEREN met behulp van een evenredigheids constructie.

Gegeven: $\vec{v}$, R

Gevraagd: a

Constructie:

R : v = v : a

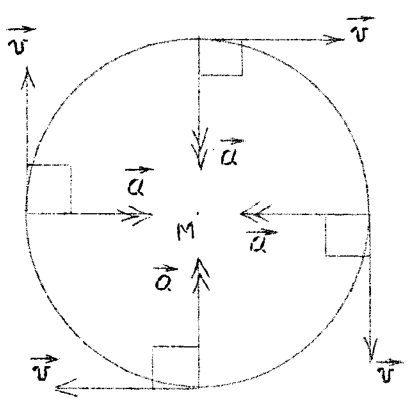


CONCLUSIE.

NB

NB

NB



Doorloopt een massapunt de omtrek van een cirkel met straal R meter EENPARIG met snelheid v m/sec, dan heeft het massapunt op ieder ogenblik T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK een NAAR HET MIDDELPUNT VAN DE CIRKEL TOE gerichte VERSNELLING waarvan DE GROOTTE gelijk is aan

$$a = \frac{v^2}{R} \quad {}^{m}/sec^2.$$

NB Deze formule moet onvoorwaardelijk "van buiten" gekend worden.

Opmerkingen.

α) De versnelling $\vec{a}$ staat dus op ieder ogenblik LOODRECHT OP DE MOMENTELE SNELHEIDSVECTOR. De versnelling heeft dus GEEN INVLOED OP DE GROOTTE VAN DE SNELHEID LANGS DE BAAN, MAAR WEL OP DE RICHTING VAN DE MOMENTELE SNELHEIDSVECTOR IN HET BEWEGINGSVLAK: deze versnelling doet het massapunt de cirkelomtrek doorlopen.

DEZE VERSNELLING HEET: DE CENTRIPETALE VERSNELLING.

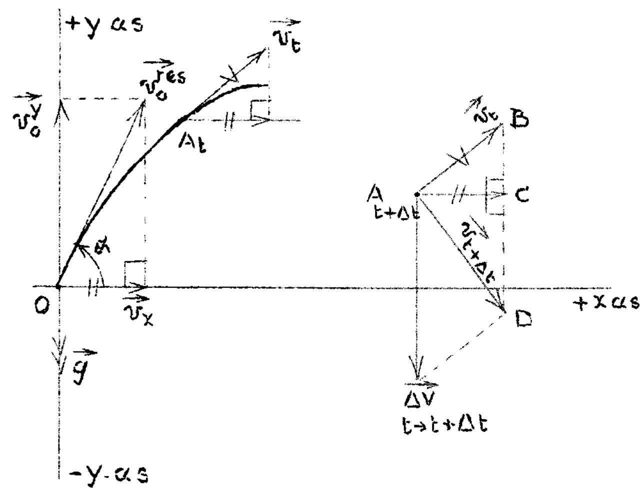
β) Deze centripetale versnelling wordt veroorzaakt door EEN VAN BUITENAF OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHT, die het massapunt dwingt om OP DE CIRKELOMTREK TE BLIJVEN.

DEZE KRACHT NOEMT MEN DE CENTRIPETALE KRACHT.

§ 5. DE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) OP EEN BEPAALD TIJDSTIP BIJ DE KOGELBAAN.

Punt 1) DE SNELHEIDSVERANDERING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in het tijdsinterval van $t \to t + \Delta t$ sec.

Punt 1) <u>DE SNELHEIDSVERANDERING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in het tijdsinterval van t → t + Δt sec.</u>



Nevenstaande parabool is de baan van een kogel die met een beginsnelheid $\vec{v}_0^{res}$ onder een $\angle \alpha$ met de horizon vanuit het punt O wordt op geschoten.
Het schema van de bewegings- en snelheids vergelijkingen is dus:

X-richting	Y-richting
$X_t = \lvert v_x \rvert \cdot t$ m.	$Y_t = + \lvert v_0^y \rvert t - \frac{1}{2} \lvert g \rvert t^2$ m.
$v_0^x = \lvert v_x \rvert$ m/sec.	$v_t^y = + \lvert v_0^y \rvert - \lvert g \rvert t$ m/sec.

Stel, dat de kogel zich op het tijdstip t sec. in het baanpunt A_t bevindt en op het tijdstip t + Δt sec. in het baanpunt $A_{t+\Delta t}$.

<u>Gevraagd:</u> a) <u>Construeer de snelheidsvectoren</u> $\vec{v}_t$ en $\vec{v}_{t+\Delta t}$

<u>Constructie:</u> De snelheidsvectoren $\vec{v}_t$ en $\vec{v}_{t+\Delta t}$ raken in de baanpunten A_t resp. $A_{t+\Delta t}$ aan de parabool en hebben zo'n grootten dat hun X-componenten dezelfde grootte hebben als de X-component van $\vec{v}^{res}$, dus gelijk zijn aan v_x. (Zie ook blz. 78, vraag d)

<u>Gevraagd:</u> b) <u>Construeer de vector</u> $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}} = \vec{v}_{t+\Delta t} - \vec{v}_t$

<u>Constructie:</u> zie fig.

<u>Gevraagd:</u> c) <u>Wat valt er te zeggen over de richting van</u> $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$.

<u>Antwoord:</u> Omdat de vectoren $\vec{v}_t$ en $\vec{v}_{t+\Delta t}$ dezelfde X-component hebben, moeten de <u>punten B, C en D op EEN rechte lijn BD liggen DIE LOODRECHT STAAT OP DE X-as.</u>
Daar de vector $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$ evenwijdig loopt aan de richting B → D volgt, dat de vector $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$:

1°) loodrecht staat op de X-as en

2°) naar beneden gericht is.

> <u>Conclusie:</u> Vector $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$ loopt evenwijdig aan- en is gelijk gericht met de NEGATIEVE Y-as en loopt dus ook evenwijdig aan- en is gelijk gericht met de symmetrie-as van de parabool.

<u>Gevraagd:</u> d) <u>Waar is vector</u> $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$ <u>dus aan gelijk?</u>

<u>Antwoord:</u>

$$\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}} = \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = - \vec{v}_t^y + \vec{v}_{t+\Delta t}^y$$

Dus:

$$\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}} = \vec{v}_{t+\Delta t}^y - \vec{v}_t^y$$

> <u>Conclusie:</u> Vector $\underset{t \to t+\Delta t}{\vec{\Delta v}}$ is de verschilvector <u>VAN DE Y-COMPONENTEN</u> van de snelheids vectoren op de tijdstippen t + Δt en t sec.

Gevraagd: e) Daar deze Y-componenten op èèn lijn liggen kunnen we dit vectorverschil herleiden tot een algebraisch probleem.
Waar is de ALGEBRAISCHE WAARDE van $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$ aan gelijk?

Antwoord.

$$\Delta v_{t \to t+\Delta t} = v^y_{t+\Delta t} - v^y_t \quad {}^m/sec.$$

Welnu:

$$v^y_{t+\Delta t} = +|v^y_0| - |g|(t+\Delta t) = +|v^y_0| - |g|\,t - |g|\,\Delta t \quad {}^m/sec.$$

$$v^y_t \qquad\qquad = +|v^y_0| - |g|\,t$$

$$v^y_{t+\Delta t} - v^y_t = \qquad = \qquad - |g|\,\Delta t \quad {}^m/sec.$$

Dus:

$$\boxed{\Delta v_{t \to t+\Delta t} = -|g|\,\Delta t \quad {}^m/sec.}$$

Het - teken geeft aan, dat $\Delta v_{t \to t+\Delta t}$ evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de - Y-as, dus dezelfde richting heeft als $\vec{g}$.

(Punt 2) De GEMIDDELDE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) in het tijdsinterval van $t \to t+\Delta t$ sec.

$$\vec{a}^{gem}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \qquad \text{grootte in } {}^m/sec^2$$

Uit punt 1), vraag e) volgt nu:

$\vec{a}^{gem}_{t \to t+\Delta t}$

grootte $a^{gem}_{t \to t+\Delta t} = \dfrac{|g|\Delta t}{\Delta t} = |g| \quad {}^m/sec^2$

richting evenwijdig aan- en gelijk gericht met de vector $\vec{g}$.

Punt 3) DE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) OP HET TIJDSTIP t sec.

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}^{gem}_{t \to t+\Delta t} \qquad \text{grootte in } {}^m/sec^2$$

Uit punt 2 volgt:

$\vec{a}_t$

grootte $a_t = |g| \quad {}^m/sec^2$

a_t heeft dus op ieder ogenblik de waarde $|g|$.

richting evenwijdig aan- en gelijk gericht met de vector van de valversnelling $\vec{g}$

Hieruit volgt, dat $\vec{a}_t \equiv \vec{g}$

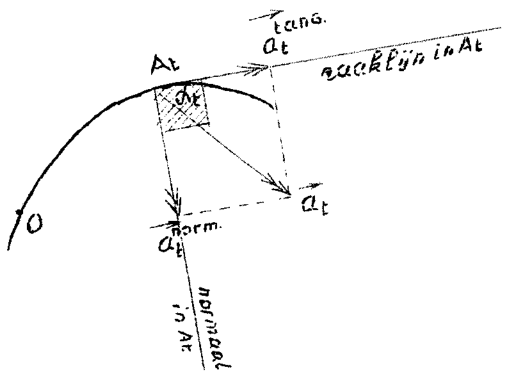
CONCLUSIE. Bij het beschrijven van de kogelbaan is de VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) OP IEDER OGENBLIK IN GROOTTE EN RICHTING GELIJK AAN DE VALVERSNELLING.

Opmerkingen. α) Bij de kogelbaan treedt dus geen andere versnelling op dan de valversnelling.
Dit is achteraf beschouwd ook vanzelfsprekend: Een versnelling wordt immers altijd veroorzaakt door een kracht en tijdens het beschrijven van de kogelbaan werkt op de kogel slechts ÉÉN kracht n.l. de zwaartekracht.

β) Bij de op blz. 79 besproken parabolische baan is de versnelling t.o.v. het bewegingsvlak op ieder ogenblik evenwijdig aan- en gelijk gericht met de versnellingsvector $\vec{a}$.

§ 6. DE VERSNELLING (T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK) OP EEN BEPAALD TIJDSTIP bij een WILLEKEURIGE KROMLIJNIGE BEWEGING.

Punt 1) De begrippen NORMALE- en TANGENTIELE VERSNELLING.



In nevenstaande figuur stelt de kromme lijn een willekeurig gekozen baan in het vlak van tekening voor die door een massapunt doorlopen wordt volgens een willekeurig gekozen plaatsfunctie. Op het tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt A_t.

Stel, dat de versnelling t.o.v. het bewegingsvlak op dat tijdstip wordt voorgesteld door de vector $\vec{a}_t$. Bij de eenparige cirkelvormige beweging stond deze vector $\vec{a}_t$ op ieder ogenblik loodrecht op de baan; bij een beweging met willekeurige plaatsfunctie zal de vector $\vec{a}_t$ NIET op ieder ogenblik loodrecht staan op de baan (zie b.v. de kogelbaan)

WE GAAN NU VECTOR $\vec{a}_t$ ONTBINDEN IN TWEE COMPONENTEN en wel in EEN COMPONENT LANGS DE RAAKLIJN IN HET BAANPUNT A_t AAN DE BAAN en EEN COMPONENT LANGS DE NORMAAL IN HET BAANPUNT A_t LOODRECHT OP DE BAAN.

Benaming. De component LANGS DE RAAKLIJN noemt men DE TANGENTIELE VERSNELLING OP HET TIJDSTIP t sec. Deze wordt aangeduid door het symbool $\vec{a}_t^{\,tang}$

De component LANGS DE NORMAAL noemt men DE NORMALE VERSNELLING OP HET TIJDSTIP t sec. Deze wordt aangeduid door het symbool $\vec{a}_t^{\,norm}$.

Dus:

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{a}_t^{\,tang.} + \vec{a}_t^{\,norm.}}$$

Punt 2) De natuurkundige betekenis van de normale- en de tangentiële versnelling.

De versnelling t.o.v. het bewegingsvlak is dus op ieder ogenblik de somvector van de momentele tangentiële versnelling en de momentele normale versnelling.
In de hogere mechanica wordt bewezen, dat deze versnellingen ieder een eigen rol spelen bij de beweging van het massapunt langs de gegeven kromme baan volgens de gegeven plaatsfunctie.

a) De rol v.d. tang.versnelling.

De tangentiële versnelling zorgt voor DE VERANDERING VAN DE GROOTTE VAN DE LINEAIRE SNELHEID, dus voor DE SNELheidsverandering LANGS DE BAAN. In de hogere mechanica wordt bewezen, dat

$$a_t^{tang} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} \ \mathrm{m/sec^2}$$

m.a.w.

$$a_t^{tang} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_{t \to t+\Delta t}}{\Delta t} \ \mathrm{m/sec^2}$$

b) De rol v.d. norm.versnelling.

De normale versnelling zorgt er voor, DAT HET MASSAPUNT DE GEGEVEN KROMME BAAN VOLGT. De normale versnelling wordt altijd veroorzaakt door een UITWENDIGE DRUKKRACHT. In de hogere mechanica wordt bewezen, dat de normale versnelling gelijk is aan

$$\boxed{a_t^{norm} = \frac{v_t^2}{R_t} \ \mathrm{m/sec^2}}$$

dus:

$$\boxed{a_t^{tang} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\ {}^m/sec^2}$$

Conclusie. Men vindt de tangentiële versnelling als functie van de tijd, door de snelheidsfunctie te differentiëren naar de tijd.

b.v. $s_t = 5t^7 - 8t^3 + 5t^2 - t$ meter

$v_t = 35t^6 - 24t^2 + 10t - 1\ {}^m/sec.$

$a_t^{tang} = 210t^5 - 48t + 10\ \ {}^m/sec^2$

NB. Een EENPARIGE BEWEGING, onverschillig of deze recht- of kromlijnig is HEEFT NOOIT EEN TANGENTIELE VERSNELLING.

Hierin is v_t de lineaire snelheid op het tijdstip t sec. en R_t de straal van de cirkel die op het tijdstip t sec. "het best past bij de kromming van de baan".
In de hogere mechanica heeft men een formule om R_t te berekenen.

α) Is de baan een cirkel, dan is R_t de straal van deze cirkel.

β) Is de baan een rechte lijn, dan is R_t "oneindig groot".

In dit geval is dus $a_t^{norm} = 0$

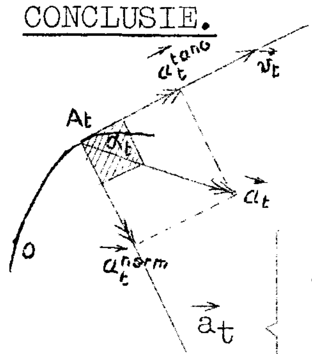
Hieruit trekken we twee concl.:

1°) Een RECHTLIJNIGE BEWEGING heeft NOOIT een NORMALE VERSNELLING.

2°) Bij een RECHTLIJNIGE BEWEGING is de tangentiële versnelling tevens DE versnelling (t.o.v. het bewegingsvlak).

Op blz. 40 hebben we er dus terecht op gewezen dat de daar behandelde theorie over de versnelling alleen geldig was voor de rechtlijnige beweging.

CONCLUSIE.



$$a_t^{tang} = \frac{d^2s}{dt^2}\ \ {}^m/sec^2.$$

$$a_t^{norm} = \frac{v_t^2}{R_t}\ \ {}^m/sec^2.$$

grootte: $a_t = \sqrt{(a_t^{tang})^2 + (a_t^{norm})^2}\ \ {}^m/sec^2.$

richting: $\operatorname{tg} \alpha_t = \dfrac{a_t^{norm}}{a_t^{tang}}$

§ 7. Een betere definitie van de eenparig veranderlijke beweging.

Definitie. Een beweging heet eenparig veranderlijk als de TANGENTIËLE VERSNELLING CONSTANT IS.

De plaatsfunctie is DAN en SLECHTS DAN een veelterm van de tweede graad. DE VORM VAN DE BAAN DOET DAARBIJ NIETS TER ZAKE.

Opgave 33. Gegeven: $s_t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ meter.

Gevraagd: 1°) Wat stelt deze vergelijking voor?

Antwoord: de plaatsfunctie van een eenparig veranderlijke beweging.

2°) Zegt deze vergelijking iets over DE VORM van de baan?

Antwoord: NIETS.

3°) Wat stelt a voor als de baan RECHT is?

Antwoord: a stelt in deze plaatsfunctie ALTIJD de TANGENTIËLE VERSNELLING voor: als de baan RECHT is, is a tevens DE versnelling (t.o.v. het bew. vlak)

4°) Wat stelt a voor als de baan krom is?

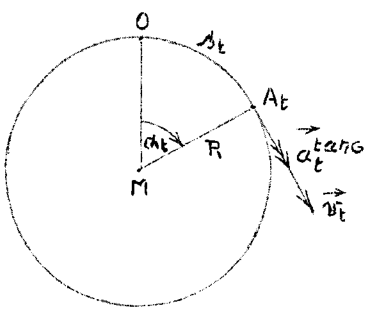
Antwoord: Dan is a alleen maar DE TANGENTIËLE VERSNELLING.

5°) Hoe vinden we bij een kromlijnige beweging de versnelling (t.o.v. het bewegingsvlak) op een bepaald tijdstip?

Antwoord:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_t^{\,tang} + \vec{a}_t^{\,norm} \quad (\text{grootte in } {}^m/\text{sec}^2)$$

§8. De cirkelvormige beweging met WILLEKEURIGE PLAATSFUNCTIE.



We beschouwen nu het geval dat een massapunt de omtrek van een cirkel (straal R meter) doorloopt volgens een gegeven plaatsfunctie $s_t = f(t)$ meter.

Op het tijdstip t sec. bevindt het massapunt zich in het baanpunt A_t.
Op dat ogenblik is:

$$v_t = \frac{ds}{dt}\ {}^m/\text{sec.}$$

$$\text{en } a_t^{tang} = \frac{d^2s}{dt^2}\ {}^m/\text{sec}^2.$$

Gevraagd: 1°) De middelpuntshoek α_t uitgedrukt in radialen.

Oplossing.

$$\boxed{\alpha_t = \frac{s_t}{R} \text{ rad.}} \qquad ①$$

Gevraagd: 2°) De hoeksnelheid op het tijdstip t sec.

Antwoord: We moeten eerst definiëren wat men bij een willekeurige cirkelvormige beweging verstaat onder de hoeksnelheid op een bepaald tijdstip.
Bij de eenparige cirkelvormige beweging hebben we gezien, dat

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}\,\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}} \qquad \text{(zie blz. 98)}$$

Analoog hieraan definieert men bij een willekeurige cirkelvormige beweging de hoeksnelheid op een bepaald ogenblik als de algebraïsche waarde VAN DE EERSTE AFGELEIDE VAN α_t NAAR DE TIJD op het beschouwde ogenblik.
Dus:

$$\boxed{\omega_t = \frac{d\alpha_t}{dt}\,\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}} \qquad ②$$

Gevraagd: 3°) Bereken ω_t.

Oplossing:

$$\omega_t = \frac{d\alpha_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s_t}{R}\right) = \frac{1}{R}\cdot\frac{ds_t}{dt} = \frac{1}{R}\cdot v_t\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$$

Dus:

$$\boxed{\omega_t = \frac{v_t}{R}\,\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}} \qquad ③$$

Of:

$$\boxed{v_t = \omega_t . R\ {}^m/\text{sec.}} \qquad ④$$

Conclusie uit (3) . Men vindt de hoeksnelheid op een bepaald tijdstip door de algebraïsche waarde van de lineaire snelheid op dat tijdstip te delen door de straal van de cirkel.

Conclusie uit (4) . Men vindt de lineaire snelheid op een bepaald tijdstip door de algebraïsche waarde van de hoeksnelheid op dat ogenblik te vermenigvuldigen met de straal van de cirkel.

Gevraagd: 4°) Wat verstaat men onder de HOEKVERSNELLING op het tijdstip t sec.

Definitie. Onder de HOEKVERSNELLING op het tijdtsip t sec. verstaat men de algebraïsche waarde VAN DE EERSTE AFGELEIDE VAN ω_t NAAR DE TIJD op het tijdstip t sec.

Notatie. De hoekversnelling op het tijdstip t sec. wordt aangeduid door het symbool q_t.
Dus:

$$\boxed{q_t = \frac{d\omega_t}{dt} \quad \frac{\text{rad.}}{\text{sec}^2}} \qquad (5)$$

Gevraagd: 5°) Bereken q_t.

Oplossing.

$$q_t = \frac{d\omega_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_t}{R}\right) = \frac{1}{R}\,\frac{dv_t}{d} = \frac{a_t^{tang}}{R} \quad \frac{\text{rad.}}{\text{sec}^2}$$

Dus:

$$\boxed{q_t = \frac{a_t^{tang}}{R} \quad \frac{\text{rad.}}{\text{sec}^2}} \qquad (6)$$

of:

$$\boxed{a_t^{tang} = q_t . R \quad {}^{m}/\text{sec}^2.} \qquad (7)$$

Conclusie uit (6) . Men vindt de hoekversnelling op een bepaald tijdstip door de algebraïsche waarde van de tangentiële versnelling op dat tijdstip te delen door de straal van de cirkel.

Conclusie uit (7) . Men vindt de tangentiële versnelling op een bepaald tijdstip door de algebraïsche waarde van de hoekversnelling op dat ogenblik te vermenigvuldigen met de straal van de cirkel.

SAMENVATTING.

$$s_t = f(t) \text{ meter} \longleftrightarrow \alpha_t = \frac{s_t}{R} \text{ rad.}$$

$$v_t = \frac{ds}{dt} \; {}^{m}/\text{sec} \longleftrightarrow \omega_t = \frac{d\alpha_t}{dt} = \frac{v_t}{R} \; {}^{rad}/\text{sec.}$$

$$a_t^{tang} = \frac{dv_t}{dt} \; {}^{m}/\text{sec}^2 \longleftrightarrow q_t = \frac{d\omega_t}{dt} = \frac{a^{tang}}{R} \; {}^{rad}/\text{sec}^2$$

Algemene Conclusie: Men vindt een grootheid van de middelpuntshoek door de overeenkomstige groot heid van de omtrek te delen door de straal van de cirkel.

HOOFDSTUK IV.

DE LEER DER KRACHTEN. (DYNAMICA)

1. KRACHT EN MASSA.

De leer der krachten is opgesteld door Newton.

Isaac Newton; * 1642 Woolsthorpe, † 1727 Londen; de grootste natuurkundige en een der grootste wiskundigen van alle tijden; deed in 1686 zijn PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA het licht zien. Het bevat de grondslagen der DYNAMICA, de toepassing (met gebruik van zijn "fluxietheorie", d.i. differentiaal en integraalrekening) op hemel-mechanica, aardse mechanica, getijden-theorie, daarnaast hydrodynamica en geluidsleer. Nooit is voo rdien of daarna door èèn man zoveel nieuws aan fundamentele concepten en gedetailleerde uitwerking tot ons physisch wereldbeeld bijgedragen. Zover schreed hij voort, dat het meer dan honderd jaar duurde voor de kennis der natuur opnieuw een stap vooruit ging:
Van 1669 - 1694 hoogleraar te Cambridge. Het hoogtepunt valt van 1684 - 1686, toen hij zijn PRINCIPIA schreef. Na deze bovenmenselijke inspanning ondervond hij een ernstige terugslag; hij werd in 1692 ziek en was na toe aan een volledige instorting.
In 1696 werd hij, bij wijze van officiële erkenning van zijn verdiensten, WARDEN OF THE MINT, drie jaar later MASTER OF THE MINT. Hij vestigde zich toen te Londen;
Van 1703 tot aan zijn dood PRESIDENT OF THE ROYAL SOSIETY.
In 1704 publiceerde hij zijn lichttheorie.
Hij is nooit gehuwd. In zijn latere jaren was hij zeer welgesteld (Kronig)

Newton heeft voor de leer der krachten DRIE HYPOTHESEN opgesteld. Deze hypothesen zijn in de loop der eeuwen op een dermate evidente wijze door de ervaring bevestigd dat men tegenwoordig spreekt van de DRIE WETTEN VAN NEWTON.

I) De eerste wet van Newton.

Deze wet luidt: Is een massapunt geheel AAN ZICHZELF OVERGELATEN, dan is dit massapunt òf IN RUST, òf het heeft een EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING.

Wat zegt deze wet eigenlijk?

Antwoord. Uit de bewegingsleer weten we, dat de EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING de ENIGE BEWEGING is waarbij GEEN VERSNELLING optreedt.
In de toestand van blijvende rust treedt vanzelf geen versnelling op.
De eerste wet van Newton zegt dus, DAT EEN MASSAPUNT AAN ZICHZELF OVERGELATEN GEEN VERSNELLING KAN HEBBEN.

De nadruk ligt hier op "HET NIET KUNNEN HEBBEN". Dit houdt in, dat een massapunt aan zichzelf overgelaten OOK NIET IN STAAT IS OM ZICHZELF EEN VERSNELLING TE GEVEN: het kan ZICHZELF dus niet IN BEWEGING BRENGEN en het kan UIT ZICHZELF niets veranderen aan de grootte en/of richting van zijn snelheid. Daarom noemt men deze wet ook wel DE WET DER TRAAGHEID OF INERTIE.

Toch leert de ervaring dat een massapunt in beweging gebracht kan worden en dat er bewegingen zijn waarbij tangentiële en/of normale versnellingen optreden.

HOE WORDEN DEZE VERSNELLINGEN VEROORZAAKT?

Antwoord. Daar een massapunt ZICHZELF GEEN VERSNELLING KAN GEVEN, moet het zijn eventuele versnelling GEKREGEN HEBBEN, en wel ALS GEVOLG VAN DE WERKING VAN EEN BUITEN HET MASSAPUNT BESTAANDE OORZAAK.

> ZO'N OORZAAK, WAARVAN DE WERKING OP HET MASSA PUNT TOT
> G E V O L G
> HEEFT DAT HET MASSAPUNT EEN VERSNELLING KRIJGT, NOEMT MEN IN DE MECHANICA EEN
> K R A C H T.

Let wel, de mechanica laat er zich niet over uit, wat een kracht IN WEZEN IS; ze zegt alleen wat HET GEVOLG IS als een kracht op een massapunt werkt.

> Definitie: EEN KRACHT IS DE OORZAAK VAN EEN VERSNELLING.

Als een massapunt dus een VERSNELLING heeft, werkt er OP dit massapunt EEN KRACHT, en als er op een massapunt een (resulterende) kracht werkt, heeft dat massapunt een VERSNELLING.

> CONCLUSIE. EEN VERSNELLING KAN ALLEEN EN UITSLUITEND VEROORZAAKT WORDEN DOOR EEN KRACHT.

Opmerking. Het ligt voor de hand om te vragen of dit NATUURKUNDIGE KRACHTBEGRIP hetzelfde is als het krachtbegrip dat we hebben uit het dagelijkse leven.
Het antwoord op deze vraag is bevestigend: ja! De eerste notie van het krachtbegrip kregen we toen we als kleuter onze SPIERKRACHT ontdekten. We dachten ons toen echter de kracht alleen maar als oorzaak van BEWEGING en niet als oorzaak van VERSNELLING.
DE MECHANICA HEEFT HET "VOOR-WETENSCHAPPELIJKE" KRACHTBEGRIP ALLEEN MAAR GEZUIVERD VAN VALSE VOORSTELLINGEN: ze leert ons wat kracht WEL is n.l. OORZAAK VAN VERSNELLING.

II) De tweede wet van Newton.

Deze wet legt verband tussen EEN KRACHT ALS VECTOR en DE VERSNELLING (die een gegeven massapunt krijgt t.g.v. de werking van deze kracht) ALS VECTOR.

De tweede wet van Newton luidt:

> 1°) DE RICHTING VAN DE KRACHT VALT SAMEN MET DE RICHTING VAN DE VERSNELLING die een massapunt t.g.v. de werking van de kracht krijgt.
>
> 2°) DE VERHOUDING VAN DE GROOTTE VAN DE KRACHT EN DE GROOTTE VAN DE VERSNELLING t.g.v. deze kracht heeft VOOR EENZELFDE MASSAPUNT ALTIJD, OVERAL EN ONDER ALLE OMSTANDIGHEDEN DEZELFDE WAARDE, MITS de kracht en de versnelling MET CONSTANTE EENHEDEN gemeten worden.

Notatie: Een kracht wordt aangeduid met de letter F (force)

Uit 2^0) volgt dus:

NB NB NB	$\frac{F}{a}$ = CONSTANT VOOR EENZELFDE MASSAPUNT ALTIJD OVERAL i.h. HEELAL ONDER ALLE OMSTANDIGHEDEN

Deze constante is dus voor eenzelfde massapunt een UNIVERSELE CONSTANTE.

Deze constante wordt bepaald door de mate waarin het massapunt GEBONDEN IS AAN DE AETHER (Prof. Hoenen)

De aether is een voor de zintuigen NIET WAARNEEMBAAR MATERIEEL ZIJNDE, dat onder meer de drager is van de electro-magnetische velden.

In de tweede wet van Newton wordt dus (bij wijze van hypothese) aangenomen, dat eenzelfde massapunt altijd, overal en onder alle omstandigheden in dezelfde mate gebonden is aan de aether.
Ten gevolge van deze binding met de aether verzet de natuur zich tegen een snelheidsVERANDERING van het massapunt in de aether. Deze constante geeft dus ook de mate aan waarin de natuur zich verzet tegen een snelheidsVERANDERING van het massapunt in de aether.

Benaming. DE UNIVERSELE CONSTANTE $\frac{F}{a}$ VAN EEN MASSAPUNT NOEMT MEN

DE MASSA

VAN DIT MASSAPUNT

Notatie: De massa wordt aangeduid met de letter m.
Uit 2^0) volgt dus:

$$\frac{F}{a} = m$$

Dus:

$$\boxed{F = m \times a}$$

Opmerking. m is een universele constante MITS de kracht en de versnelling met universeel constante eenheden gemeten worden.
Deze eenheden zullen in een volgende paragraaf gedefinieerd worden.

NB NB

CONCLUSIE. Uit 1^0) en 2^0) volgt, dat we de tweede wet van Newton aldus kunnen formuleren:

$$\vec{F} = m \times \vec{a}.$$

Nadere toelichting van het massa-begrip. In navolging van de Maastrichtse natuurfilosoof Prof. Dr. P. Hoenen S.J. (Rome) nemen we aan dat "het massa hebben" veroorzaakt wordt door de binding van het massapunt met de aether.
Deze aanname zal ons goede diensten bewijzen als we het later zullen hebben over "de omzetting van massa in energie". Het is n.l. aanvaardbaar dat de binding met de aether een zekere hoeveelheid energie vertegenwoordigt. Als dus, door een of andere ingreep, een atoomkern van een bepaald element gedwongen wordt om

over te gaan in een kern van een ander element met minder massa ZAL ER DUS EEN BEPAALDE HOEVEELHEID ENERGIE MOETEN VRIJKOMEN.

III De derde wet van Newton handelt over ACTIE EN REACTIE.

Om deze wet te kunnen begrijpen moeten we eerst de 2e wet van Newton met al haar gevolgen nader bestudeerd hebben. Daarom stellen we de behandeling van de derde wet van Newton uit tot een later tijdstip.

§ 2. DE ZWAARTEKRACHT.

Punt 1) Wat verstaat men precies gezegd onder de ZWAARTEKRACHT van een lichaam?

Ieder lichaam op aarde ondervindt een VERTICAAL (d.w.z. loodrecht op een stilstaand wateroppervlak) NAAR HET AARDOPPERVLAK TOE GERICHTE KRACHT.
De grootte van deze kracht is specifiek voor het lichaam. Deze kracht is er de oorzaak van dat het ons inspanning kost om een lichaam (in het vacuum) op te tillen. Deze kracht doet ons zeggen "dat het lichaam ZWAARTE heeft". Daarom noemt men deze kracht DE ZWAARTE KRACHT.
We zullen later zien dat OP DE AARDPOLEN de zwaartekracht van een lichaam dezelfde grootte heeft als de kracht waarmee de aarde daar aan dat lichaam trekt, maar dat OP IEDERE ANDERE PLAATS TER AARDE de zwaartekracht van een lichaam (t.g.v. de draaiing van de aarde en de afplatting van de aarde aan de aardpolen) KLEINER is dan de kracht waarmee de aarde op die plaats aan dat lichaam trekt.

Hieruit volgt, dat we de zwaartekracht van een lichaam NIET mogen definiëren als de kracht waarmee de aarde ter plaatse aan het lichaam trekt.
De exacte definitie van de zwaartekracht van een lichaam op een bepaalde plaats ter aarde luidt:

ONDER DE ZWAARTEKRACHT VAN EEN LICHAAM OP EEN BEPAALDE PLAATS TER AARDE VERSTAAT MEN DE KRACHT DIE OP DE BESCHOUWDE PLAATS DE VALVERSNELLING VEROORZAAKT.

Punt 2) Stelling: OP EENZELFDE PLAATS TER AARDE HEBBEN ALLE LICHAMEN (ongeacht hun zwaarte) DEZELFDE VALVERSNELLING.

Bewijs: Zie proef met de valbuis.

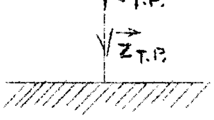
Opmerking: Bij de behandeling van de gravitatie theorie van Newton (zie later) zullen we deze stelling ook THEORETISCH bewijzen.

NB. Vraag. Welke betrekking bestaat er tussen DE ZWAARTEKRACHT VAN EEN LICHAAM OP EEN BEPAALDE PLAATS TER AARDE en DE VALVERSNELLING OP DIE PLAATS?

Antwoord. De tweede wet van Newton luidt:

$$\vec{F} = m \cdot a$$

m (de massa) is voor het beschouwde lichaam een UNIVERSELE CONSTANTE en heeft dus op iedere plaats ter aarde dezelfde waarde. Stellen we de zwaartekracht van het lichaam voor de beschouwde plaats ter aarde voor door $Z_{T.P.}$ (= $Z_{\text{ter plaatse}}$) en de valversnelling door $g_{T.P.}$, dan volgt uit de tweede wet van Newton dat

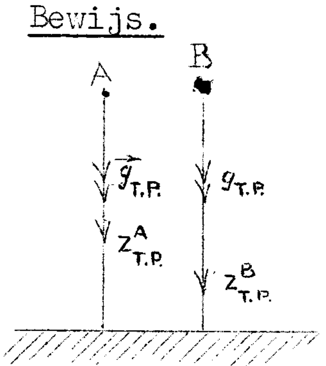


$$\boxed{Z_{T.P.} = m . g_{T.P.}}$$

Punt 3) Over de verhouding van de zwaartekrachten van twee lichamen op dezelfde plaats ter aarde.

Stelling I. Op EENZELFDE plaats ter aarde VERHOUDEN DE ZWAARTEKRACHTEN VAN TWEE LICHAMEN zich als DE MASSA'S VAN DEZE LICHAMEN.

Bewijs.



A en B zijn twee lichamen met massa's resp. m^A en m^B. Deze lichamen bevinden zich op dezelfde plaats ter aarde.
Volgens de tweede wet van Newton is:

$$Z^A_{T.P.} = m^A \times g_{T.P}$$

$$Z^B_{T.P.} = m^B \times g_{T.P}$$

De valversnellingen zijn gelijk.

Dus:

$$\boxed{Z^A_{T.P.} : Z^B_{T.P.} = m^A : m^B} \qquad (1)$$

q.e.d.

Stelling II. De VERHOUDING van de zwaartekrachten van twee lichamen op eenzelfde plaats ter aarde HEEFT OP IEDERE PLAATS TER AARDE DEZELFDE WAARDE.

Bewijs. In de evenredigheid (1) zijn de termen van het rechter lid UNIVERSELE CONSTANTEN.
De verhouding $m^A : m^B$ is dus ook een UNIVERSELE CONSTANTE.
Welnu: Als het rechterlid van een evenredigheid een universele constante is, moet het linker lid dat ook zijn.

Dus: $Z^A_{T.P.} : Z^B_{T.P.}$ = universele constante.

CONCLUSIE. De verhouding $Z^A_{T.P.} : Z^B_{T.P.}$ heeft op IEDERE PLAATS TER AARDE DEZELFDE WAARDE.

Nadere beschouwing.

$$Z^A_{T.P.} : Z^B_{T.P.} = \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{universeel} \\ \text{constant}}}{m_A} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{universeel} \\ \text{constant}}}{m_B}}_{\text{universeel constant}}$$

Uit deze evenredigheid volgt:

1°) Is de massa van lichaam A b.v. 5 x zo groot als de massa van lichaam B, dan is de zwaartekracht van A OP IEDERE PLAATS TER AARDE ook 5 x zo groot als de zwaartekracht van B OP DIEZELFDE PLAATS.

2°) Is omgekeerd, de zwaartekracht van A ERGENS TER AARDE b.v. 5 x zo groot als de zwaartekracht van B op DIE PLAATS, dan is DE MASSA VAN A ook 5 x ZO GROOT ALS DE MASSA VAN B.

Deze laatste conclusie is bijzonder belangrijk: als we de VERHOUDING DER ZWAARTEKRACHTEN van twee lichamen op eenzelfde plaats ter aarde weten, weten we ook DE VERHOUDING DER MASSA'S.

De verhouding van de zwaartekrachten van twee lichamen op eenzelfde plaats ter aarde kan men bepalen met behulp van een HEFBOOMBALANS.

Een hefboombalans is immers in evenwicht als de belastingen van beide schalen even groot zijn. Met een hefboombalans kan men dus constateren, dat twee lichamen A en B even zwaar zijn. Dan kan men ook constateren dat b.v. een lichaam C even zwaar is als A en B samen enz.

> Conclusie: Met behulp van een hefboombalans zijn we in staat om DE VERHOUDING te bepalen tussen de MASSA'S van twee lichamen.
> Kiezen we nu nog een EENHEID VAN MASSA dan kunnen we met behulp van een hefboombalans de massa van een lichaam METEN.

§ 3. De EENHEID VAN MASSA.

De EENHEID VAN MASSA heet HET KILOGRAM. Deze eenheid is willekeurig gekozen. (In 1795 voor de FRANSE REPUBLIEK bij een ORGANIEKE WET vastgesteld; in 1889 door de eerste "CONFÉRENCE GÉNÉRALE DES POIDS ET MESURES" INTERNATIONAAL aangenomen als de eenheid van massa).

> DEFINITIE. HET KILOGRAM IS DE MASSA VAN EEN PLATINA-IRIDIUM CILINDER, DIE TE SÈVRES BIJ PARIJS BEWAARD WORDT.

Elk land heeft een copie van deze standaard kilo.

Notatie. De MASSA van het kilogram wordt aangeduid door het symbool

$$1\ \mathrm{kg}^*$$

§ 4. De EENHEID VAN KRACHT IN HET DAGELIJKSE LEVEN.

Punt 1) IN HET DAGELIJKSE LEVEN noemt men op iedere plaats ter aarde als EENHEID VAN KRACHT de grootte van DE ZWAARTEKRACHT DIE OP DIE PLAATS TER AARDE WERKT OP DE ZICH ALDAAR BEVINDENDE (COPIE VAN DE) STANDAARD KILO.
Deze kracht noemt men DE KILOGRAMKRACHT VAN DIE PLAATS.

In de tekst wordt deze kracht aangeduid door het symbool $1\mathrm{kgf}_{T.P.}$

> DEFINITIE. Onder DE KILOGRAM-KRACHT VAN EEN BEPAALDE PLAATS OP AARDE verstaat men DE GROOTTE VAN DE ZWAARTEKRACHT DIE OP DE BESCHOUWDE PLAATS WERKT OP DE ZICH ALDAAR BEVINDENDE STANDAARD KILO.

Onder 1 kilogramkracht van Maastricht ($1\ \mathrm{kgf}_{M.}$) verstaat men dus de grootte van zwaartekracht die IN MAASTRICHT werkt op een zich aldaar bevindende standaard kilo.

Onder 1 kilogramkracht van Parijs ($1\ \mathrm{kgf}_{P.}$) verstaat men de grootte van de zwaartekracht die IN PARIJS werkt op de zich aldaar bevindende standaard kilo.

Punt 2) Stelling. De kilogramkracht van een bepaalde plaats ter aarde ($1\ \mathrm{kgf}_{T.P.}$) is de kracht die aan $1\ \mathrm{kg}^*$ een versnelling geeft die gelijk is aan de VALVERSNELLING OP DE BESCHOUWDE PLAATS.

Bewijs. Op een plaats X ter aarde geeft de zwaartekracht aan alle lichamen de valversnelling $g_X\ \mathrm{m/sec}^2$.
In X geeft de zwaartekracht dus ook aan $1\ \mathrm{kg}^*$ de valversnelling $g_X\ \mathrm{m/sec}^2$.

Welnu: De zwaartekracht van 1 kg.* in X is per definitie èèn kilogramkracht van X (1 kgf_X)

Conclusie: De kilogramkracht van X (1 kgf_X) is in grootte gelijk aan de kracht ^{X} die aan een massa van 1 kg* een versnelling van g_X $^m/sec^2$ geeft.

Punt 3) Stelling. 1 kgf_X : 1 kgf_Y = g_X : g_Y

Bewijs. 1 kgf_X geeft aan 1 kg* de versnelling van g_X $^m/sec^2$;
1 kgf_Y geeft aan 1 kg* de versnelling van g_Y $^m/sec^2$.
Volgens de 2^e wet van Newton

$$F = m \cdot a$$

moet dus:

$$\boxed{1\ kgf_X : 1\ kgf_Y = g_X : g_Y}$$

CONCLUSIES. I De grootten van de kilogramkrachten van twee plaatsen ter aarde VERHOUDEN ZICH ALS DE GROOTTEN VAN DE VALVERSNELLINGEN OP DIE PLAATSEN.

II Proeven leren, dat de valversnelling op een plaats ter aarde een functie is van de GEOGRAFISCHE BREEDTE VAN DIE PLAATS.

$g_{N.P}$ = 9,831 $^m/sec^2$; g_{Delft} = 9,812 $^m/sec^2$;
g_{PARIJS} = 9,800 $^m/sec^2$;
$g_{EVENAAR}$ = 9,779 $^m/sec^2$ (g gemeten op ZEE-NIVEAU).
Dus:
1 $kgf_{N.P}$:1 kgf_D:1 kgf_P:1 kgf_E =

9,831:9,812:9,800:9,779.

III Op iedere plaats ter aarde gebruikt men DEZELFDE WOORDEN om de kilogramkracht TER PLAATSE te definiëren, maar de aldus gedefinieerde kracht heeft op iedere breedte-cirkel een ANDERE GROOTTE: op de aardpolen het grootst, op de evenaar het kleinst.

Opmerking. Uit het bovenstaande blijkt, dat de plaatselijke kgf VOOR DE WETENSCHAP NIET GESCHIKT IS ALS EENHEID VAN KRACHT: De wetenschap wil een eenheid van kracht die ONAFHANKELIJK is van de plaats op aarde, zodat b.v. voor de grootte van de krachtwerking tussen de moleculen OVERAL TER AARDE DEZELFDE FORMULES GELDEN.
De wetenschappelijke eenheid van kracht zal in § 6 gedefiniëerd worden.

§ 5. STELSELS VAN EENHEDEN.

De tweede wet van Newton luidt:

$$F = m \times a.$$

Deze formule legt het fundamentele verband vast tussen de op een massapunt werkende kracht en de daardoor veroorzaakte versnelling. DEZE FORMULE VORMT VOOR DE NATUURKUNDE DE BASIS VOOR DE KEUZE VAN DE EENHEDEN VAN KRACHT, MASSA, LENGTE EN TIJD.

DEFINITIE. Men zegt dat de eenheden van KRACHT, MASSA, LENGTE en TIJD EEN STELSEL VORMEN als DE EENHEID VAN KRACHT aan DE EENHEID VAN MASSA DE EENHEID VAN VERSNELLING GEEFT.

Om een stelsel te krijgen mag men van de vier eenheden (kracht, massa, lengte en tijd) er DRIE willekeurig kiezen; de tweede wet van Newton bepaalt dan HOE DE VIERDE GROOTHEID GEDEFINIEERD MOET WORDEN.
Vroeger waren er officieel VIER STELSELS in gebruik.
In de moderne natuurkunde gebruikt men maar ÉÉN STELSEL, n.l. het z.g. STELSEL VAN GIORGI, dat ook wel wordt genoemd:
HET METER - KILOGRAMMASSA - SECONDE - AMPÈRE - STELSEL.
(afgekort: het M - K - S - A - stelsel).

§ 6. HET STELSEL VAN GIORGI: Het M - K - S - A - STELSEL.

Punt 1) DE GRONDEENHEDEN.

1°) DE METER ALS EENHEID VAN LENGTE.

Definitie. EEN METER is de afstand BIJ 0° C. tussen twee merkstrepen op een platina-iridium staaf die in Sèvres bij PARIJS bewaard wordt.

2°) HET KILOGRAM ALS EENHEID VAN MASSA. (Zie § 3)

3°) DE SECONDE ALS EENHEID VAN TIJD.

Definitie. EEN SECONDE is het $\frac{1}{86400}$ deel van een MIDDELBARE ZONNE-DAG.

4°) DE AMPèRE ALS EENHEID VAN STROOMSTERKTE.

Deze eenheid zal in de electriciteitsleer gedefinieerd worden: ze speelt in de mechanica geen rol.

NB. Het is van wezenlijk belang om uitdrukkelijk vast te stellen DAT DEZE VIER GRONDEENHEDEN GEHEEL ONAFHANKELIJK ZIJN VAN DE PLAATS OP AARDE OF HET HEELAL:

EEN METER OP DE PLAATS X IN HET HEELAL IS IDENTIEK MET DE METER OP DE PLAATS Y;

HET KILOGRAM " " X IN HET HEELAL IS IDENTIEK MET HET KILOGRAM OP DE PLAATS Y;

EEN SECONDE " " X IN HET HEELAL IS IDENTIEK MET EEN SECONDE OP DE PLAATS Y.

Punt 2) DE AFGELEIDE EENHEDEN.

1°) DE EENHEID VAN SNELHEID is bij deze grondeenheden 1 m/sec.

2°) DE EENHEID VAN VERSNELLING is bij deze grondeenheden 1 m/sec², dit is dus de versnelling van die eenparig versnelde rechtlijnige beweging waarbij de snelheid in iedere seconde toeneemt met 1 m/sec.

3°) DE EENHEID VAN KRACHT.

Nu de eenheden van massa en versnelling vaststaan, laat de tweede wet van Newton ons geen vrijheid meer in de keuze van de eenheid van kracht: Deze wet schrijft ons eenvoudig vòòr WAT DE EENHEID VAN KRACHT NU IS n.l. DE KRACHT DIE AAN EEN MASSAPUNT VAN 1 kg* DE VERSNELLING GEEFT VAN 1 m/sec².
Deze eenheid van kracht noemt men EEN NEWTON.

NB

NB

DEFINITIE. EEN NEWTON IS DE KRACHT DIE AAN EEN MASSAPUNT VAN 1 kg* DE VERSNELLING GEEFT VAN 1 m/sec².

Stelling. EEN NEWTON HEEFT OVERAL TER AARDE EN IN HET HEELAL DEZELFDE WAARDE.

Bewijs. blz. 116.

Bewijs.

$$m = 1\ kg^* \xrightarrow{a = 1\ m/sec^2} F = 1\ \text{Newton}$$

1 kg* is een universeel constante eenheid van massa,
1 $^m/sec^2$ " " " " versnelling.

Volgens de 2^o wet van Newton

$$F = m \times a$$

MOET DE KRACHT die aan de universeel constante eenheid van massa de universeel constante eenheid van versnelling geeft, OVERAL IN HET HEELAL DEZELFDE GROOTTE HEBBEN, dus ZELF OOK EEN UNIVERSEEL CONSTANTE EENHEID ZIJN.

Was dit niet zo, dan was de 2^e wet van Newton een ONWAARHEID!

CONCLUSIE. DE NEWTON IS EEN UNIVERSEEL CONSTANTE EENHEID VAN KRACHT.

Punt 3) Het invullen van de formule F = m x a.

Om een massapunt van 1 kg* een versnelling van 1 $^m/sec^2$ te geven is een kracht nodig van 1 Newton.

Om een massapunt van m kg* een versnelling van 1 $^m/sec^2$ te geven is een kracht nodig van m Newton.

Om een massapunt van m kg* een versnelling van a $^m/sec^2$ te geven is een kracht nodig van m x a Newton.

Hieruit volgt voor het stelsel van Georgi, dat in de formule

$$F = m \times a$$

F ALTIJD IS UITGEDRUKT IN NEWTON,
m ALTIJD IS UITGEDRUKT IN kg*
a ALTIJD IS UITGEDRUKT IN $^m/sec^2$.

Dus:

.....Newton = ...kg* x .....$^m/sec^2$.

NB. Vraag. Wat is de DIMENSIE van een NEWTON?

Antwoord.

$$[\text{NEWTON}] = kg^* \times \frac{m}{sec^2}$$

Getallenvoorbeelden.

1^o) Gegeven: m = 5 kg*
a = 8 $^m/sec^2$

Gevraagd: F

Oplossing. $F = m \times a = 5 \times 8\ kg^* . \frac{m}{sec^2} = 40$ NEWTON.

CONCLUSIE. Als de massa is uitgedrukt in kg* en de versnelling in $^m/sec^2$,
DAN IS DE KRACHT AUTOMATISCH UITGEDRUKT IN NEWTON.

2°) Gegeven: $F = 20$ Newton

$a = 2\ ^{m}/sec^2$.

Gevraagd: m.

Oplossing: $m = \frac{F}{a} = \frac{20}{2} \frac{\text{Newton}}{^{m}/sec^2} = 10 \frac{kg^{*} \cdot {}^{m}/sec^2}{^{m}/sec^2} = 10\ kg^{*}$.

> CONCLUSIE. Als de kracht is uitgedrukt in Newton en de versnelling in $^{m}/sec^2$, DAN IS DE MASSA AUTOMATISCH UITGEDRUKT IN kg^{*}.

3°) Gegeven: $F = 600$ Newton.

$m = 3\ kg^{*}$.

Gevraagd: a.

Oplossing: $a = \frac{F}{m} = \frac{600}{3} \frac{\text{Newton}}{kg^{*}} = 200 \frac{kg^{*} \cdot {}^{m}/sec^2}{kg^{*}} = 200\ ^{m}/sec^2$.

> CONCLUSIE. Als de kracht is uitgedrukt in Newton en de massa in kg^{*}, DAN IS DE VERSNELLING AUTOMATISCH UITGEDRUKT IN $^{m}/sec^2$.

Punt 4) Op het ogenblik hebben wij nog geen "GEVOELS-INDRUK" van de Newton; deze hebben we wel van 1 $kgf_{T.P.}$

We vragen: MET HOEVEEL $kgf_{T.P.}$ IS EEN NEWTON AEQUIVALENT?

> STELLING: 1 $kgf_{T.P.} = g_{T.P.}$ NEWTON
>
> Bewijs. 1 $kgf_{T.P.}$ geeft aan 1 kg^{*} een (val)versnelling van $g_{T.P.}\ ^{m}/sec^2$.
>
> Stel 1 $kgf_{T.P.}$ = X Newton.
>
> Welnu: $F = m \cdot a$
>
> Dus: $X = 1 \cdot g_{T.P.}$
>
> Dus: $X = g_{T.P.}$
>
> CONCLUSIE.
>
> $\boxed{1\ kgf_{T.P.} = g_{T.P.}\ \text{Newton.}}$

Getallenvoorbeelden.

$$1\ kgf_{in\ X} = g_X\ \text{NEWTON} \left\{ \begin{array}{ll} 1\ kgf_{aan\ pool} & = 9{,}831\ \text{NEWTON} \\ 1\ kgf_{Delft} & = 9{,}812\ \text{NEWTON} \\ 1\ kgf_{Parijs} & = 9{,}800\ \text{NEWTON} \\ 1\ kgf_{evenaar} & = 9{,}779\ \text{NEWTON} \end{array} \right.$$

Ronden we de valversnelling af op 10 $^{m}/sec^2$, dan is de afgeronde waarde van 1 kgf dus gelijk aan 10 NEWTON.

Dus: 1 $kgf_{T.P.} \approx 10$ NEWTON

Dus:

$$\boxed{1\ \text{NEWTON} \approx \frac{1}{10}\ kgf_{T.P.}}$$

> CONCLUSIE. EEN NEWTON IS ONGEVEER GELIJK AAN DE ZWAARTEKRACHT VAN
>
> E E N O N S.

Opmerking. EEN NEWTON heeft overal ter aarde DEZELFDE GROOTTE; 1 $kgf_{T.P.}$ is op de evenaar het kleinst, op de polen het grootst.

In de sommen wordt de valversnelling meestal afgerond op $10\ ^{m}/sec^2$.

Staat dus in de sommen 1 kgf op je tenen, dan staat op iedere teen EEN NEWTON!

§7. Het CENTIMETER - GRAMMASSA - SECONDE - STELSEL. (Het C-G-S-STELSEL)

DE GRONDEENHEDEN.

1°) EEN CENTIMETER ALS EENHEID VAN LENGTE.

2°) EEN GRAMMASSA (1 gr*) ALS EENHEID VAN MASSA.

3°) EEN SECONDE ALS EENHEID VAN TIJD.

DE AFGELEIDE EENHEDEN.

1°) DE EENHEID VAN SNELHEID IS $1\ \frac{cm}{sec}$,

2°) DE EENHEID VAN VERSNELLING IS $1\ \frac{cm}{sec^2}$,

3°) DE EENHEID VAN KRACHT.

De tweede wet van Newton (F = m x a) legt nu vast wat in dit stelsel de eenheid van kracht moet zijn, n.l. DE KRACHT DIE AAN EEN MASSAPUNT VAN 1 gr* EEN VERSNELLING GEEFT VAN $1\ ^{cm}/sec^2$.
Deze kracht heet EEN DYNE.

Definitie. EEN DYNE IS DE KRACHT DIE AAN EEN MASSAPUNT VAN 1 gr* EEN VERSNELLING GEEFT VAN $1\ \frac{cm}{sec^2}$.

Opmerking. De dyne is ook een universeel constante eenheid van kracht.

Vraag: Wat is de DIMENSIE van een dyne?

Antwoord: F = m x a.

$$\ldots\ldots \text{dyne} = \ldots\ldots \text{gr}^* \times \ldots\ldots \frac{cm}{sec^2}$$

De DIMENSIE van EEN DYNE is dus:

$$[\text{DYNE}] = gr^* \times \frac{cm}{sec^2} = \frac{gr^*.cm}{sec^2}$$

Stelling. 1 grf_{Delft} = 981,2 dyne.

Bewijs. 1 grf_{Delft} geeft aan 1 gr* een versnelling van 981,2 $\frac{cm}{sec^2}$

Stel 1 grf_{Delft} = X dyne.

Dan volgt:

X = 1 x 981,2

Dus: X = 981,2

Dus: $\boxed{1\ grf_{Delft} = 981{,}2 \text{ dyne.}}$

Evenzo: 1 grf_{Parijs} = 980,0 dyne.

Stelling: 1 NEWTON = 10^5 DYNE.

Bewijs: 1 NEWTON geeft aan 1 kg* een versnelling van $1\ ^{m}/sec^2$.

Stel 1 Newton = X dyne.
1 kg* = 1000 gr*
$1\ ^{m}/sec^2 = 100\ ^{cm}/sec^2$

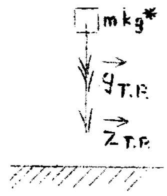
F = m x a.
X = 1000 x 100 = 10^5

CONCLUSIE.
1 Newton = 10^5 dyne.

§ 8. HET GEWICHT VAN EEN LICHAAM.

Punt 1)

DEFINITIE.



ONDER HET GEWICHT VAN EEN LICHAAM VERSTAAT MEN DE GROOTTE VAN DE ZWAARTE KRACHT VAN DIT LICHAAM.

Dus DE GROOTTE van de kracht die ter plaatse de valversnelling veroorzaakt, dus DE GROOTTE van $Z_{T.P.}$

Opmerking. Omdat de zwaartekracht van een lichaam altijd IN HET ZWAARTEPUNT VAN HET LICHAAM aangrijpt, kunnen we, als we over de zwaartekracht spreken, ieder lichaam beschouwen als een MASSAPUNT.
De definitie van het gewicht van EEN LICHAAM is dus ook de definitie van het gewicht van een MASSAPUNT.

Punt 2) De GEWICHTSMETING in DE OFFICIELE NATUURKUNDE en IN HET DAGELIJKSE LEVEN.

Bij de bepaling van het gewicht van een lichaam gaat het er dus om, DE GROOTTE van DE PLAATSELIJKE ZWAARTE KRACHT van een lichaam TE METEN, d.w.z. OM HET VERGELIJKEN VAN DE GROOTTE van de plaatselijke zwaartekracht van het lichaam MET DE GROOTTE VAN DE EENHEID VAN KRACHT.

Welnu: In de officiële natuurkunde is DE NEWTON de eenheid van kracht; in het dagelijkse leven is de $kgf_{T.P.}$ de eenheid van kracht.

DIT HEEFT TOT GEVOLG DAT DE GEWICHTSMETING IN DE OFFICIELE NATUURKUNDE EEN ANDERE UITKOMST OPLEVERT DAN DE GEWICHTSMETING IN HET DAGELIJKSE LEVEN.

We zullen deze gewichtsmetingen afzonderlijk onderzoeken.

→ A) Het gewicht van een lichaam in de officiële natuurkunde, dus de gewichtsmeting met DE NEWTON ALS EENHEID VAN KRACHT.

STELLING. Bevindt een lichaam met massa m kg* zich op een plaats ter aarde waar de valversnelling $g_{T.P.}$ m/sec² is, DAN IS HET GEWICHT VAN DAT LICHAAM OP DIE PLAATS:

$$Z_{T.P.} = m.g_{T.P.} \text{ NEWTON.}$$

Bewijs. $Z_{T.P.}$ geeft aan het lichaam met massa m kg* de valversnelling $g_{T.P.}$ m/sec².
Volgens de tweede wet van Newton is dus:

$$Z_{T.P.} = m.g_{T.P.} \text{ Newton.}$$

NB CONCLUSIE. HET GEWICHT VAN EEN LICHAAM (UITGEDRUKT IN NEWTON) OP EEN BEPAALDE PLAATS TER AARDE IS GELIJK AAN HET PRODUCT VAN DE MASSA VAN HET LICHAAM (uitgedr.in kg*

NB EN DE VALVERSNELLING OP DIE PLAATS (uitgedrukt in m/sec²).

NB IN FORMULE: $Z_{T.P.} = m \times g_{T.P.}$ NEWTON.

HET AANTAL NEWTON VAN HET GEWICHT TER PLAATSE hangt dus af VAN DE GEOGRAFISCHE BREEDTE VAN DE BETROKKEN PLAATS.

→ B) Het gewicht van een lichaam IN HET DAGELIJKSE LEVEN, dus de gewichtsmeting met DE $kgf_{T.P.}$ ALS EENHEID VAN KRACHT.

STELLING. Bevindt een lichaam met massa m kg* zich op een plaats ter aarde waar de valversnelling $g_{T.P.}$ $^{m}/sec^{2}$ is, DAN IS HET GEWICHT VAN DAT LICHAAM OP DIE PLAATS:

$$Z_{T.P.} = m\ kgf_{T.P.}$$

Bewijs. $Z_{T.P.}$ geeft aan het lichaam met massa m kg* de valversnelling $g_{T.P.}$ $^{m}/sec^{2}$.

Dus: $Z_{T.P.} = m \times g_{T.P.}$ Newton.

Maar $g_{T.P.}$ Newton $= 1\ kgf_{T.P.}$

Dus: $Z_{T.P.} = m \times 1\ kgf_{T.P.} = m\ kgf_{T.P.}$

Dus:

$$\boxed{Z_{T.P.} = m.kgf_{T.P.}}$$

Met nadruk merken we op, dat m de grootte van de MASSA van het lichaam uitgedrukt in kg* is; m is universeel CONSTANT.
Heeft een lichaam dus b.v. een massa van 50 kg* dan WEEGT DIT LICHAAM OP IEDERE PLAATS TER AARDE (en in het heelal):
50 PLAATSELIJKE KILOGRAM-KRACHT-EENHEDEN.

Omgekeerd: Weegt een lichaam ERGENS OP AARDE 50 $kgf_{T.P.}$ DAN HEEFT HET LICHAAM DE MASSA VAN 50 kg*.

CONCLUSIES.

I. Het getal dat het gewicht van een lichaam UITGEDRUKT IN DE PLAATSELIJKE KILOGRAMKRACHT aangeeft , is

GELIJK AAN

het getal dat DE MASSA van dit lichaam UITGEDRUKT IN kg* aangeeft.

II. EEN LICHAAM WEEGT OVERAL TER AARDE (en in het heelal)
HETZELFDE AANTAL
PLAATSELIJKE
KILOGRAMKRACHT EENHEDEN.
DIT AANTAL IS GELIJK AAN HET AANTAL kg* VAN DE MASSA VAN DIT LICHAAM.

Opmerking. In de omgangstaal zegt men wel, DAT EEN LICHAAM OVERAL HETZELFDE GEWICHT HEEFT. Deze zegswijze is dus MISLEIDEND.
EEN LICHAAM HEEFT OP IEDERE BREEDTE-CIRKEL EEN ANDER GEWICHT: HET WEEGT ECHTER OVERAL HETZELFDE AANTAL PLAATSELIJKE KILOGRAMKRACHT EENHEDEN.

Vraag. Wat besluit je uit elk van de volgende gegevens:

a) Een kogel weegt 30 $kgf_{T.P.}$
Antwoord. DE MASSA VAN DE KOGEL IS 30 kg*.

b) Een kogel heeft een massa van 80 kg*.
Antwoord. De kogel weegt OVERAL (dus zowel op de noordpool, als op de evenaar, als te Parijs, als op Cape Kennedy, als te Amby) 80 $kgf_{T.P.}$

c) Een lichaam weegt te Cairo 70 kgf_{Cairo} .
Hoe groot is zijn gewicht in Parijs?
Antwoord: 70 kgf_{Parijs}.

EINDCONCLUSIE..

EINDCONCLUSIE OVER HET GEWICHT VAN EEN LICHAAM.

Men dient onderscheid te maken tussen de gewichtsmeting IN DE OFFICIËLE NATUURKUNDE en de gewichtsmeting IN HET DAGELIJKSE LEVEN:

IN DE OFFICIËLE NATUURK.	IN HET DAGELIJKSE LEVEN.
$Z^{lich}_{T.P.}$ WORDT UITGEDRUKT IN NEWTON	$Z^{lich}_{T.P.}$ WORDT UITGEDRUKT IN $kgf_{T.P.}$
$\boxed{Z^{lich}_{T.P.} = m \times g_{T.P.}\ \text{NEWTON}}$	$\boxed{Z^{lich}_{T.P.} = m \times 1\ kgf_{T.P.}}$

$$\boxed{g_{T.P.}\ \text{NEWTON} = 1\ kgf_{T.P.}}$$

§ 9. DE DRUK IN HET STELSEL VAN GIORGI.

Punt 1)

Definitie. De eenheid van druk in het stelsel van Giorgi is $1\ \frac{N}{m^2}$

Punt 2) Het omrekenen van de "oude druk-eenheden" in $\frac{N}{m^2}$

We moeten nu de in de eerste ronde gebruikte eenheden van druk OMREKENEN in $\frac{N}{m^2}$

DE SLEUTEL VOOR DIT OMREKENEN IS DE VERGELIJKING:

$$\boxed{1\ kgf_{T.P.} = g_{T.P.}\ .\ \text{NEWTON}}$$

De in de eerste ronde gebruikte eenheden van druk zijn:

1°) $1\ \text{cm. water} = 1\ \frac{grf_{T.P.}}{cm^2} = 1\ \frac{\frac{1}{1000}.kgf_{T.P.}}{\frac{1}{10000}\ m^2} = 10\ \frac{kgf_{T.P.}}{m^2} = 10 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2}$

2°) $1\ \text{cm. kwik} = 13{,}6\ \frac{grf_{T.P.}}{cm^2} = 13{,}6 \times 10 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2} = 136 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2}$

3°) $1\ \text{atmosfeer} = 76\ \text{cm. kwik} = 76 \times 136 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2}$

Dit van buiten leren:

$$\boxed{76\ \text{cm.kwik} = 76 \times 136 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2}}$$

In de weerkunde wordt als eenheid van druk de MILLIBAR gebruikt.

Definitie. $1\ \text{bar} = 10^5\ \frac{N}{m^2}$

$1\ \text{millibar} = 100\ \frac{N}{m^2}$

Opmerking. In de warmteleer hebben we 0° C. gedefiniëerd als: DE TEMPERATUUR VAN SMELTEND IJS ONDER NORMALE DRUK.
Onder de NORMALE DRUK verstonden we de druk van 76 cm. kwik, dus de druk van $76 \times 136 \times g_{T.P.}\ \frac{N}{m^2}$

Daar de aldus gedefiniëerde normale druk van $g_{T.P.}$ afhangt, ZOU 0°C. DUS VOOR IEDERE BREEDTE-CIRKEL OP AARDE EEN ANDERE TEMPERATUUR VOORSTELLEN, terwijl de officiële natuurkunde juist wil, dat 0°C. een universeel constante temperatuur is!
In de officiële natuurkunde wordt de NORMALE DRUK dan ook nader gedefiniëerd.

> Definitie: Onder de normale druk verstaat men de druk van $1{,}013.10^5\ \frac{N}{m^2}$

Deze waarde vindt men (afgerond) als men in het product $76 \times 136 \times g_{T.P.}$ DE VALVERSNELLING IN PARIJS INVULT.

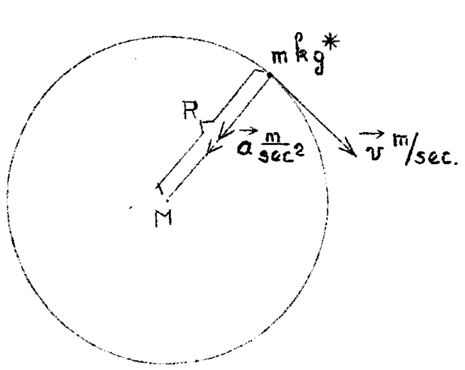
We geven nu de officiële definitie van 0° C.

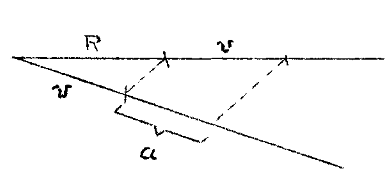
> DEFINITIE.
> 0° C. is de temperatuur van smeltend ijs onder de druk van $1{,}013.10^5\ \frac{N}{m^2}$

De definitie van 100° C.

> DEFINITIE.
> 100° C. is de temperatuur waarbij de maximum-spanning van waterdamp gelijk is aan $1{,}013.10^5\ \frac{N}{m^2}$.

§ 10 DE CENTRIPETALE KRACHT.



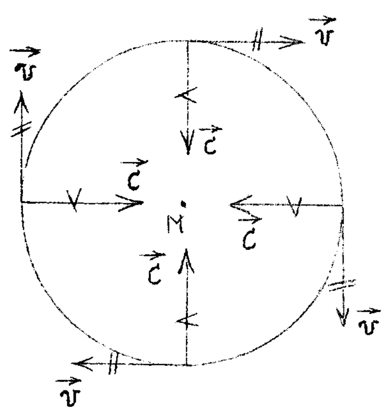


We beschouwen weer het geval dat een massapunt (massa m kg*) de omtrek van een cirkel (straal R meter) EENPARIG doorloopt met snelheid v $^m/sec$.
Omdat de beweging EENPARIG is KAN er GEEN TANGENTIËLE VERSNELLING ZIJN.
Omdat DE BAAN EEN CIRKEL IS, MOET het massapunt, zoals we in de bewegingsleer bewezen hebben, EEN NORMALE VERSNELLING HEBBEN, die voortdurend naar het middelpunt van de cirkel gericht is, en daarom CENTRIPETALE VERSNELLING heet.

Zoals we bewezen hebben is de grootte van deze centripetale versnelling gelijk aan:

$$a = \frac{v^2}{R}\ ^m/sec^2.$$

Deze centripetale versnelling, die dus volgens de bewegingsleer noodzakelijk is wil het massapunt de cirkel-omtrek eenparig doorlopen, KAN ALLEEN MAAR DOOR EEN KRACHT VEROORZAAKT WORDEN: TIJDENS HET EENPARIG DOORLOPEN VAN DE CIRKELOMTREK MOET ER DUS OP HET MASSAPUNT EEN KRACHT WERKEN DIE:



1°) VOORTDUREND NAAR HET MIDDELPUNT VAN DE CIRKEL TOE GERICHT IS, en

2°) VOLGENS DE TWEEDE WET VAN NEWTON, $\vec{F} = m \times \vec{a}$, IN GROOTTE GELIJK ZIJN AAN:

$$\boxed{C = m.\frac{v^2}{R} \text{ NEWTON.}}$$

Benaming. Deze kracht noemt men DE CENTRIPETALE KRACHT.

CONCLUSIE. Doorloopt een massapunt (massa m kg *) de omtrek van een cirkel EENPARIG, dan moet er voortdurend van buiten af op het massapunt een CENTRIPETALE KRACHT werken die in grootte gelijk is aan:

$$\boxed{C = \frac{mv^2}{R} \text{ NEWTON.}}$$

Opmerking. Als het massapunt de cirkelomtrek EENPARIG doorloopt blijft de grootte van de centripetale kracht constant; doorloopt het massapunt de cirkelomtrek NIET eenparig, dan werkt er op ieder ogenblik een centripetale kracht WAARVAN DE GROOTTE WEL EEN FUNCTIE VAN DE TIJD IS. Op het tijdstip t sec. is deze centripetale kracht dan gelijk aan:

$$C_t = \frac{m.v_t^2}{R} \text{ NEWTON.}$$

§ 11. HET SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN.

Deze paragraaf zal als volgt worden ingedeeld:

Deel A. Het samenstellen van krachten die op eenzelfde massapunt werken.

- A I: TWEE krachten op eenzelfde massapunt.
- A II: Andere methode om krachten samen te stellen; het samenstellen van meerdere, op eenzelfde massapunt werkende krachten.
- A III: EVENWICHT van op eenzelfde massapunt werkende krachten.
- A IV: Een massapunt onder invloed van meerdere krachten.

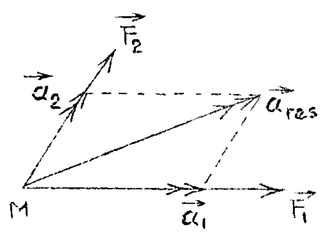
Deel B. Het samenstellen van TWEE krachten die op een STAR lichaam werken.

- B I: Twee krachten met EENZELFDE WERKLIJN.
- B II: Twee krachten met ELKAAR SNIJDENDE WERKLIJNEN.
- B III: Twee EVENWIJDIGE GELIJK GERICHTE krachten.
- B IV: Twee EVENWIJDIGE TEGENGESTELD GERICHTE krachten.
- B V: Koppels.
- B VI: De hefboom.
- B VII: Het zwaartepunt van een lichaam.

Deel A. Het samenstellen van krachten die op EENZELFDE massapunt werken.

A I: Het samenstellen van TWEE op EENZELFDE massapunt werkende krachten.

Punt 1) Het probleem.



We beschouwen nu het geval, dat op een massapunt M (massa m kg*) twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ Newton werken.

De kracht $\vec{F}_1$ geeft aan het massapunt de versnelling $\vec{a}_1$, waarbij $\vec{F}_1 = m.\vec{a}_1$ Newton; de kracht $\vec{F}_2$ geeft aan het massapunt de versnelling $\vec{a}_2$, waarbij $\vec{F}_2 = m.\vec{a}_2$ Newton.

Het massapunt M heeft nu dus TWEE versnellingen, n.l. $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$.

Uit de bewegingsleer weten we, dat we deze versnellingen overeenkomstig de vectorrekening MOGEN SAMENSTELLEN:

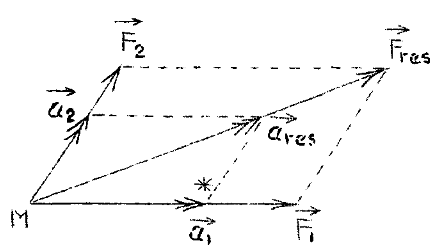
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_{res}$$

De gelijktijdige werking van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ op het massapunt M heeft dus tot gevolg DAT HET MASSAPUNT SLECHTS EÉN VERSNELLING HEEFT, n.l. $\vec{a}_{res}$.

We vragen nu naar de grootte en richting van de kracht DIE OP DIT MASSAPUNT MOET WERKEN OM DIT MASSAPUNT DE RESULTERENDE VERSNELLING $\vec{a}_{res}$ TE GEVEN.

Punt 2) STELLING. DEZE KRACHT IS IN GROOTTE EN RICHTING GELIJK AAN DE SOMVECTOR VAN DE KRACHTSVECTOREN $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$.

Bewijs.



We construeren $\vec{a}_{res}$ en $\vec{F}_{res}$.

$\triangle(\vec{a}_1\ M\ \vec{a}_{res}) \sim \triangle(\vec{F}_1\ M\ \vec{F}_{res})$

Immers:

$F_1 : F_2 = ma_1 : ma_2 = a_1 : a_2$
$\angle^* = \angle^*$ (overeenk. $\angle\angle$ bij $//$) $\Big\}$ Geval ZHZ

Welnu: In gelijkvormige driehoeken zijn de gelijkstandige hoeken gelijk en vormen de gelijkstandige zijden een aaneengesloten evenredigheid.

Dus: 1°) $\angle(\vec{a}_1\ M\ \vec{a}_{res}) = \angle(\vec{F}_1\ M\ \vec{F}_{res})$

De vectoren $\vec{F}_{res}$ en $\vec{a}_{res}$ zijn dus gelijk gericht.

2°) $F_{res} : a_{res} = F_1 : a_1$
Maar $F_1 : a_1 = ma_1 : a_1 = m : 1$ $\Big\}$ $F_{res} : a_{res} = m : 1$
Dus $F_{res} = m.a_{res}$

De kracht die in grootte gelijk is aan F_{res} geeft aan het massapunt dus een versnelling die gelijk is aan a_{res}.

Uit 1°) en 2°) volgt:

$$\vec{F}_{res} = m.\vec{a}_{res}.$$

Conclusie: De kracht die in grootte en richting gelijk is aan de somvector van de krachtsvectoren $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$, dus

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

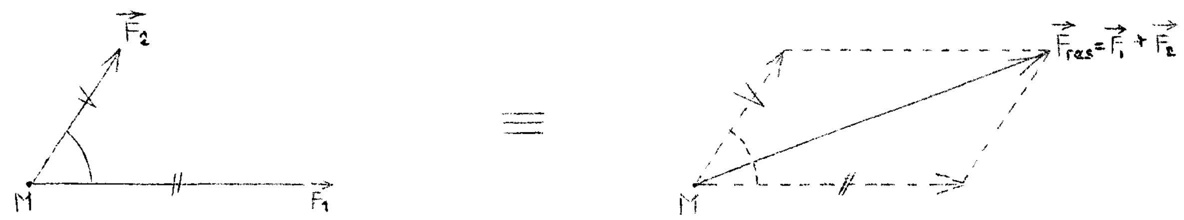
geeft aan het massapunt een versnelling die in grootte en richting gelijk is aan de resulterende versnelling

$$\vec{a}_{res} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Punt 3) Algemenere conclusie.

Bovenstaande stelling zegt eigenlijk, dat de gelijktijdige werking van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ voor het massapunt hetzelfde gevolg heeft als de werking van de kracht $\vec{F}_{res}$ (= $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$) ALLEEN.

Dus:



De werking van $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ S A M E N	≡	De werking van $\vec{F}_{res}=\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ A L L E E N

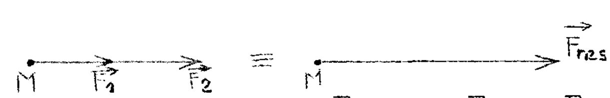
We kunnen dus de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ VERVANGEN door de kracht $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

CONCLUSIE.	We kunnen twee op eenzelfde massapunt werkende krachten SAMENSTELLEN overeenkomstig de VECTOR REKENING.

Benaming. $\vec{F}_{res}$ noemt men DE RESULTANTE van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$.

Punt 4) Bijzondere gevallen.

a) $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ gelijk gericht:



$F_{res} = F_1 + F_2$

b) $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ tegengesteld gericht:

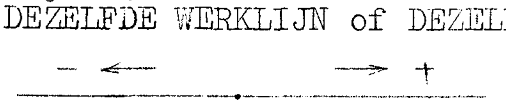
$|F_{res}| = |F_1 - F_2|$

c) $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ zijn gelijk van groot te en tegengesteld gericht:

$F_{res} = 0$

In dit geval HOUDEN DE KRACHTEN ELKAAR IN EVENWICHT. Men zegt ook wel dat de krachten elkaar nu OPHEFFEN, maar dit moet men goed verstaan! De krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ BLIJVEN BESTAAN, MAAR ZE BELETTEN ELKAAR OM AAN HET MASSAPUNT EEN VERSNELLING TE GEVEN.

In deze bijzondere gevallen werken de krachten dus langs eenzelfde lijn. (Men drukt dit ook wel uit door te zeggen, dat de krachten DEZELFDE WERKLIJN of DEZELFDE DRAGER hebben.)



Door aan DE TWEE RICHTINGEN LANGS DEZE GEMEENSCHAPPELIJKE WERKLIJN tekens toe te kennen (b.v. naar rechts + en naar links −) kan men in deze bijzondere gevallen het bepalen van de resultante herleiden tot een ALGEBRAÏSCH PROBLEEM: de gevallen a, b en c worden dan samengevat in èèn vergelijking, n.l.

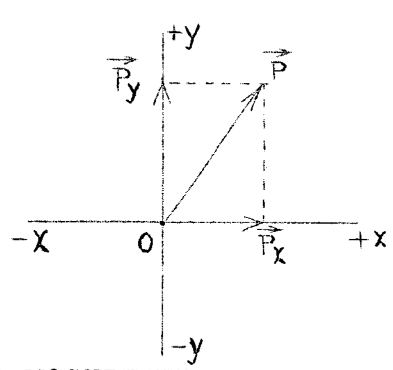
$$\boxed{F_{res} = F_1 + F_2}$$

Punt 5) We kunnen dus twee op eenzelfde massapunt werkende krachten SAMENSTELLEN overeenkomstig de vectorrekening.
Omgekeerd, KUNNEN WE EEN KRACHT OOK ONTBINDEN in twee COMPONENTEN: en wel op (oneindig)^2 veel manieren.

De werking van kracht $\vec{R}$ A L L E E N	≡	De werking van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ S A M E N

A II: Een andere methode om twee op eenzelfde massapunt werkende krachten samen te stellen; het samenstellen van meerdere op eenzelfde massapunt werkende krachten.

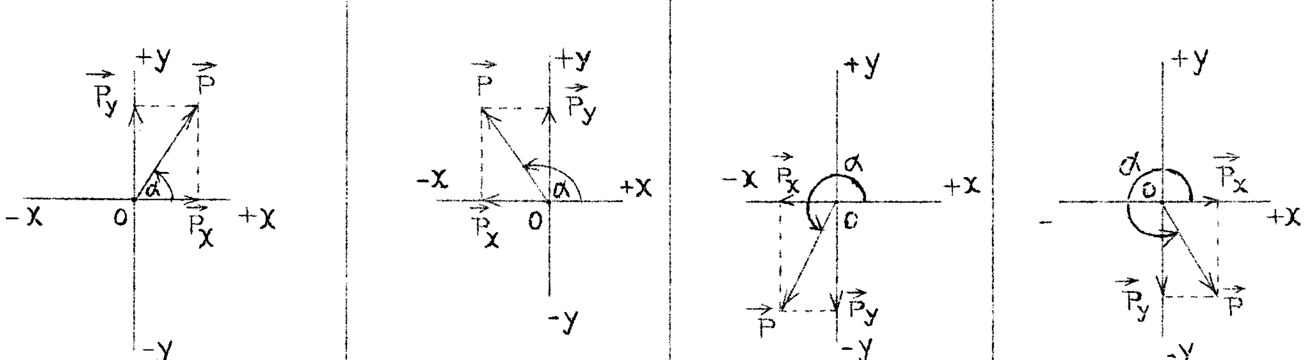
Punt 1) De X- en Y- componenten van een kracht.



In nevenstaande figuur stelt vector $\vec{P}$ een kracht voor die op een zich in O bevindend massapunt werkt. We ONTBINDEN de kracht $\vec{P}$ in twee componenten die langs de respectievelijke assen van het coördinatenstelsel vallen:
kracht $\vec{P}_X$ heet de X-component van $\vec{P}$;
kracht $\vec{P}_Y$ heet de Y-component van $\vec{P}$.

VIER MOGELIJKHEDEN:

$\vec{P}$ in 1° kwadr. | $\vec{P}$ in 2° kwadr. | $\vec{P}$ in 3° kwadr. | $\vec{P}$ in 4° kwadr.



We moeten wel bedenken, dat de componenten $\vec{P}_X$ en $\vec{P}_Y$ GEWONE KRACHTEN zijn waarvan:
DE GROOTTEN gelijk zijn aan een bepaald AANTAL newton, en
DE RICHTINGEN samenvallen met DE POSITIEVE-OF DE NEGATIEVE RICHTING VAN EEN DER COORDINAAT ASSEN.

De bijzonderheid, dat deze krachtscomponenten $\vec{P}_X$ en $\vec{P}_Y$ PER DEFINITIE LANGS DE X- resp. Y- AS VALLEN, VERSCHAFT ONS DE MOGELIJKHEID OM DE RICHTINGEN VAN DEZE COMPONENTEN LANGS DE RESP. ASSEN VAST TE LEGGEN DOOR AAN DEZE COMPONENTEN EEN ALGEBRAISCH TEKEN T O E T E K E N N E N.

BIJ WIJZE VAN AFSPRAAK kennen we aan een krachtscomponent DIE LANGS EEN POSITIEVE AS VALT EEN + TEKEN toe, en aan een krachtscomponent DIE LANGS EEN NEGATIEVE AS VALT EEN - TEKEN.

Vraag: Welk NUT heeft deze afspraak?

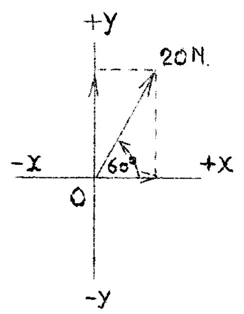
Vraag: Welk NUT heeft deze afspraak?

Antwoord: HET NUT VAN DEZE AFSPRAAK IS, DAT NU VOOR IEDERE WAARDE VAN HOEK α (zie fig.) VOOR DE X- en Y-COM PONENTEN VAN EEN KRACHT $\vec{P}$ DE VOLGENDE FORMULES GELDEN:

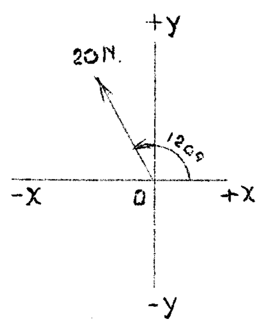
VOOR DE X- COMPONENT	VOOR DE Y- COMPONENT.
$\boxed{P_X = P \cos \alpha}$	$\boxed{P_Y = P \sin \alpha}$

Controleer deze formules in bovenstaande figuren.

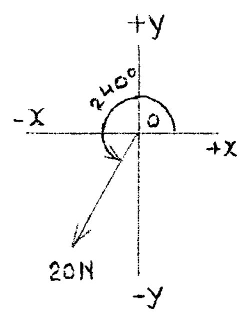
Opgave 34. Bepaal in elk van de volgende gevallen de ALGEBRAISCHE WAARDEN van de krachtscomponenten $\vec{P}_X$ en $\vec{P}_Y$



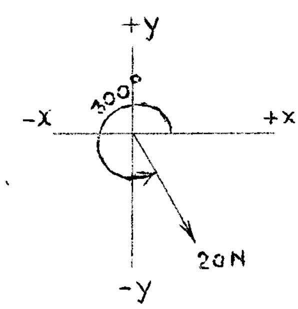
P_X = 20 cos 60°
P_Y = 20 sin 60°



P_X =
P_Y =



P_X =
P_Y =



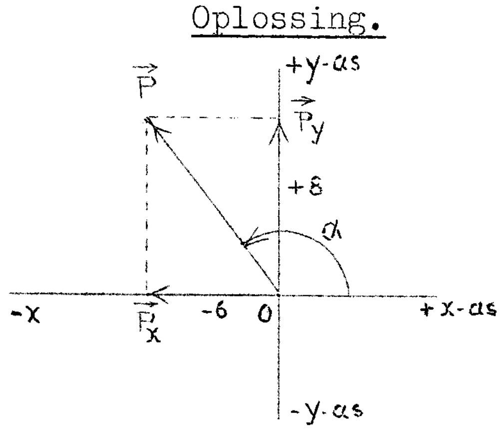
P_X =
P_Y =

Punt 2) Omgekeerd, is de kracht $\vec{P}$ zowel wat betreft de grootte als de richting volkomen bepaald als de ALGEBRAISCHE WAARDEN van de componenten $\vec{P}_X$ en $\vec{P}_Y$ bepaald zijn.

Opgave 35. Gegeven: P_X = - 6 Newton.
P_Y = - 8 Newton.

Gevraagd: $\vec{P}$ (dus de grootte ěn de richting)

Oplossing.



We beginnen de oplossing met het maken van een tekening:

1 Teken X- en Y-as. Geef duidelijk de + en - richtingen aan.

2 Teken de componenten $\vec{P}_X$ en $\vec{P}_Y$ zo veel mogelijk op schaal.

3 Construeer de vector $\vec{P}$.

Uit de constructie volgt dat bij deze gegevens de vector $\vec{P}$ in het tweede kwadrant ligt.

Berekening van $\vec{P}$.

$\vec{P}$ <

DE GROOTTE $P^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2 = 100$

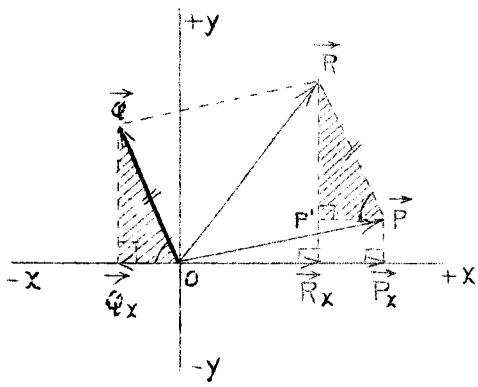
$\boxed{P = 10 \text{ NEWTON.}}$

NB. NIET ± 10, want de stelling van Pythagoras geeft ons alleen de rekenkundige getallen waarde.

DE RICHTING

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{de ALGEBR.WAARDE v. } P_Y}{\text{de ALGEBR.WAARDE v. } P_X} = $$
$$= \frac{+8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

Punt 3) De X- en Y- component VAN DE RESULTANTE van twee op EENZELFDE massapunt werkende krachten.



In nevenstaande figuur zijn $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ twee op een zich in O bevindend massapunt werkende krachten; $\vec{R}$ is hun resultante.

We ontbinden $\vec{P}$ in $\vec{P_X}$ en $\vec{P_Y}$

$\vec{Q}$ in $\vec{Q_X}$ en $\vec{Q_Y}$

$\vec{R}$ in $\vec{R_X}$ en $\vec{R_Y}$

We vragen nu naar het verband tussen

a) $\vec{P_X}$, $\vec{Q_X}$ en $\vec{R_X}$

b) $\vec{P_Y}$, $\vec{Q_Y}$ en $\vec{R_Y}$.

STELLING I. DE ALGEBRAISCHE WAARDE VAN $\vec{R_X}$ IS GELIJK AAN DE SOM VAN DE ALGEBRAISCHE WAARDEN VAN $\vec{P_X}$ EN $\vec{Q_X}$.

Dus: $R_X = P_X + Q_X$

Bewijs. In bovenstaande figuur zijn de gearceerde driehoeken congruent (geval ZHH)
Hieruit volgt dat het lijnstuk Q_X gelijk is aan $\overline{PP'}$
Daar de vierhoek, waarvan het punt P' en de pijlpunten van $\vec{P}$, $\vec{P_X}$ en $\vec{R_X}$ de hoekpunten zijn, een rechthoek is, volgt:

$$R_X = P_X - \overline{PP'}$$
$$= P_X - |Q_X|$$

Dus: $\boxed{R_X = P_X + Q_X}$

q.e.d.

STELLING II. DE ALGEBRAISCHE WAARDE VAN $\vec{R_Y}$ IS GELIJK AAN DE SOM VAN DE ALGEBRAISCHE WAARDEN VAN $\vec{P_Y}$ EN $\vec{Q_Y}$.

Dus: $R_Y = P_Y + Q_Y$

Bewijs: idem als stelling I.

CONCLUSIE.

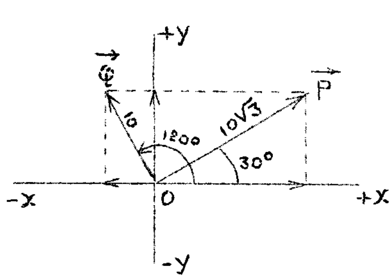
kracht	Algebr.waarde X-comp.	Algebr.waarde Y-Comp
$\vec{P}$	P_X	P_Y
$\vec{Q}$	Q_X	Q_Y
$\vec{R}$	$R_X = P_X + Q_X$	$R_Y = P_Y + Q_y$

Opgave 36. Gegeven: $\vec{P}$; grootte $10\sqrt{3}$ Newton, $\angle\alpha = 30^\circ$

$\vec{Q}$; grootte 10 Newton, $\angle\alpha = 120^\circ$

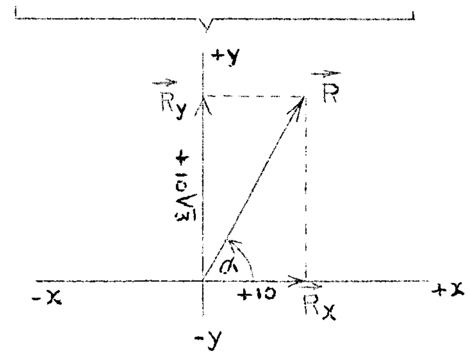
Gevraagd: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

Oplossing.



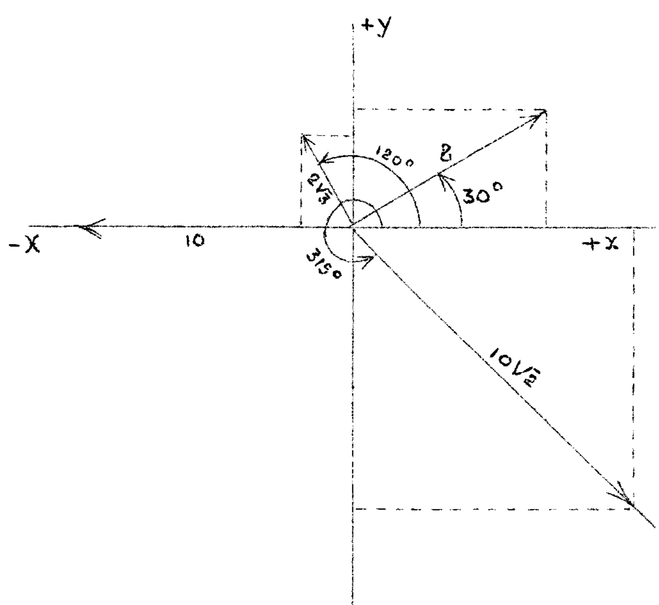
Kracht	algebr.w. X-comp.	Algebr.w. Y-comp.
$\vec{10\sqrt{3}}$	+ 15	$+ 5\sqrt{3}$
$\vec{10}$	- 5	$+ 5\sqrt{3}$
$\vec{R}$	+ 10	$+10\sqrt{3}$

+



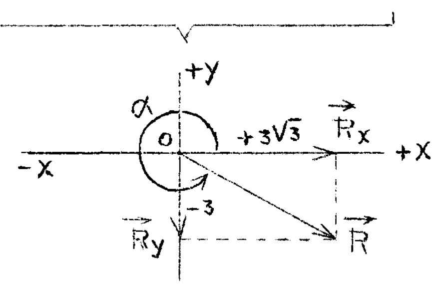
$$\vec{R}\left\{\begin{array}{l} R^2 = 100 + 300 = 400 \longrightarrow \boxed{R = 20 \text{ Newton}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{+10\sqrt{3}}{+10} = \sqrt{3} \longrightarrow \boxed{\alpha = 60^\circ} \end{array}\right.$$

Opgave 37.



$\vec{F}$	X-comp.	Y-comp.
$\vec{8}$		
$\overrightarrow{2\sqrt{3}}$		
$\vec{10}$		
$\overrightarrow{10\sqrt{2}}$		
$\vec{R}$	$+3\sqrt{3}$	-3

+



$$\vec{R}\left\{\begin{array}{l} R^2 = 27 + 9 = 36 \longrightarrow R = 6 \text{ Newton} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-3}{+3\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \longrightarrow \alpha = 330^\circ \end{array}\right.$$

A III. EVENWICHT VAN KRACHTEN DIE OP EENZELFDE MASSAPUNT WERKEN.

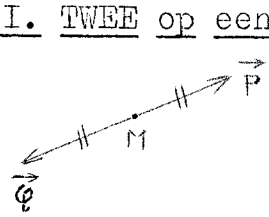
Punt 1) Definitie. Men zegt, dat enige op èènzelfde massapunt werkende krachten MET ELKAAR IN EVENWICHT ZIJN, (of elkaar in evenwicht houden) als DE RESULTANTE VAN DEZE KRACHTEN NUL IS.

We gaan nu onderzoeken welk verband er tussen de grootten en de richtingen van de op een massapunt werkende krachten moet bestaan opdat deze krachten met elkaar in evenwicht zullen zijn.

We zullen eerst onderzoeken aan welke voorwaarden de krachtsvectoren MEETKUNDIG moeten voldoen opdat deze krachten met elkaar in evenwicht zijn; daarna onderzoeken we de ALGEBRAISCHE voorwaarden.

Punt 2) De MEETKUNDIGE voorwaarden.

Geval I. TWEE op eenzelfde massapunt werkende krachten.



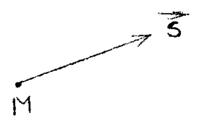
Opdat twee op eenzelfde massapunt werkende krachten met elkaar in evenwicht zijn is nodig en voldoende, dat deze krachten:

1°) GELIJK zijn van grootte, en

2°) TEGENGESTELD ZIJN van richting.

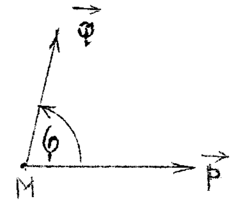
Immers, dan en slechts dan is de SOMVECTOR van deze krachten NUL.

Opgave 38.



Construeer de kracht die met de kracht $\vec{S}$ in evenwicht is.

Geval II. DRIE op eenzelfde massapunt werkende krachten.



Gegeven: $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ zijn twee op eenzelfde massapunt M werkende krachten.
Deze krachten maken een hoek φ ($\neq 0$, $\neq 180^\circ$) met elkaar.

Gevraagd: De kracht $\vec{F}$ zo dat de krachten $\vec{P}$, $\vec{Q}$ en $\vec{F}$ met elkaar in evenwicht zijn.

Oplossing: Volg de tekst bij de figuren 1 en 2.

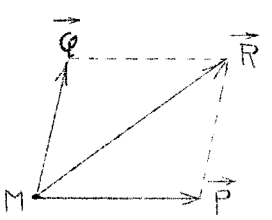


fig. 1

De krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ hebben de kracht $\vec{R}$ tot resultante, d.w.z. de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ hebben SAMEN dezelfde uitwerking als de kracht $\vec{R}$ ALLEEN heeft.
De gevraagde kracht $\vec{F}$ moet dus IN EVENWICHT ZIJN MET DE RESULTANTE $\vec{R}$ VAN DE KRACHTEN $\vec{P}$ EN $\vec{Q}$.

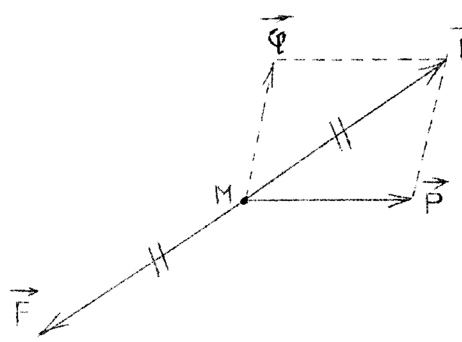


fig. 2.

$\vec{F}$ is de gevraagde kracht.

Meetkundige bijzonderheid:
De kracht $\vec{F}$ is GELIJK EN TEGENGESTELD aan de resultante $\vec{R}$ van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

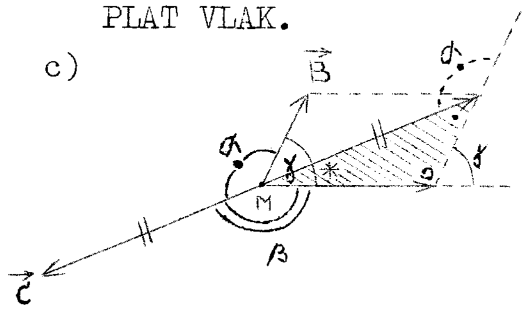
CONCLUSIE. Drie op eenzelfde massapunt werkende krachten zijn DAN EN SLECHTS DAN met elkaar IN EVENWICHT ALS EEN VAN DEZE KRACHTEN GELIJK EN TEGENGESTELD IS AAN DE SOMVECTOR VAN DE ANDERE KRACHTEN.

Nadere bijzonderheden.

a) In fig. 2 is de kracht $\vec{P}$ ook gelijk en tegengesteld aan de somvector van de krachten $\vec{Q}$ en $\vec{F}$; $\vec{Q}$ is ook gelijk en tegengesteld aan de somvector van $\vec{P}$ en $\vec{F}$.

b) ALS DRIE OP EENZELFDE MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN MET ELKAAR IN EVENWICHT ZIJN LIGGEN DEZE DRIE KRACHTEN PERSÉ IN EENZELFDE PLAT VLAK.

c)



De krachten $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\vec{C}$ zijn met elkaar in evenwicht.
Passen we nu in de gearceerde driehoek de sinusregel toe, dan volgt:

$$\frac{A}{\sin\bullet} = \frac{B}{\sin *} = \frac{C}{\sin\circ}$$

Dus:

Dus: $\boxed{\dfrac{A}{\sin\alpha} = \dfrac{B}{\sin\beta} = \dfrac{C}{\sin\gamma}}$

Geval III. VIER op eenzelfde massapunt werkende krachten.

Opdat vier op eenzelfde massapunt werkende krachten met elkaar in evenwicht zijn is nodig en voldoende dat DE SOMVECTOR VAN DRIE VAN DEZE KRACHTEN GELIJK EN TEGENGESTELD IS AAN DE VIERDE KRACHT.

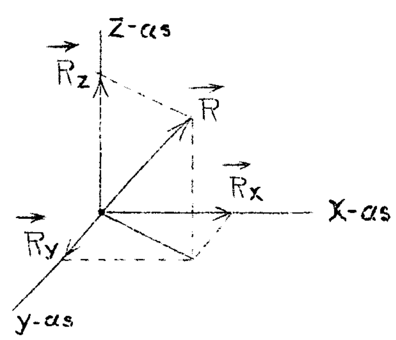
Opmerking. De krachten behoeven nu NIET IN EENZELFDE PLAT VLAK TE LIGGEN.

Geval IV. VIJF OF MEER op eenzelfde massapunt werkende krachten.

Voor evenwicht is nodig en voldoende dat ÉÉN VAN DEZE KRACHTEN GELIJK EN TEGENGESTELD IS AAN DE SOMVECTOR VAN DE ANDERE KRACHTEN.

De evenwicht makende krachten behoeven dan niet in eenzelfde plat vlak te liggen.

Punt 3) DE ALGEBRAÏSCHE VOORWAARDEN.



Analoog aan de in deel A II punt 3) bewezen stelling, geldt voor de resultante van enige niet in een plat vlak gelegen, op eenzelfde massapunt werkende krachten dat:

$$R_X = \Sigma F_X$$

$$R_Y = \Sigma F_Y$$

$$R_Z = \Sigma F_Z$$

$$R^2 = R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2$$

Welnu: De som van drie kwadraten is dan en slechts dan nul als elk van deze kwadraten nul is.

CONCLUSIE. Opdat meerdere (eventueel niet in eenzelfde vlak gelegen), op eenzelfde massapunt werkende krachten met elkaar in evenwicht zijn, is nodig en voldoende dat:

$$\text{ěn } \Sigma F_X = 0 \text{ ěn } \Sigma F_Y = 0 \text{ ěn } \Sigma F_Z = 0$$

A IV. Een massapunt onder invloed van meerdere krachten.

In dit onderdeel willen we een overzicht geven van de toestanden van rust of beweging waarin een massapunt kan verkeren als er op dit massapunt meerdere krachten* werken. In aansluiting hierop zullen we de kogelbaan behandelen voor het geval dat er behalve de zwaartekracht nog andere krachten op de kogel werken.

* Verondersteld wordt dat elk van deze krachten constant is van grootte en richting.

Punt 1) De mogelijke gevallen.

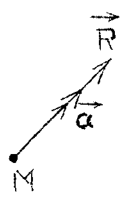
Geval I. De krachten zijn met elkaar in evenwicht (heffen elkaar op)

De resultante van deze krachten is dus NUL.

Overeenkomstig de EERSTE WET VAN NEWTON is het massapunt dan OF IN RUST, OF HET HEEFT EEN EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGING.

Geval II. De krachten zijn NIET in evenwicht met elkaar.

In dit geval is er dus een resulterende kracht $\vec{R}$.



Met betrekking tot de beweging van het massapunt is het dus ALSOF ER SLECHTS EEN KRACHT $\vec{R}$ OP HET MASSAPUNT WERKT.
Het massapunt heeft dan OVEREENKOMSTIG DE TWEEDE WET VAN NEWTON ALTIJD EEN VERSNELLING DIE BEPAALD WORDT DOOR DE FORMULE:

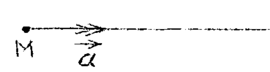
$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

CONCLUSIE. Werken op een massapunt meerdere krachten die elkaar NIET in evenwicht houden, dan heeft het massapunt altijd EEN VERSNELLING.
Is $\vec{R}$ de resultante van de gegeven krachten, dan volgt de versnelling uit de formule:

$$\vec{R} = m \times \vec{a}.$$

NB. Vraag: Welke beweging voert het massapunt dan uit?
Antwoord: Er zijn VIER MOGELIJKHEDEN:

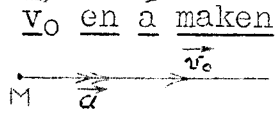
1°) Het massapunt heeft GEEN BEGINSNELHEID.



Het massapunt krijgt dan o.i.v. $\vec{R}$ een eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid.

$$s_t = \tfrac{1}{2}\, a t^2 \text{ meter.}$$

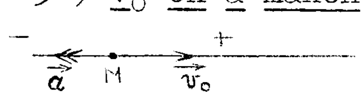
2°) $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$ maken met elkaar een HOEK 0°.



Het massapunt krijgt dan o.i.v. $\vec{R}$ een eenparig versnelde rechtlijnige beweging.

$$s_t = +|v_0|\, t + \tfrac{1}{2}|a|\, t^2 \text{ meter.}$$

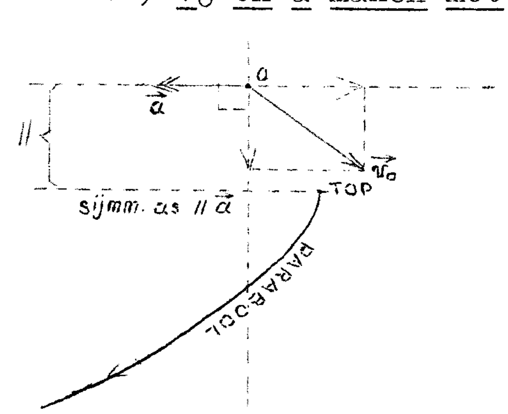
3°) $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$ maken met elkaar een HOEK 180°.



Het massapunt krijgt dan o.i.v. $\vec{R}$ een eenparig vertraagde rechtlijnige beweging

$$s_t = +|v_0|\, t - \tfrac{1}{2}|a|\, t^2 \text{ meter.}$$

4°) $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$ maken met elkaar een hoek $\neq 0°$ en $\neq 180°$.



De baan van het massapunt is dan een PARABOOL DIE

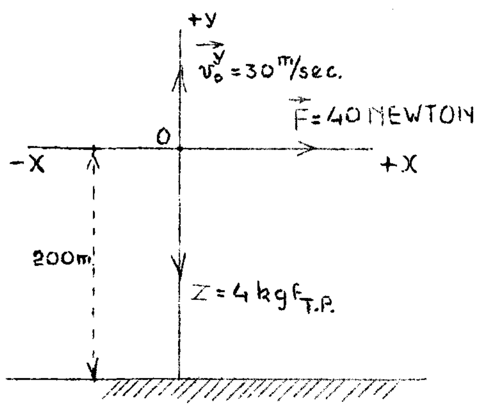
1°) gelegen is in het vlak door $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$,
2°) in O raakt aan $\vec{v}_0$, en
3°) waarvan de symmetrie-as evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de resulterende versnelling $\vec{a}$.

Punt 2) De kogelbaan voor het geval, dat er op de kogel BEHALVE DE ZWAARTEKRACHT nog een andere kracht werkt.

We zullen deze theorie behandelen aan de hand van getallenvoorbeelden.

Henric van Veldeke College
Maastricht.

Opgave 38.



Een kogel (gewicht 4 $kgf_{T.P.}$) wordt vanuit een punt O op een hoogte van 200 meter boven de grond VERTICAAL OMHOOG geschoten met een beginsnelheid van 30 m. per sec.
Tijdens de beweging werkt op de kogel behalve de zwaartekracht nog een constante HORIZONTAAL gerichte kracht van 40 Newton. $g_{T.P.} = 10\ ^m/sec^2$.

Gevraagd: a) Welke beweging voert de kogel uit in HORIZONTALE richting.

Antwoord: In horizontale richting werkt op de kogel de kracht $\vec{F}$ van 40 Newton. Deze kracht geeft aan de kogel dus een HORIZONTAAL gerichte versnelling.

$40 = m.a_{hor.}$
De kogel weegt 4 $kgf_{T.P.}$; dus $m = 4\ kg^*$

Dus: $40 = 4.a_{hor.}$

Dus $a_{hor.} = 10\ ^m/sec^2$.

In horizontale richting heeft de kogel GEEN beginsnelheid.

Conclusie. De beweging van de kogel in horizontale richting is eenparig versneld zonder beginsnelheid.

Gevraagd: b) Welke beweging voert de kogel uit in VERTICALE richting?

Antwoord: In verticale richting werkt op de kogel alleen de zwaartekracht $\vec{Z}$ van 4 $kgf_{T.P.}$ (= 40 NEWTON).
Deze zwaartekracht geeft aan de kogel de valversnelling ter plaatse, dus $\vec{g}_{T.P.}$, Deze is in grootte 10 $^m/sec^2$ en is naar beneden gericht.
De kogel heeft een verticaal naar boven gerichte beginsnelheid.

Conclusie: In verticale richting is de beweging eenparig vertraagd met beginsnelheid + 30 $^m/sec^2$ en versnelling - 10 $^m/sec^2$.

Gevraagd: c) Stel de plaats- en snelheidsfuncties op in de horizontale en de verticale richting.

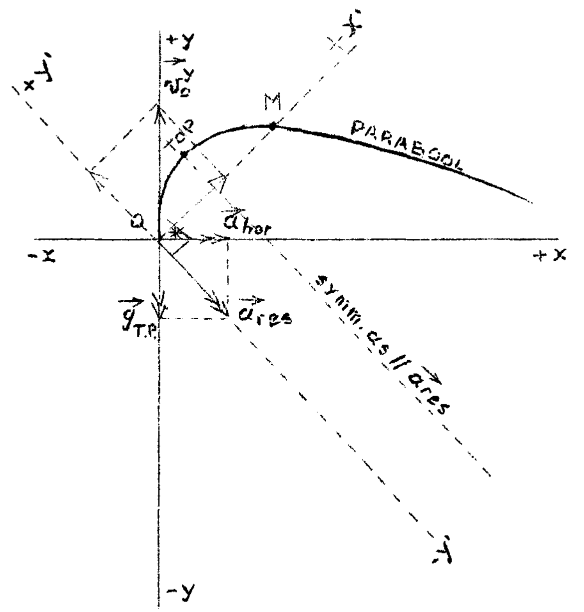
Oplossing: We kiezen de oorsprong in O; de + X-as in de richting van $\vec{F}$ en de -Y-as in de richting van $\vec{g}_{T.P.}$

X-richting.	Y-richting.
$v_o^X = 0$; $a_X = +10\ ^m/sec^2$.	$v_o^Y = +30\ ^m/sec$; $a_Y = -10\ ^m/s^2$
Dus:	Dus:
$X_t = +\ 5t^2$ meter	$Y_t = +30t - 5t^2$ meter
$v_t^X = +10t\ ^m/sec.$	$v_t^Y = +30 - 10t\ ^m/sec.$

Gevraagd: d) Welke baan beschrijft de kogel in het XOY vlak? Schets deze baan.

Antwoord: Indien we uit de plaatsfuncties de tijd zouden elimineren, zouden we in wiskundige moeilijkheden komen.

Om uit te maken welke baan de kogel nu beschrijft in het XOY-vlak, moeten we anders te werk gaan.



Recept ① We bepalen de resulterende beginsnelheid v.d. kogel t.o.v. het XOY-vlak. Deze is $\vec{v}_0^Y$.

② We bepalen de RESULTERENDE VERSNELLING v.d. kogel t.o.v. het XOY-vlak. Dit is de vector

$$\vec{a}_{res} = \vec{a}_{hor} + \vec{g}_{T.P.}$$

③ WE KIEZEN NU EEN HULPCOÖRDINATEN-STELSEL:
De oorsprong in O; $-$ Y'as in de richting van $\vec{a}_{res}$;
We ontbinden $\vec{v}_0^Y$ in een component langs de Y'as en een component ⊥ Y'as. We kiezen de + X'as in de richting van de laatstgenoemde component van $\vec{v}_0^Y$.

Langs de X'as is de beweging van de kogel EENPARIG; langs de Y'as eenparig vertraagd.

Conclusie. De baan van de kogel in het bewegingsvlak is EEN PARABOOL, DIE:

1^o) in O raakt aan de beginsnelheid van de kogel t.o.v. het bewegingsvlak (dus aan $\vec{v}_0^Y$), en waarvan

2^o) de symmetrie-as evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de versnelling van de kogel T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK (dus // $\vec{a}_{res}$).

Opmerking. Ten opzichte van het XOY coördinatenstelsel is de baan van de kogel dus EEN SCHEEFLIGGENDE PARABOOL; t.o.v. het X'OY'-coörd. stelsel is deze baan EEN (RECHTLIGGENDE) BERGPARABOOL.

Gevraagd: e) De maximale hoogte van de kogel boven de grond.

Oplossing: De kogel bereikt de grootste hoogte boven de grond als $v_t^y = 0$.

dus als $0 = +30 - 10t \longrightarrow t = 3$ sec.

Dan is: $Y_3 = +90 - 45 = +45$ m.

De hoogte boven de grond is dan + 45 + 200 = 245 meter.

Gevraagd: f) De X-coörd. van het hoogste punt boven de grond.

Oplossing: $X_3 = 5 \times 9 = +45$ meter.

Opmerking: $X_3 = +45$ meter, $Y_3 = +45$ meter ⟩ Dus $Y_3 = X_3$
Dit punt moet dus liggen op de lijn $Y = X$, d.i. de X'as, want $\angle * = 45^o$.

Conclusie. In M (zie fig.) bereikt de kogel de grootste hoogte boven de grond.

Gevraagd: g) De snelheidsvector in M.

Oplossing:

$$\vec{v}_3 \begin{cases} \text{grootte} \left.\begin{array}{l} v_3^X = +30\ {}^m/\text{sec.} \\ v_3^Y = 0 \end{array}\right\} v_3 = +30\ {}^m/\text{sec.} \\ \text{richting} \ // \ +\text{X-as.} \end{cases}$$

Gevraagd: h) Op welk tijdstip is de snelheid v.d. kogel minimaal?

Oplossing: In de top van de parabool, want dan is $v_t^{Y'} = 0$.

In dat punt loopt de snelheidsvector // + X'as.

Daar in deze opgave de X'as een $\angle$ 45° met de + X-as maakt, moet de snelheidsvector in de top dus ook een $\angle$ 45° maken met de + X-as, d.w.z. $v_t^X = v_t^Y$

$$+10t = 30 - 10t$$

$$\boxed{t = \frac{3}{2} \text{ sec.}}$$

Gevraagd: i) De coördinaten van de top.

Oplossing:

$$\left.\begin{aligned} X_{1,5} &= 5.\frac{9}{4} = 11{,}25 \text{ meter.} \\ Y_{1,5} &= 30.\frac{3}{2} - 5.\frac{9}{4} = \frac{135}{4} = 33{,}75 \text{ meter.} \end{aligned}\right\}$$

Gevraagd: j) Op welk tijdstip treft de kogel de grond.

Oplossing: De Y- coörd. van het trefpunt is - 200

Dus: $-200 = +30t - 5t^2$

Dus: $5t^2 - 30t - 200 = 0$

$t^2 - 6t - 40 = 0 \rightarrow (t - 10)(t + 4) = 0$

$t_1 = +10$ sec.

$t_2 = -4$ sec (heeft geen betekenis, omdat de kogel op t = 0 wordt opgeschoten).

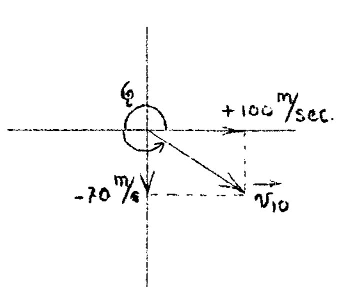
Gevraagd: k) De coörd. van het trefpunt met de grond.

Oplossing:

$$\left.\begin{aligned} X_{10} &= +5.100 = +500 \text{ meter.} \\ Y_{10} &= = -200 \text{ meter.} \end{aligned}\right\}$$

Gevraagd: l) De trefsnelheid met de grond.

Oplossing:



$\vec{v}_{10}$ {

Grootte: $v_{10}^X = +100$ m/sec.

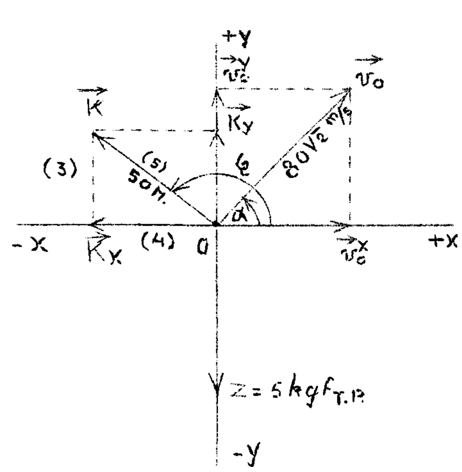
$v_{10}^Y = +30 - 100 = -70$ m/sec.

dus $v_{10} = \sqrt{100^2 + 70^2} = 10\sqrt{149}$ m/sec.

Richting: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-70}{+100} = -\frac{7}{10}$

φ in 4° kwadrant.

Opgave 39.



Een kogel (gewicht 5 $kgf_{T.P.}$) wordt vanuit een punt 0 op de grond onder een elevatiehoek $\alpha = 45°$ opgeschoten met een beginsnelheid van $80\sqrt{2}$ m/sec.

Tijdens de beweging boven de grond werkt op de kogel een kracht $\vec{K}$ met CONSTANTE GROOTTE en CONSTANTE RICHTING: De grootte van deze kracht is 50 Newton; de richting van deze kracht maakt met de horizontale component van $\vec{v}_o$ een stompe hoek waarvan de tangens $-\frac{3}{4}$ is. De verticale componenten van $\vec{K}$ en $\vec{v}_o$ zijn gelijk gericht.

$$g_{T.P.} = 10 \text{ m/sec}^2.$$

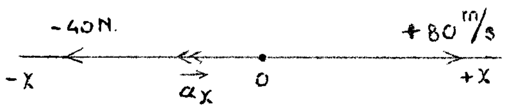
Gevraagd: a) Kies de + X-as in de richting van $\vec{v}^x$; de - Y-as in de richting van Z.
Bepaal de X- en Y- componenten van $\vec{v}_o$ en $\vec{K}$.

Oplossing:

X - richting.	Y - richting.
$v_o^x = v_o \cos.\alpha = + 80\ ^m/sec.$	$v_o^y = v_o \sin.\alpha = + 80\ ^m/sec.$
$K^x = K \cos.\varphi = - 40$ Newt.	$K^y = K \sin\varphi = + 30$ Newt.

Gevraagd: b) Welke beweging voert de kogel uit in de X-richting?

Oplossing:



De kogel heeft in de X-richting een beginsnelheid van + 80 $^m/sec.$
In de X-richting werkt echter op de kogel nog een kracht van 40 Newton, negatief gericht.

$K_x = m.a_x$

De kogel weegt 5 $kgf_{T.P.}$; dus m = 5 kg*

Dus:

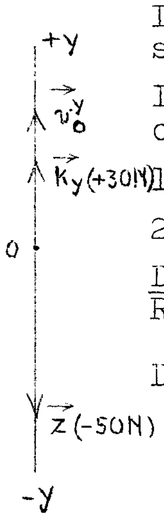
$- 40 = 5.a_x$

$a_x = - 8\ ^m/sec^2.$

Conclusie: De beweging in de X-richting is een eenparig vertraagde beweging met beginsnelheid + 80 $^m/sec.$ en versnelling - 8 $^m/sec^2$.

Gevraagd: c) Welke beweging voert de kogel uit in de Y-richting?

Oplossing:



In de Y-richting heeft de kogel een beginsnelheid van $v_o^y = + 80\ ^m/sec.$
In de Y-richting werken er nu TWEE KRACHTEN op de kogel n.l.:

1°) $\vec{K}_y$ positief gericht, dus $K_y = + 30$ Newt.
2°) $\vec{Z}$ negatief gericht; Z = - 5.10 = - 50N.

De RESULTANTE van $\vec{K}_y$ en $\vec{Z}$ is dus een kracht $\vec{R}_y$ die NEGATIEF gericht is en 20 Newton groot is.

Dus:

$R_y = - 20$ Newton.

$R_y = m.a_y$

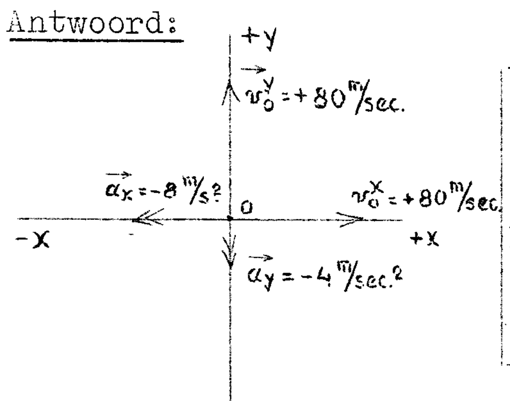
$- 20 = 5.a_y$

$$\boxed{a_y = - 4\ ^m/sec^2.}$$

Conclusie: In de Y-richting voert de kogel een eenparig vertraagde beweging uit met beginsnelheid $v_o^y = + 80\ ^m/sec.$ en versnelling $a_y = - 4\ ^m/sec^2.$

Gevraagd: d) Vul het onderstaande vergelijkingen-schema in.

Antwoord:



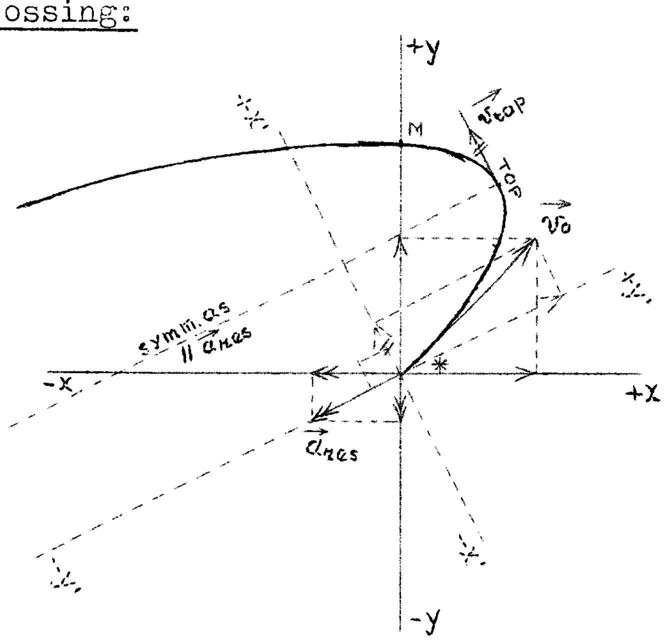
X - richting.			Y - richting.		
v_o^x =		$^m/sec.$	v_o^y =		$^m/sec.$
a_x =		$^m/sec^2$	a_y =		$^m/sec^2$
X_t =	-	meter	Y_t =	-	meter.
v_t^x =	-	$^m/sec.$	v_t^y =	-	$^m/sec.$

Opmerking.

Opmerking. De vragen a, b en c dienden alleen om dit vergelijkingen-schema voor te bereiden.
Bij de sommen beantwoordt men deze vragen "OP KLAD" en begint de oplossing "IN HET NET" met dit vergelijkingen-schema.

Gevraagd: e) Welke baan beschrijft de kogel IN HET XOY-vlak. Schets deze baan.

Oplossing:



We volgen weer het recept:

① We bepalen de resulterende beginsnelheid v.d. kogel t.o.v. het XOY vlak. Deze is $\vec{v}_0$.

② We bepalen de resulterende VERSNELLING v.d. kogel t.o.v. het XOY vlak. Deze is $\vec{a}_{res} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$

③ We bepalen HET HULPCOÖRDINATENSTELSEL X'OY' zo, dat $\vec{a}_{res}$ langs de − Y'as valt en de beweging langs de + X-as eenparig is.

Conclusie: De baan van de kogel in het XOY-vlak is een

PARABOOL,

die in O raakt aan de vector van de resulterende beginsnelheid en waarvan de symmetrie-as evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de vector van de RESULTERENDE versnelling.

Gevraagd: f) De coördinaten van de top van deze parabool.

Oplossing: In de top loopt de snelheidsvector // + X'as.
tg $\angle * = \frac{1}{2}$. Dus de tangens van de hoek die de + X'as maakt met de X-as is − 2.

In de top van de parabool is dus $v_t^y = -2v_t^x$

Dus: $80 - 4t = -160 + 16t$

$240 = 20t \longrightarrow t = 12$ sec.

Hieruit volgt: $X_{top} = X_{12} =$

$Y_{top} = Y_{12} =$

Gevraagd: g) De snelheidsvector in de top van de parabool.

Oplossing:

$\vec{v}_{top}$

Grootte: $v_{top}^x = v_{12}^x = \qquad = -16$ m/sec

$v_{top}^y = v_{12}^y = \qquad = +32$ m/sec

Dus $v_{top} = \sqrt{16^2 + 32^2} = 16\sqrt{5}$ m/sec

Richting: Maakt met de + X richting een stompe hoek waarvan de tangens − 2 is.

Gevraagd: h)

Gevraagd: h) Op welk tijdstip loopt de snelheidsvector // Y-as.

Oplossing: Op dat tijdstip is $v_t^x = 0$

Dus $0 =$

$t = 10$ sec.

Gevraagd: i) De snelheidsvector op dat tijdstip.

Oplossing:

$$\vec{v}_{10} \begin{cases} \text{Grootte: } v_{10}^x = 0 \\ v_{10}^y = \qquad\qquad = +40\ ^m/s \end{cases} v_{10} = 40\ ^m/s. \\ \text{Richting: } // + \text{Y-as.}$$

Gevraagd: j) De maximale hoogte boven de grond.

Oplossing: In het hoogste punt boven de grond is $v_t^y = 0$

Dus $0 =$

$t = 20$ sec.

Dus $h_{max} = Y_{20} = \qquad\qquad = +800$ meter.

Gevraagd: k) De coördinaten van dit hoogste punt.

Oplossing: $X_{20} = 1600 - 4.400 = 0$
$Y_{20} = \qquad\qquad = +800$ meter
Dus punt M (zie fig.)

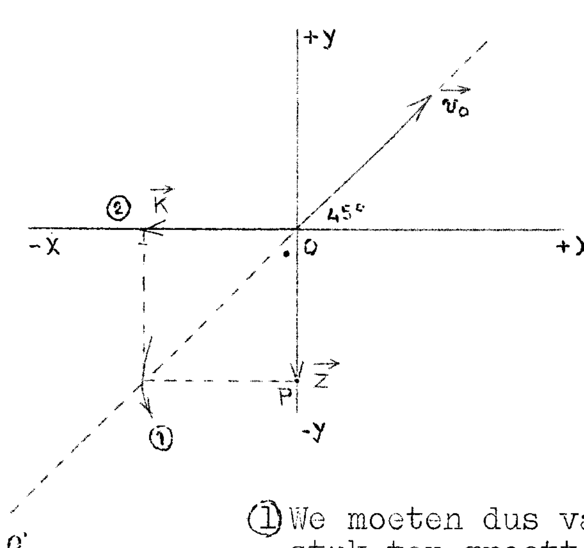
Gevraagd: l) De snelheidsvector in M.

Oplossing:

$$\vec{v}_m \begin{cases} \text{Grootte: } v_{20}^x = \qquad = -80\ ^m/s \\ v_{20}^y = \qquad = 0 \end{cases} v_M = 80\ ^m/sec. \\ \text{Richting: } // - \text{X-as.}$$

NB Gevraagd: m) In welke richting had de kracht $\vec{K}$ moeten werken opdat de baan van de kogel een halflijn geweest zou zijn?

Oplossing:



De baan in het XOY-vlak is dan en slechts dan een halflijn als $\vec{v}_0$ en $\vec{a}_{res}$ langs dezelfde lijn vallen.
Daar $\vec{a}_{res}$ gelijk gericht is met de resulterende kracht
$\vec{R} = \vec{Z} \pm \vec{K}$,
zal de kracht $\vec{K}$ dus zò gericht moeten zijn, DAT DE RESULTERENDE KRACHTVECTOR $\vec{R}$ LANGS DE DRAGER VAN VECTOR $\vec{v}_0$ VALT.

We moeten dus een parallelogram construeren waarvan O een hoekpunt is, de diagonaal langs de lijn OO' valt, vector $\vec{Z}$ een zijde is en de andere zijde de grootte K heeft.

① We moeten dus vanuit het punt P (zie fig.) een lijnstuk ter grootte van K omcirkelen op de lijn OO', en dan
② het parallelogram aftekenen.

Daar K = Z en $\angle \cdot = 45^0$ moet $\angle P = 90^0$.

Conclusie. Opdat de baan van de kogel een halflijn geweest zou zijn, had de kracht $\vec{K}$ evenwijdig moeten lopen aan de - X-as.

Gevraagd: n)

Gevraagd: n) Stel, dat noch de grootte noch de richting van kracht $\vec{K}$ gegeven was, dan waren er blijkens bovenstaande constructie oneindig veel krachten $\vec{K}$ mogelijk waarbij de baan van de kogel een halflijn is.

Bepaal de grootte en de richting van de kleinste van alle mogelijke krachten $\vec{K}$.

Oplossing: Laat in voorgaande figuur vanuit P de loodlijn neer op de lijn OO'. enz.

Deel B van § 11.

Het samenstellen van twee krachten die op een STAR lichaam werken.

Inleiding.

Punt 1) Het begrip STAR LICHAAM in de mechanica.

Natuurkundig verstaat men onder een VAST LICHAAM, een lichaam waarvan de moleculen een vaste plaats t.o.v. elkaar hebben. Oefent men op zo'n lichaam een kracht uit, dan ondergaat dit lichaam altijd een (kleine) vormverandering.

Als men IN DE MECHANICA over een vast lichaam spreekt, bedoelt men een lichaam DAT VOLSTREKT ONVERVORMBAAR IS.
Het vaste lichaam uit de mechanica is dus een IDEALISERING van het natuurkundig vaste lichaam. Om deze idealisering aan te duiden noemt men een vast lichaam in de mechanica een STAR LICHAAM.

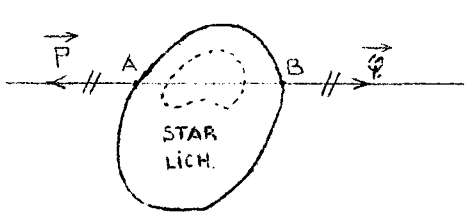
Punt 2) Men zegt, dat een kracht OP EEN LICHAAM werkt, als ze werkt op ÉÉN van de massapunten (de moleculen) waaruit het lichaam is opgebouwd. Dit punt noemt men HET AANGRIJPINGSPUNT van de kracht.

Punt 3)

In nevenstaande figuur is A het aangrijpings punt van de kracht $\vec{F}$. De LIJN door A en $\vec{F}$ noemt men DE DRAGER of DE WERKLIJN van de kracht $\vec{F}$.

Punt 4) AXIOMA.

In nevenstaande figuur zijn $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ twee op eenzelfde star lichaam werkende krachten met dezelfde werklijn, dezelfde grootte, maar met tegengestelde werkrichtingen.



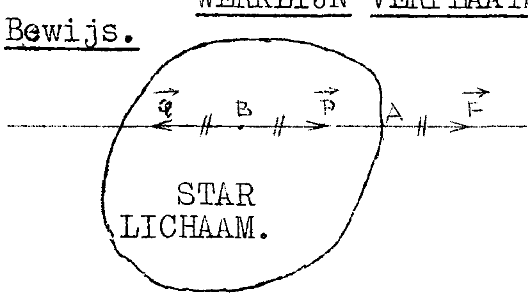
De ervaring leert, dat deze krachten GEEN VERANDERING VEROORZAKEN IN DE TOESTAND VAN RUST OF BEWEGING VAN HET LICHAAM:
Deze krachten houden elkaar dus in evenwicht (heffen elkaar op).
Het doet hierbij niets ter zake of het starre lichaam MASSIEF of HOL is.

Dit ervaringsgegeven zullen we beschouwen als een EMPIRISCH AXIOMA:

TWEE LANGS EENZELFDE LIJN OP EEN STAR LICHAAM WERKENDE, EVEN GROTE EN TEGENGESTELD GERICHTE KRACHTEN MET VERSCHILLENDE AANGRIJPINGSPUNTEN, HOUDEN ELKAAR IN EVENWICHT.

Punt 5) STELLING. De uitwerking van een op een star lichaam werkende kracht verandert niet, ALS MEN DIE KRACHT LANGS HAAR WERKLIJN VERPLAATST.

Bewijs.



In het punt A van een star lichaam grijpt de kracht $\vec{F}$ aan.
In een willekeurig punt B VAN DE WERKLIJN VAN KRACHT $\vec{F}$ laten we twee gelijke en tegengesteld gerichte krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ aangrijpen, DIE EVEN GROOT ZIJN ALS KRACHT $\vec{F}$ en dezelfde werklijn hebben als $\vec{F}$.

De krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ heffen elkaar op: de drie krachten $\vec{F}$, $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ HEBBEN SAMEN DUS DEZELFDE UITWERKING ALS DE KRACHT $\vec{F}$ ALLEEN.
We kunnen, volgens het empirisch axioma, echter ook zeggen, DAT DE KRACHTEN $\vec{F}$ EN $\vec{Q}$ ELKAAR OPHEFFEN: De krachten $\vec{F}$, $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ HEBBEN SAMEN DUS DEZELFDE UITWERKING ALS DE KRACHT $\vec{P}$ ALLEEN.
DE KRACHT $\vec{P}$ ALLEEN HEEFT DUS DEZELFDE UITWERKING ALS DE KRACHT $\vec{F}$ ALLEEN.

CONCLUSIE. De uitwerking van een, op een star lichaam werkende kracht verandert niet, ALS MEN DEZE KRACHT LANGS HAAR WERKLIJN VERPLAATST.

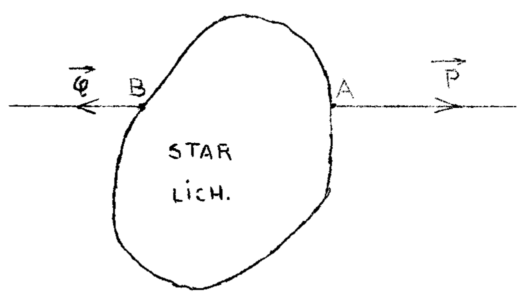
B I. Het samenstellen van twee op eenzelfde star lichaam werkende krachten MET DEZELFDE WERKLIJN.

Gegeven: De krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ hebben dezelfde werklijn.

Gevraagd: De resulterende kracht.

Oplossing: We mogen de krachten LANGS HUN WERKLIJN verplaatsen: We verplaatsen kracht $\vec{Q}$ langs haar werklijn zò dat A het aangrijpingspunt wordt.

Het probleem is dan teruggebracht tot het samenstellen van twee IN EENZELFDE PUNT AANGRIJPENDE KRACHTEN.



Hun resultante $\vec{R}$ is dus:

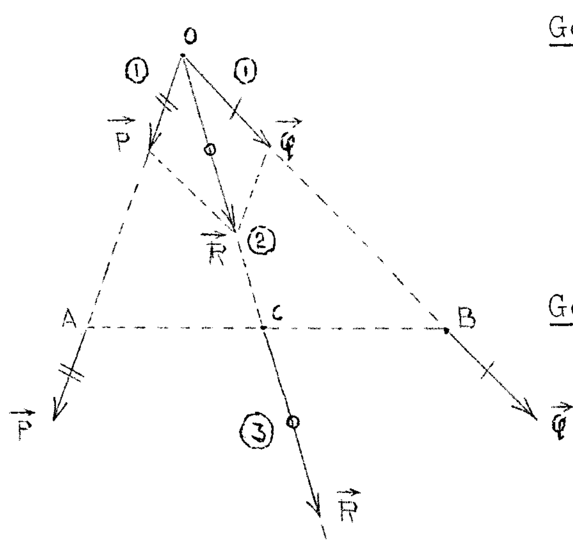
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$$

B II. Het samenstellen van twee op eenzelfde star lichaam werkende krachten WAARVAN DE WERKLIJNEN ELKAAR SNIJDEN.

Punt 1) De constructie van de resultante.

Gegeven: $\vec{P}$ (aangrijpend in A) en $\vec{Q}$ (aangrijpend in B) zijn twee op een star lichaam werkende krachten.
De werklijnen van deze krachten liggen in het vlak van tekening en SNIJDEN ELKAAR IN O.

Gevraagd: De resulterende kracht, d.w.z. de kracht die dezelfde uitwerking heeft als de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ SAMEN hebben.



Constructie.

① We verplaatsen de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ langs hun werklijnen naar O.
Volgens het verplaatsingsaxioma hebben de in O aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ dezelfde uitwerking als de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

② We construeren de resultante $\vec{R}$ van de in O aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.
$\vec{R}$ ALLEEN heeft nu dezelfde uitwerking als de in O aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$, DUS DEZELFDE UITWERKING ALS DE IN A RESP. B AANGRIJPENDE KRACHTEN $\vec{P}$ EN $\vec{Q}$.

③ We verplaatsen de in O aangrijpende kracht $\vec{R}$ langs haar werklijn zò dat C het aangrijpingspunt wordt.

De in C aangrijpende kracht $\vec{R}$ ALLEEN heeft nu dezelfde uitwerking op het starre lichaam als de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ SAMEN hebben.

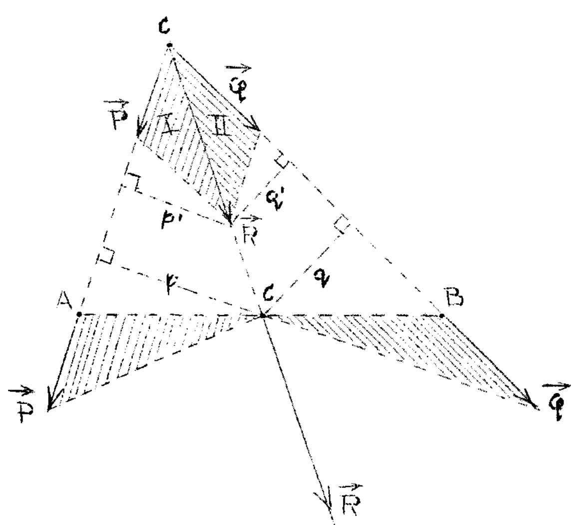
CONCLUSIE. De in C aangrijpende kracht $\vec{R}$ is de resultante van de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

Opmerking. We zijn natuurlijk niet VERPLICHT om de kracht $\vec{R}$ in punt C van haar werklijn te laten aangrijpen. Het is wel gebruikelijk om C als het aangrijpingspunt te beschouwen.

Benaming. C noemt men HET MIDDELPUNT of HET ZWAARTEPUNT van de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

Punt 2) Gevraagd: Een meetkundige bijzonderheid van het punt C.

Antwoord:



De gearceerde driehoeken I en II zijn congruent en hebben dus HETZELFDE OPPERVLAK.

Dus: $\frac{1}{2}P \times p' = \frac{1}{2}Q \times q'$

Dus: $P \times p' = Q \times q'$

of: $P : Q = q' : p'$

Maar: $q' : p' = q : p$

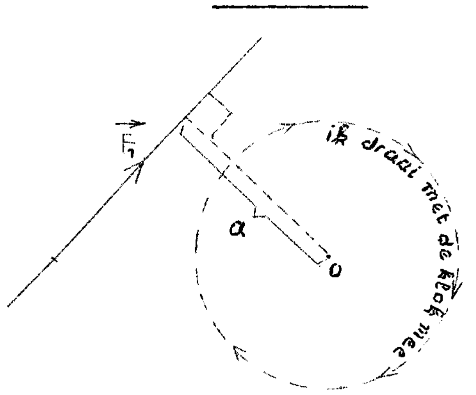
Dus: $P : Q = q : p$

Dus: $\boxed{P \times p = Q \times q}$ ①

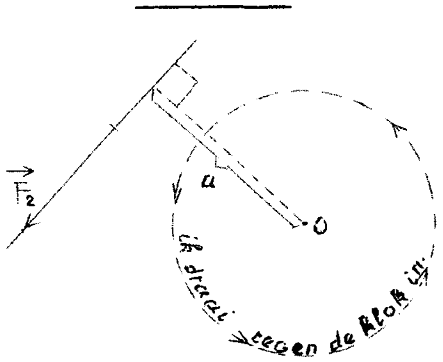
Conclusie. Het punt C verdeelt het lijnstuk AB in twee stukken AC en CB zò, dat opp. $\triangle(CA,\vec{P})$ = opp. $\triangle(CB,\vec{Q})$

Punt 3) Om deze conclusie gemakkelijker onder woorden te kunnen brengen heeft men in de mechanica een nieuw begrip ingevoerd, n.l.: HET MOMENT VAN EEN KRACHT T.O.V. EEN PUNT.

Geval I



Geval II



In bovenstaande figuren stellen $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ krachten voor die langs de getekende werklijnen op een vast lichaam werken. O is een willekeurig punt in het vlak van tekening.

<u>Benamingen:</u> 1) De lengte van de loodlijn a vanuit Q op de werklijn van de kracht neergelaten heet DE ARM VAN DE KRACHT T.O.V. HET PUNT O.

2) Zou het punt O VAST zijn, zodat het vaste lichaam om O kon draaien, dan zou de kracht $\vec{F}_1$ in geval I aan het vlak van tekening een draaiing MET DE KLOK MEE geven, en de kracht $\vec{F}_2$ in geval II een draaiing TEGEN DE KLOK IN.

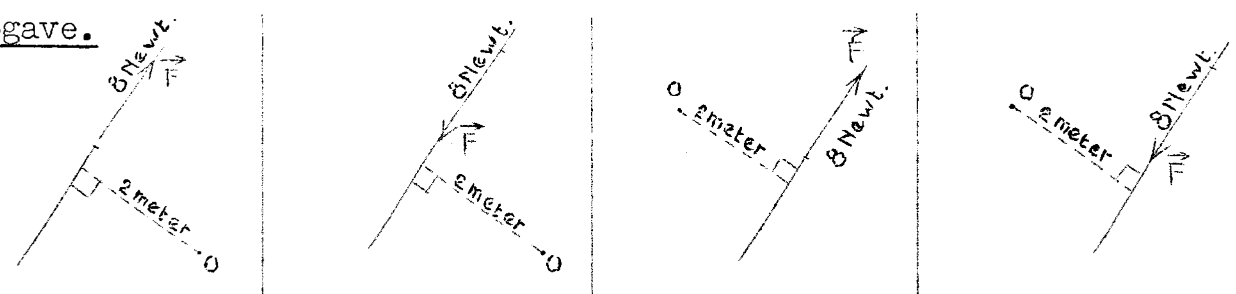
<u>Welnu:</u> Een draaiing MET DE KLOK MEE zullen we POSITIEF, een draaiing TEGEN DE KLOK IN NEGATIEF noemen.

<u>DEFINITIE.</u> ONDER HET MOMENT VAN EEN KRACHT T.O.V. EEN PUNT VERSTAAT MEN HET PRODUCT VAN DE KRACHT EN DE ARM, MET IN-ACHT-NAME VAN HET TEKEN. HET MOMENT IS POSITIEF, ALS DE DRAAIING VAN DE KRACHT T.O.V. HET PUNT POSITIEF IS; HET MOMENT IS NEGATIEF, ALS DE DRAAIING VAN DE KRACHT T.O.V. HET PUNT NEGATIEF IS.

<u>Notatie.</u> Het moment van een kracht t.o.v. een punt wordt aangeduid met de hoofdletter M.

<u>Dimensie. De dimensie van M is Newton x meter.</u>

<u>Opgave.</u>



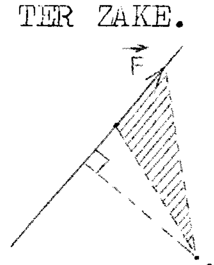
$\underset{\vec{F} tov O}{M} = +$ Nxm	$\underset{\vec{F} tov O}{M} = -$ Nxm	$\underset{\vec{F} tov O}{M} =$ Nxm	$\underset{\vec{F} tov O}{M} =$ Nxm

<u>Opmerkingen.</u> a) Bij het bepalen van het moment van een kracht t.o.v. een punt, moet men dus op DRIE dingen letten:

1°) het teken;
2°) de grootte van de kracht;
3°) de grootte van de arm.

DE LIGGING VAN DE KRACHT OP DE WERKLIJN DOET NIETS TER ZAKE.

b)

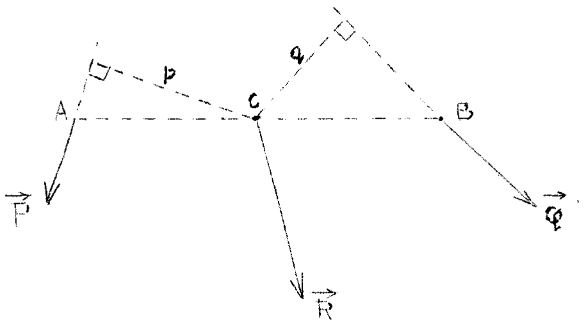


De grootte van het moment van de kracht $\vec{F}$ t.o.v. het punt O = 2 x Opp. $\triangle(O,\vec{F})$
Uit de meetkunde weten we dat Opp. $\triangle(O,\vec{F})$ niet verandert, als we $\vec{F}$ langs haar werklijn verplaatsen.

c) Het moment van een kracht t.o.v. een punt is NUL, als:
1°) de grootte van de kracht nul is,
2°) de grootte van de arm nul is; dus als het punt O op de werklijn van de kracht ligt.

Punt 4)

Punt 4)



In punt 2) vonden we voor de ligging van C op AB de bijzonderheid:

$$P \times p = Q \times q \qquad (1)$$

We kunnen deze vergelijking nu schrijven als:

$$- Pp + Qq = 0 \qquad (2)$$

Nu is $- Pp = M_{\text{van } \vec{P} \text{ t.o.v. } C}$

$+ Qq = M_{\text{van } \vec{Q} \text{ t.o.v. } C}$

Uit vergelijking (2) volgt dus, dat het punt C zo'n ligging heeft op AB, dat

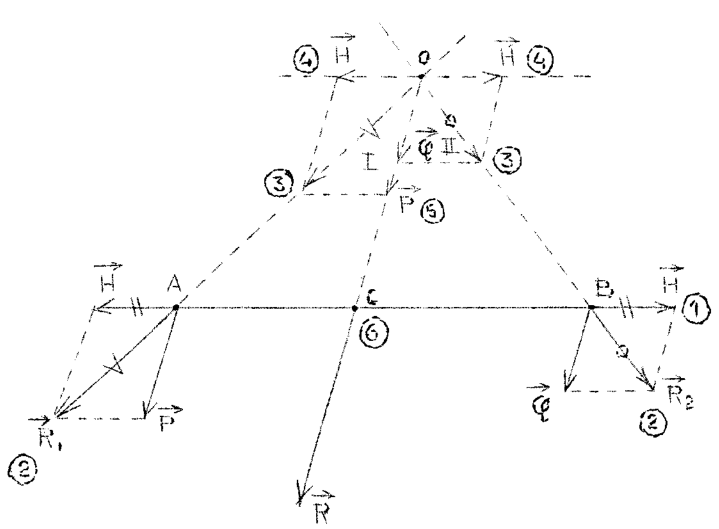
$$M_{\vec{P}\text{ t.o.v.C}} + M_{\vec{Q}\text{ t.o.v.C}} = 0$$

CONCLUSIE. Het middelpunt C van de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ heeft zo'n ligging op het lijnstuk AB dat de algebraïsche som van de momenten van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ t.o.v. C gelijk is aan NUL.

Benaming. Deze stelling zullen we DE MOMENTENSTELLING noemen.

B III. Het samenstellen van twee EVENWIJDIGE GELIJKGERICHTE krachten.

Punt 1) De constructie van de resultante.



(1) In A resp. B grijpen de evenwijdige krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ aan.
We laten in de punten A en B twee gelijke en tegengesteld gerichte HULPKRACHTEN $\vec{H}$ aangrijpen waarvan de werklijnen langs DE LIJN AB vallen.

(2) We bepalen de resultanten $\vec{R_1}$ en $\vec{R_2}$

(3) We verplaatsen $\vec{R_1}$ en $\vec{R_2}$ langs hun werklijnen naar het snijpunt O.

(4) We ontbinden de in O aangrijpende krachten $\vec{R_1}$ en $\vec{R_2}$ elk in twee componenten zò, dat de $\vec{H}$ èèn component wordt.

De andere component van $\vec{R_1}$ is dan gelijk en // $\vec{P}$;
de andere component van $\vec{R_2}$ is dan gelijk en // $\vec{Q}$.

(5) Daar de in O aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ samenvallen, heeft de resultante van deze krachten dezelfde richting als $\vec{P}$ en $\vec{Q}$, en is de grootte van deze resultante gelijk aan:

$$\boxed{R = P + Q}$$

(6) We verplaatsen deze resultante langs haar werklijn naar het punt C. De kracht $\vec{R}$, die in C aangrijpt, heeft dezelfde uitwerking als de in A resp. B aangrijpende krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ SAMEN hebben.

CONCLUSIE.

CONCLUSIE. $\vec{R}$ is de resultante van de evenwijdige krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

$\vec{R}$ { Grootte: $R = P + Q$
Richting: $\vec{R} \parallel \vec{P} \parallel \vec{Q}$

Punt 2) STELLING. $AC : BC = Q : P$

In woorden: Het aangrijpingspunt van de resultante verdeelt het verbindingsstuk der aangrijpingspunten INWENDIG in stukken DIE OMGEKEERD EVENREDIG ZIJN met de aangrenzende krachten.

Bewijs.

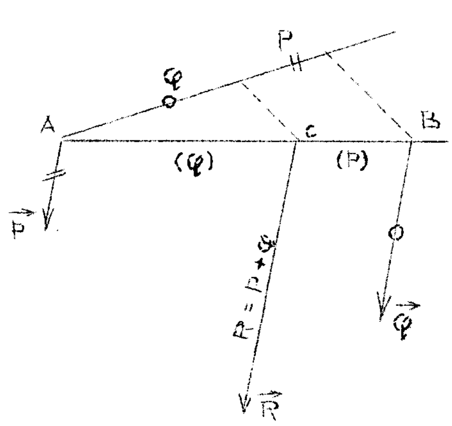
$\triangle ACO \sim \triangle I \rightarrow AC : OC = H : P \rightarrow AC \times P = OC \times H$
$\triangle BCO \sim \triangle II \rightarrow BC : OC = H : Q \rightarrow BC \times Q = OC \times H$

Dus: $AC \times P = BC \times Q$

Dus: $\boxed{AC : BC = Q : P}$

CONCLUSIE. De resultante van twee EVENWIJDIGE GELIJKGERICHTE krachten loopt evenwijdig aan- en is gelijk gericht met de gegeven krachten, en is in grootte gelijk aan de rekenkundige som van de twee gegeven krachten.
Het aangrijpingspunt van de resultante verdeelt het verbindingsstuk der aangrijpingspunten van de gegeven krachten INWENDIG in stukken die OMGEKEERD EVENREDIG zijn met de aangrenzende krachten.

Punt 3) Eenvoudige constructie van het punt C.



$\boxed{AC : BC = Q : P}$

Getallenvoorbeeld.

Gegeven: $P = 2$ Newton.
$Q = 4$ Newton
$AB = 0{,}12$ meter.

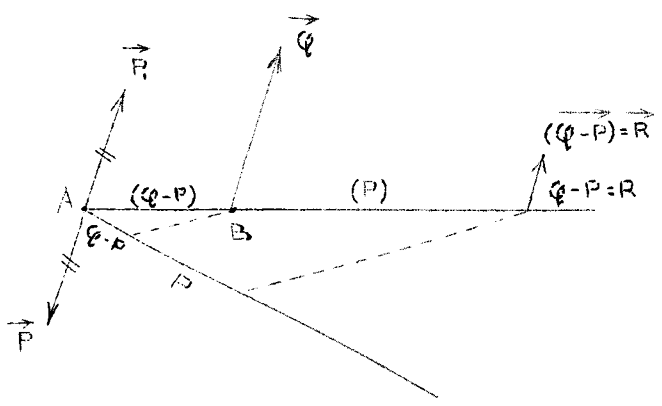
Gevraagd: R, AC en BC

Oplossing: $R = P + Q = 2 + 4 = 6$ Newton.
$AC : BC = 4 : 2$
$(AC+BC) : (4+2) = AC : 4$
$0{,}12 : 6 = AC : 4 \longrightarrow AC = 0{,}08$ meter
$BC = 0{,}04$ meter

Deel B IV.

Deel B IV. Het samenstellen van twee EVENWIJDIGE TEGENGESTELD gerichte krachten van verschillende grootten.

Punt 1) De constructie van de resultante.



In A resp. B grijpen de evenwijdige en tegengesteld gerichte krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ aan.
We nemen aan, dat deze krachten NIET GELIJK VAN GROOTTE zijn.
Stel, dat de kracht $\vec{Q}$ groter is dan de kracht $\vec{P}$.
We ontbinden de kracht $\vec{Q}$ in twee EVENWIJDIGE GELIJKGERICHTE KRACHTEN: Een van deze krachten grijpt aan in A en is gelijk en tegengesteld aan de gegeven kracht $\vec{P}$; de andere kracht is dan in grootte gelyk aan Q - P. Het aangrijpingspunt C van deze kracht moet nu OP DE HALFLIJN AB $\rightarrow \infty$ liggen, en wel zò, dat AB : BC = (Q - P) : P
De gegeven krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ hebben nu SAMEN dezelfde uitwerking als de krachten $\vec{P}$, $\vec{P_1}$ en $(\overrightarrow{Q-P})$.
Van deze drie heffen de krachten $\vec{P}$ en $\vec{P_1}$ elkaar op, zodat alleen de kracht $(\overrightarrow{Q-P})$ overblijft.
De gegeven krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ hebben SAMEN dus dezelfde uitwerking als de kracht $(\overrightarrow{Q-P})$ ALLEEN heeft.

CONCLUSIE. De kracht $(\overrightarrow{Q-P})$ die in C aangrijpt is de resultante van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

Punt 2) Berekening van $\vec{R}$, AC en BC.

$\vec{R}$:
- De grootte: R = Q - P.
- De richting: $\vec{R}$ loopt evenwijdig aan- en is gelijkgericht met de GROOTSTE van de gegeven krachten.

Het aangrijpingspunt C:

$$AB : BC = (Q - P) : P$$

$$(AB + BC) : (Q - P + P) = BC : P$$

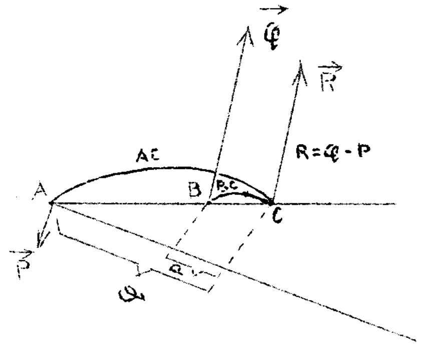
dus: $AC : Q = BC : P$

Dus:

$$\boxed{AC : BC = Q : P}$$

Conclusie: Het punt C ligt op HET VERLENGDE AAN DE KANT VAN DE GROOTSTE KRACHT van het lijnstuk AB, en verdeelt het lijnstuk AB UITWENDIG in stukken die OMGEKEERD EVENREDIG ZIJN met de aangrenzende krachten.

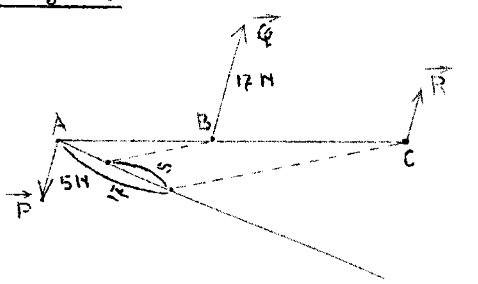
Eenvoudige constructie van het punt C.



$$\boxed{AC : BC = Q : P}$$

Getallenvoorbeeld:

Analyse.



Gegeven: $P = 5$ Newton.
$Q = 17$ Newton.
$AB = 0,24$ meter.

Gevraagd: $\vec{R}$; AC en BC.

Oplossing:

$\vec{R}$ {
Grootte: $R = 17 - 5 = \underline{12 \text{ Newton}}$.
Richting: evenwijdig aan en gelijk gericht met $\vec{Q}$.

Aangrijpingspunt:

$AC : BC = 17 : 5$

$(AC - BC) : (17 - 5) = BC : 5$

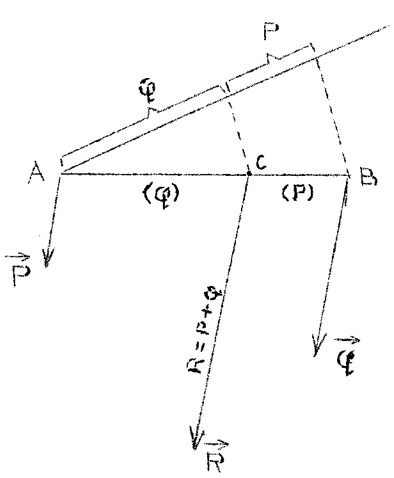
$0,24 : 12 = BC : 5$

$BC = 0,10$ meter

$AC = 0,24 + 0,10 = 0,34$ m.

EINDCONCLUSIE van de delen B III en B IV.

B III

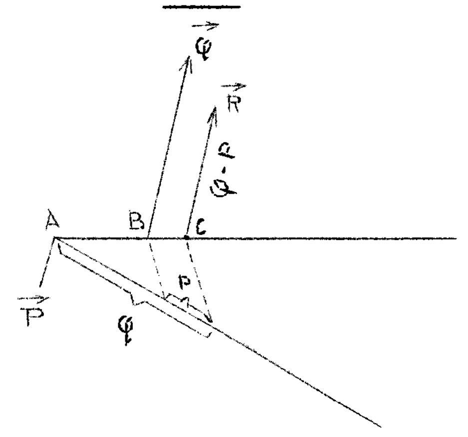


$\vec{R} \mathbin{/\!/} \vec{P} \mathbin{/\!/} \vec{Q}$; gelijk gericht

$R = P + Q$

$AC : BC = Q : P$

B IV



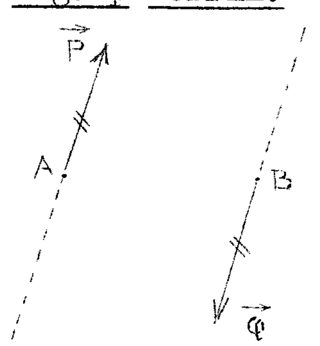
$\vec{R}$ // en gelijk gericht met de grootste kracht, dus $\vec{Q}$.

$R = Q - P$

$AC : BC = Q : P$

Deel B V TWEE GELIJKE, EVENWIJDIGE EN TEGENGESTELD GERICHTE KRACHTEN: KOPPELS.

Punt 1) Het begrip KOPPEL.



$\vec{P}$ en $\vec{Q}$ zijn twee op eenzelfde star lichaam werkende krachten, waarvan:

1°) DE GROOTTEN GELIJK ZIJN.

2°) DE WERKLIJNEN EVENWIJDIG LOPEN.

3°) DE RICHTINGEN LANGS DE RESP. WERKLIJNEN TEGENGESTELD ZIJN.

IN DIT GEVAL KUNNEN DE TWEE KRACHTEN
NIET
DOOR ÉÉN ENKELE KRACHT VERVANGEN WORDEN.

Dit tweetal krachten geeft aan het starre lichaam dan ook
GEEN VOORUITGAANDE BEWEGING (of TRANSLATIE)
zoals een enkelvoudige kracht doet, maar
EEN DRAAIENDE BEWEGING (of ROTATIE) OM
HET ZWAARTEPUNT VAN HET LICHAAM.
Dit wordt bewezen in de hogere mechanica.

Benaming. Zo'n samenstel van TWEE GELIJKE EVENWIJDIGE EN TEGENGESTELD GERICHTE KRACHTEN noemt men
EEN KOPPEL.

Opmerking. Uit het feit, dat de krachten van een koppel niet door ÉÉN enkele kracht kunnen vervangen worden, volgt ook, dat het niet mogelijk is om een koppel door èèn enkele kracht in evenwicht te houden.

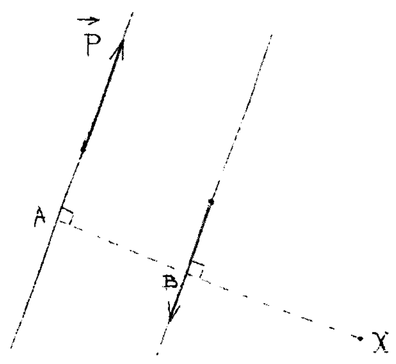
Punt 2) STELLING. De ALGEBRAISCHE SOM van de momenten van de krachten van een koppel heeft t.o.v. IEDER PUNT IN HET VLAK VAN HET KOPPEL dezelfde ALGEBRAISCHE WAARDE.

Het teken van deze algebraische waarde geeft de DRAAIRICHTING aan van de draaiing die het koppel aan het starre lichaam geeft.

Bewijs: zie blz. 148

Bewijs:

Geval I: draaiing (+)



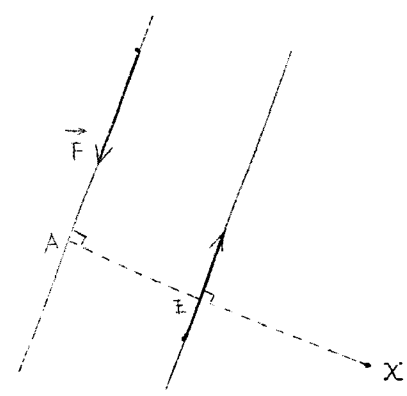
$M_{van\vec{P}t.o.v.X} = +P.AX$

$M_{van\vec{Q}t.o.v.X} = -Q.BX$

$$\begin{aligned} M_{\vec{P}} + M_{\vec{Q}} &= +P.AX - Q.BX \\ &= P(+AX - BX) \\ &= P(+AB) \\ &= +P.AB \end{aligned}$$

Deze uitkomst hangt NIET af van de ligging van punt X.
De positieve waarde van deze uitkomst komt overeen met de positieve draaiing die dit koppel aan het vlak wil geven.

Geval II: draaiing (−)



$M_{van\vec{P}t.o.v.X} = -P.AX$

$M_{van\vec{Q}t.o.v.X} = +Q.BX$

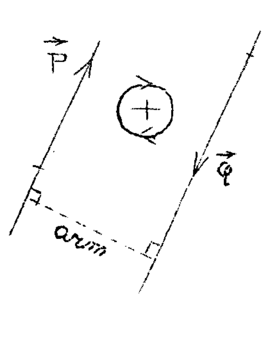
$$\begin{aligned} M_{\vec{P}} + M_{\vec{Q}} &= -P.AX + Q.BX \\ &= P(-AX + BX) \\ &= P(-AB) \\ &= -P.AB \end{aligned}$$

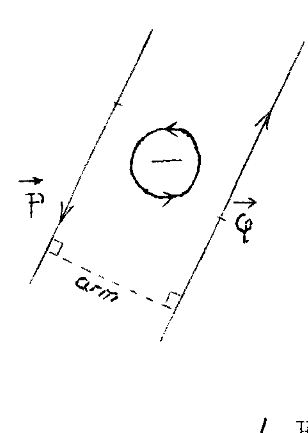
Deze uitkomst hangt NIET af van de ligging van punt X.
De negatieve waarde van deze uitkomst komt overeen met de negatieve draaiing die dit koppel aan het vlak wil geven.

Conclusie: De algebraïsche som der momenten van de krachten van een koppel heeft t.o.v. ieder punt in het vlak van het koppel dezelfde algebraïsche waarde.
Het teken van deze algebraïsche waarde geeft de DRAAI RICHTING van het koppel aan.

Nadere beschouwing. In beide gevallen is de absolute waarde van de uitkomst van $M_{\vec{P}t.o.v.X} + M_{\vec{Q}t.o.v.X}$ gelijk aan het product van de grootte van èèn der krachten van het koppel en de loodrechte afstand tussen de werklijnen van de krachten van het koppel.
Deze loodrechte afstanden tussen de werklijnen noemt men de ARM van het koppel.

Conclusie.





$M_{\vec{P}t.o.v.X} + M_{\vec{Q}t.o.v.X} = +\begin{pmatrix}\text{EEN}\\ \text{KRACHT}\\ \text{v KOPPEL}\end{pmatrix}.\text{ARM}$

$M_{\vec{P}t.o.v.X} + M_{\vec{Q}t.o.v.X} = -\begin{pmatrix}\text{EEN}\\ \text{KRACHT}\\ \text{v KOPPEL}\end{pmatrix}.\text{ARM}$

De algebraïsche som van de momenten van de krachten van een koppel t.o.v. een (willekeurig) punt van het vlak van het koppel noemt men kortweg HET MOMENT VAN HET KOPPEL.

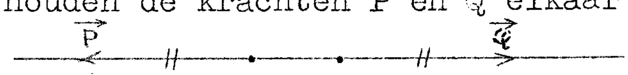
Definitie: Onder HET MOMENT VAN EEN KOPPEL verstaat men het product van EEN DER KRACHTEN van het koppel en de ARM van het koppel, met in acht-name van het TEKEN.
Is de rotatie + , dus MET de klok MEE, dan is het moment + ,
is de rotatie - , dus TEGEN de klok IN, dan is het moment - .

Opmerkingen. a) De dimensie van het moment van een koppel = Newton x meter.

b) Het moment van een koppel is NUL als:

òf de krachten nul zijn, òf de arm nul is.

In het eerste geval zijn er dus geen krachten, in het tweede geval houden de krachten $\vec{P}$ en $\vec{Q}$ elkaar in evenwicht.



Punt 3) We vermelden nog twee stellingen (zonder deze te bewijzen)

I) TWEE in eenzelfde plat vlak werkende koppels met GELIJKE MAAR TEGENGESTELDE MOMENTEN, heffen elkaar op.

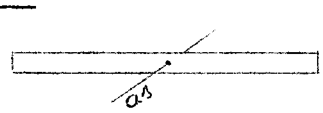
II) Werken in eenzelfde plat vlak meerdere koppels, dan kunnen deze vervangen worden door EEN ENKEL KOPPEL waarvan het moment gelijk is aan DE ALGEBRAISCHE SOM VAN DE MOMENTEN VAN DE GEGEVEN KOPPELS.

Opmerking. Deze stellingen worden uitvoerig bewezen in groep E.

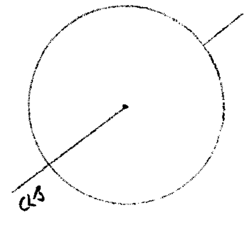
Deel B VI. DE HEFBOOMWET.

Punt 1) Definitie: Een hefboom is een star lichaam dat in een vast punt om een horizontale as kan draaien.

Voorbeelden:



Een staaf, in èèn punt om een horizontale as draaibaar.



Een schijf, in èèn punt om een horizontale as draaibaar, b.v. een KATROL.

Punt 2) Definitie. Een hefboom is in evenwicht, als ALLE op de hefboom werkende krachten elkaar in evenwicht houden.

Opmerking. Wij zullen steeds stilzwijgend veronderstellen dat ALLE op een hefboom werkende krachten IN EENZELFDE PLAT VLAK ⊥ de as liggen.

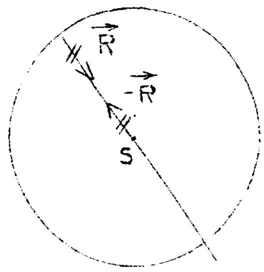
Punt 3) STELLING. Een hefboom is DAN EN SLECHTS DAN in evenwicht als alle VAN BUITENAF op de hefboom werkende krachten een resultante hebben WAARVAN DE WERKLIJN DOOR HET VASTE DRAAIPUNT VAN DE HEFBOOM GAAT.

Bewijs: DAN.

Gegeven: De VAN BUITEN AF op de hefboom werkende krachten (vergeet de zwaartekracht niet) hebben een resultante waarvan de werklijn door het vaste draaipunt gaat.

Te bewijzen: De hefboom is in evenwicht.

Bewijs:



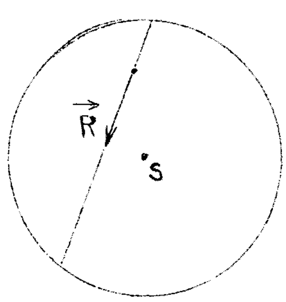
Stel, dat S het vaste draaipunt van de hefboom is en $\vec{R}$ de resultante van ALLE VAN BUITEN AF OP DE HEFBOOM WERKENDE KRACHTEN.
Zoals gegeven is, gaat de werklijn van $\vec{R}$ door het draaipunt S.
DE HEFBOOM OEFENT DUS OP DE HORIZONTALE AS DOOR S DE KRACHT $\vec{R}$ UIT.
Maar de as blijft, volgens het gegevene, in RUST.
DUS MOET DE KRACHT $\vec{R}$ DOOR EEN KRACHTWERKING VAN DE AS OP DE HEFBOOM IN EVENWICHT GEHOUDEN WORDEN.
De AS moet dus nu OP DE HEFBOOM de kracht $-\vec{R}$ uitoefenen.

De resultante van ALLE (uitwendige + inwendige) OP DE HEFBOOM WERKENDE KRACHTEN is dus NUL.

De hefboom is dus in evenwicht.

q.e.d.

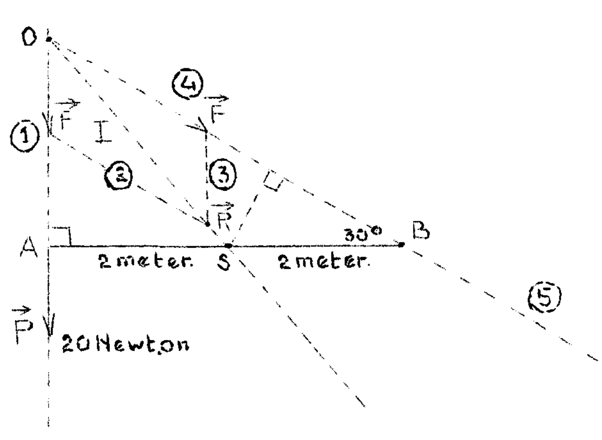
Bewijs: SLECHTS DAN.



Zou de werklijn van de resultante $\vec{R}$ van alle VAN BUITEN AF op de hefboom werkende krachten NIET DOOR S GAAN (zie nevenstaande figuur), dan is het ONMOGELIJK, dat de as deze kracht $\vec{R}$ in evenwicht houdt: de hefboom gaat dan draaien om de as.
VOOR EVENWICHT IS HET DUS NODIG, DAT DE WERKLIJN VAN DE RESULTANTE $\vec{R}$ DOOR HET VASTE DRAAIPUNT S GAAT.

CONCLUSIE: Een hefboom is DAN EN SLECHTS DAN in evenwicht als alle van buiten af op de hefboom werkende krachten een resultante hebben waarvan de werklijn door het vaste draaipunt van de hefboom gaat.

Punt 4) Opgave 40.



Gegeven: Een gewichtsloze staaf AB (lengte 4 meter) kan in het midden S draaien om een horizontale as.
In A werkt op de staaf een verticaal naar beneden gerichte kracht van 20 Newton.
In B werkt op de staaf een onbekende kracht $\vec{F}$ waarvan de werklijn in het verticale vlak door de staaf ligt en met de staaf een hoek van 30° maakt (zie fig.).
De hefboom is in horizontale stand in evenwicht.

Gevraagd: a) CONSTRUEER de kracht $\vec{F}$.

Constructie. Op de hefboom werken twee krachten, n.l. de kracht $\vec{P}$ en de te construeren kracht $\vec{F}$.
Omdat de hefboom in evenwicht is moet de werklijn van de resultante van $\vec{P}$ en $\vec{F}$ door het punt S gaan.

① We verplaatsen de kracht $\vec{P}$ langs haar werklijn tot O het aangrijpingspunt wordt.

②+③ We construeren het parallelogram waarvan:

$\underline{Q}$ een hoekpunt is,
$\vec{P}$ een zijde,
de diagonaal valt langs OS, en
de andere zijde valt langs OB.

④ De vector $\vec{F}$ stelt dan de gevraagde kracht voor.

⑤ Verplaats de vector $\vec{F}$ langs haar werklijn zò dat B het aangrijpingspunt wordt.

Gevraagd: b) Bereken de grootte van de kracht $\vec{F}$.

Oplossing: S is dus het middelpunt van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{F}$. Volgens de momentenstelling moet dus:

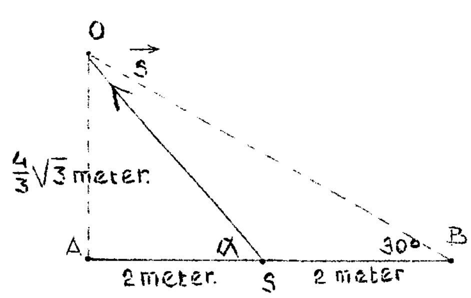
$$M_{\vec{P}\ t.o.v.S} + M_{\vec{F}\ t.o.v.S} = 0.$$

Dus: $-20 \cdot 2 + 1 \cdot F = 0.$

$\underline{F = 40 \text{ Newton.}}$

Gevraagd: c) Construeer en bereken de grootte en richting van de kracht die DE AS op de hefboom uitoefent.

Oplossing: De gevraagde kracht grijpt aan in S en is gelijk en tegengesteld aan de kracht $\vec{R}$.
Door in ΔI van bovenstaande figuur de cosinus-regel toe te passen op de zijde $\vec{R}$ vinden we:



$$R^2 = 400 + 1600 + 2.20.40.\tfrac{1}{2} = 2800$$

dus: $R = 20\sqrt{7}$ Newton

dus:

$\vec{S}$ Grootte: $S = 20\sqrt{7}$ Newton
Richting: tg. $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Punt 5) Aantekening bij de oplossing van vraag b.

We konden de kracht $\vec{F}$ berekenen door toepassing van de momentenstelling: S moet het middelpunt zijn van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{F}$, dus moet

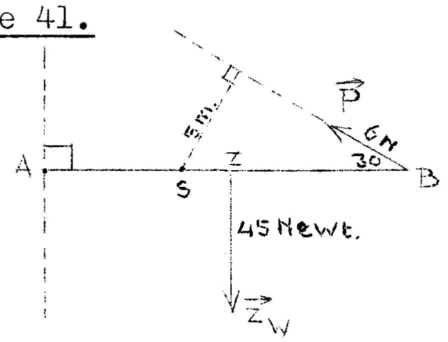
$$M_{\vec{P}\ t.o.v.S} + M_{\vec{F}\ t.o.v.S} = 0.$$

Vraag: Hoe moeten we de onbekende kracht berekenen als er VAN BUITENAF MEER DAN TWEE krachten op de hefboom werken en de hefboom in evenwicht is.

Antw.: Dan moet de werklijn van de resultante van de VAN BUITEN AF op de hefboom werkende krachten DOOR S GAAN. In groep E zal exact bewezen worden, dat deze werklijn DAN EN SLECHTS DAN door S gaat ALS DE ALGEBRAISCHE SOM VAN DE MOMENTEN VAN ALLE VAN BUITENAF OP DE HEFBOOM WERKENDE KRACHTEN t.o.v. HET DRAAIPUNT S GELIJK IS AAN NUL.

ALGEMENE CONCLUSIE. Een hefboom is DAN EN SLECHTS DAN in evenwicht als de ALGEBRAISCHE SOM VAN DE MOMENTEN VAN ALLE VAN BUITENAF OP DE HEFBOOM WERKENDE KRACHTEN t.o.v. HET VASTE DRAAIPUNT GELIJK IS AAN NUL.

Punt 6) Opgave 41.



Gegeven: De hefboom AB (gewicht 45 N.) kan om een horizontale as door S draaien.
Z is het zwaartepunt van de hefboom.
AS = 6 meter; ZS = 2 meter; BS = 10 meter.
In B werkt een kracht $\vec{P}$ van 6 Newton die een hoek van 30°

met de hefboom maakt.

Gevraagd: Welke verticale kracht $\vec{F}$ moet in A op de hefboom werken opdat deze in horizontale stand in evenwicht zal zijn.

Oplossing: Voor evenwicht moet:

$$M_{\vec{Z}_W \text{ t.o.v.S}} + M_{\vec{P} \text{ t.o.v.S}} + M_{\vec{F} \text{ t.o.v.S}} = 0$$

$$\text{dus} \quad + 45 \times 2 \quad - \quad 6 \times 5 \quad + M_{\vec{F} \text{ t.o.v.S}} = 0 \longrightarrow$$

$$M_{\vec{F} \text{ t.o.v.S}} = - 60 \text{ Newt.xmeter.}$$

De gevraagde kracht $\vec{F}$ moet dus t.o.v. S een moment hebben dat:

1°) negatief is $\rightarrow \vec{F}$ moet verticaal naar BENEDEN gericht zijn,

2°) - 60 Newton x meter groot is

Welnu: AS = 6 meter.

dus F = 10 Newton

Conclusie:

$\vec{F}$ in A:
- Grootte: F = 10 Newton
- Richting: verticaal naar beneden.

Deel B VII HET ZWAARTEPUNT van een lichaam.

Punt 1) Een lichaam bestaat uit moleculen. Elk molecuul ondervindt een zwaartekracht. De resultante van al deze zwaartekrachten is DE ZWAARTEKRACHT VAN HET LICHAAM. Het middelpunt van al deze moleculaire zwaartekrachten is HET ZWAARTEPUNT VAN HET LICHAAM.

Punt 2) Soorten van evenwicht.

Ieder lichaam is dus onderhevig aan de werking van de zwaartekracht die aangrijpt in het zwaartepunt van het lichaam.
Deze zwaartekracht kan door èèn enkele kracht in evenwicht gehouden worden. Aldus is het mogelijk een lichaam op enige afstand boven de grond door ÉÉN enkele kracht in evenwicht te houden b.v. door een lichaam in een punt verticaal onder het zwaartepunt te ondersteunen of in een punt verticaal boven het zwaartepunt vast te houden.

In de evenwichtstoestanden die kunnen ontstaan als men de zwaartekracht DOOR EEN ENKELE KRACHT IN EVENWICHT HOUDT onderscheidt men DRIE MOGELIJKHEDEN:

1°) STABIEL EVENWICHT.

2°) LABIEL EVENWICHT.

3°) INDIFFERENT EVENWICHT.

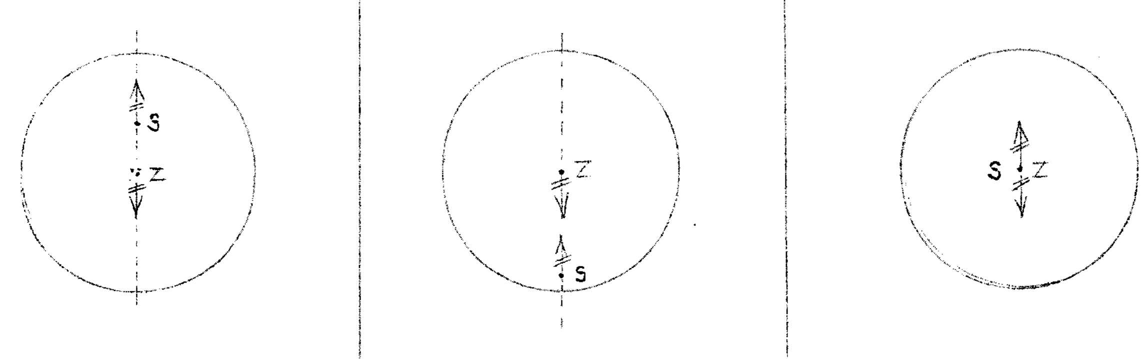
ad 1°) Een lichaam, IN ÉÉN PUNT ONDERSTEUND, verkeert in STABIEL EVENWICHT, als bij een kleine draaiing van het lichaam het zwaartepunt STIJGT.

ad 2°) Een lichaam, IN ÉÉN PUNT ONDERSTEUND, verkeert in LABIEL EVENWICHT, als bij een kleine draaiing van het lichaam het zwaartepunt DAALT.

ad 3°) Een lichaam, IN ÉÉN PUNT ONDERSTEUND, verkeert in INDIFFERENT EVENWICHT, als bij een kleine draaiing van het lichaam het zwaartepunt OP DEZELFDE HOOGTE BLIJFT.

Voorbeeld:

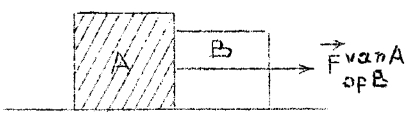
Voorbeeld: We beschouwen een homogene schijf die in een punt S draaibaar is om een horizontale as.



S verticaal BOVEN Z	S verticaal ONDER Z	S IN het zwaartep. Z
STABIEL EVENWICHT	LABIEL EVENWICHT	INDIFFERENT EVENWICHT.

§ 12. De DERDE WET VAN NEWTON: DE WET VAN ACTIE EN REACTIE.

Punt 1) Het probleem.



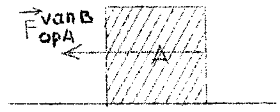
Nevenstaande figuur geeft een schematisch beeld van de situatie dat een lichaam A (b.v. een locomotief) een ander lichaam B (b.v. een wagon) voor zich uit duwt.

Het lichaam B ondervindt dan een naar rechts gerichte kracht van het lichaam A.

Deze kracht noemt men de ACTIE KRACHT VAN A OP B: $\vec{F}^{\,van\,A}_{op\,B}$.

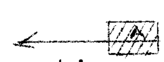
Vraag: Merkt A er iets van, dat A een actiekracht op B uitoefent?

Antw.: A voelt zich IN ZIJN BEWEGING TEGENGEWERKT DOOR B: van A uit bekeken, is het ALSOF OP A EEN KRACHT WERKT DIE AFKOMSTIG IS VAN B en NAAR LINKS gericht is: $\vec{F}^{\,van\,B}_{op\,A}$



Deze naar links gerichte kracht $\vec{F}^{\,van\,B}_{op\,A}$ noemt men de RE-ACTIE KRACHT VAN B OP A.

Conclusie: B voelt de ACTIE KRACHT VAN A  actie-kracht

A voelt de RE-ACTIE KRACHT VAN B  reactie kracht

Het probleem is nu: Bestaat er een verband tussen de actiekracht van A op B en de reactiekracht van B op A?

Punt 2) De hypothese van Newton.

Newton heeft de volgende hypothese uitgesproken:

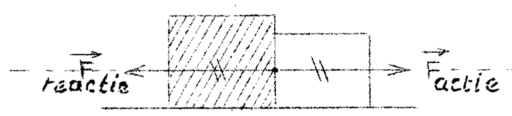
DE ACTIE- EN REACTIE KRACHT HEBBEN ALTIJD

1°) DEZELFDE WERKLIJN,

2°) DEZELFDE GROOTTE, maar

3°) ZIJN ALTIJD TEGENGESTELD GERICHT.

Dus:



dezelfde werklijn.

Notatie: $\boxed{\vec{F}_{actie} = -\vec{F}_{reactie}}$

Deze HYPOTHESE staat bekend als DE WET VAN ACTIE EN REACTIE.

CONCLUSIE: Oefent een lichaam A een kracht uit op lichaam B, dan oefent het lichaam B een REACTIEKRACHT uit op het lichaam A die, langs dezelfde lijn werkend, gelijk en tegengesteld is aan de ACTIE KRACHT VAN A OP B, zodat

$$\vec{F}_{actie} = - \vec{F}_{reactie}.$$

Punt 3) Reflexie: a) $\vec{F}_{actie} = - \vec{F}_{reactie}$.

Heffen deze actie- en reactiekrachten elkaar dan niet op?

Antwoord. Twee langs eenzelfde lijn werkende, gelijke en tegengesteld gerichte krachten heffen elkaar DAN EN SLECHTS DAN op indien deze krachten OP EENZELFDE LICHAAM werken.

Welnu: aan deze voorwaarde is hier NIET voldaan, want
$\vec{F}_{actie}$ werkt OP LICHAAM B, en
$\vec{F}_{reactie}$ " " " A
De actie en de reactie krachten heffen elkaar dus NIET op.

b) Op B werkt de actiekracht van A.

Bij de bepaling van de resultante van ALLE op B werkende krachten MOET MEN DEZE ACTIEKRACHT DUS MEEREKENEN.

Op A werkt de reactiekracht van B.

Bij de bepaling van de resultante van ALLE op A werkende krachten MOET MEN DEZE REACTIEKRACHT DUS MEEREKENEN.

NB c) ZOLANG A EN B MET ELKAAR IN CONTACT ZIJN, HEBBEN A EN B
DEZELFDE PLAATSFUNCTIE,
DUS DEZELFDE SNELHEID
EN DEZELFDE VERSNELLING.

Is R_A dan de resultante van ALLE op A werkende kr., en
R_B " " " " " " " " krachten
dan is:

$$R_A = m_A . a_A$$
$$R_B = m_B . a_B \qquad a_A = a_B = a_{samenstel}.$$

§ 13. Massapunten door een koord verbonden.

Punt 1) Een ideaal koord.

Bij de sommen waarin twee massapunten door een koord verbonden zijn, wordt van het koord altijd verondersteld, dat het:

1°) ONREKBAAR is. Een gespannen koord heeft dus altijd een constante lengte. De afstand tussen de door een gespannen koord verbonden massapunten blijft dus constant.

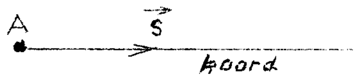
2°) VOLKOMEN BUIGBAAR IS

3°) GEWICHTSLOOS IS.

Zo'n koord bestaat in werkelijkheid natuurlijk niet; daarom noemen we dit een ideaal koord.

Punt 2) De spanning in een koord.

Punt 2) De spanning in een koord.



In nevenstaande figuur is het massapunt A aan een uiteinde van een koord bevestigd.

Is het koord "gespannen", dan oefent het koord EEN KRACHT UIT OP HET MASSAPUNT. DEZE KRACHT, aangeduid door $\vec{S}$, noemt men DE SPANKRACHT OF KORTWEG DE SPANNING IN HET KOORD.

Definitie: Onder DE SPANNING IN EEN KOORD verstaat men de kracht die het koord uitoefent op een aan dit koord bevestigd massapunt (lichaam).

Punt 3) Axioma.

We beschouwen nu het geval dat twee massapunten A en B door een GESPANNEN koord met elkaar verbonden zijn. Daar het koord GESPANNEN is, oefent het een spankracht $\vec{S}_A$ uit op het massapunt A en een spankracht $\vec{S}_B$ op het massapunt B.

BIJ WIJZE VAN AXIOMA NEMEN WE AAN DAT ALTIJD EN ONDER ALLE OMSTANDIGHEDEN DE SPANKRACHTEN $\vec{S}_A$ EN $\vec{S}_B$ DEZELFDE GROOTTE HEBBEN.

Dus:

$$\boxed{S_A = S_B}$$

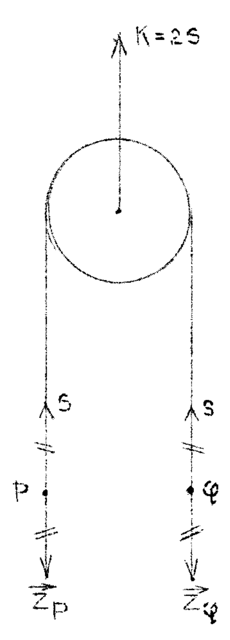
In eenzelfde koord zijn de spanningen aan beide uiteinden altijd gelijk.

Punt 4) Stelling. Twee massapunten door een koord verbonden, hebben (MITS het koord gespannen is en de massapunten in de lengterichting van het koord bewegen) dezelfde snelheid en dezelfde VERSNELLING.

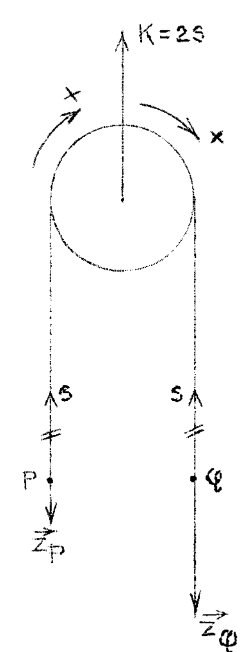
Bewijs: Omdat het koord ONREKBAAR is, is het verschil van de baancoördinaten van de uiteinden van het koord op ieder ogenblik constant gelijk aan de lengte van het koord.
De uiteinden van het koord hebben dus, op deze constante na, DEZELFDE PLAATSFUNCTIE, dus dezelfde snelheidsfunctie en dezelfde versnellingsfunctie.

Punt 5) Bijzondere gevallen.

I Katrol vraagstukken.



$m_P = m_Q$



$m_P < m_Q$

$$\left.\begin{array}{l} Z_P = m_P.g \text{ Newton} \\ Z_Q = m_Q.g \text{ Newton} \end{array}\right\} Z_P = Z_Q$$

Dan is:

$$S = Z_P = Z_Q$$

$$K = 2S$$

De massapunten zullen nu bewegen: P↑ en Q↓

$$Z_P < S < Z_Q$$

Daar het koord onrekbaar is, HEBBEN P EN Q BIJ DEZE BEWEGING DEZELFDE VERSNELLING: $a_{stelsel}$.

Rekenen we de richting waarin het koord beweegt zowel voor P als voor Q als de positieve (zie ↘ +) dan volgt:

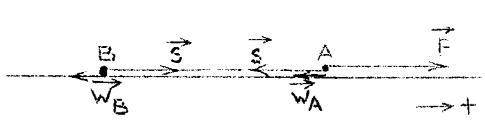
$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\text{VOOR Q:}} & + Z_Q - S = m_Q.a_{stelsel} \\ \underline{\text{VOOR P:}} & + S - Z_P = m_P.a_{stelsel} \end{array}\right\}$$

In deze vergelijkingen zijn S en $a_{stelsel}$ de onbekenden: We kunnen deze dus berekenen.

De plaatsfuncties.

VAN P	VAN Q
↑ $S_t^P = \frac{1}{2} a_{stels.} . t^2$ m.	↓ $S_t^Q = \frac{1}{2} a_{stels.} . t^2$ m.

II SLEEPVRAAGSTUKKEN (alleen HORIZONTALE TRANSLATIE)



In nevenstaande figuur zijn A en B twee door een koord verbonden massapunten. Op A werkt de kracht $\vec{F}$ (zie fig.)
Bij de beweging langs het horizontale vlak ondervindt A van het vlak de WRIJVINGSKRACHT W_A NEWTON, en B de WRIJVINGSKRACHT W_B NEWTON.
A en B hebben bij deze beweging weer DEZELFDE VERSNELLING: $a_{stels.}$

VOOR A geldt: $+ F - S - W_A = m_A.a_{stelsel}$

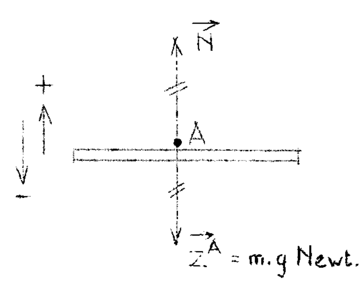
VOOR B $\quad + S - W_B = m_B.a_{stelsel}$

Uit deze vergelijkingen kunnen S en $a_{stelsel}$ berekend worden.

14. LIFT-VRAAGSTUKKEN.

We beschouwen nu de situaties waarin een massapunt op een horizontaal vlak ligt en het vlak beweegbaar is.

Geval I. Het vlak is in rust.



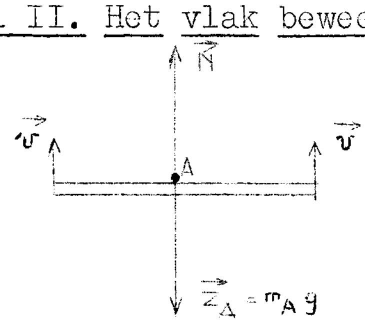
A is dus in rust: De resultante van ALLE OP A WERKENDE KRACHTEN MOET DUS NUL ZIJN.
Is $\vec{N}$ de NORMALE DRUK van het vlak op het massapunt A, dan moet dus:

$$+ N - m_A.g = 0$$

dus:

$$\boxed{N = m_A.g \text{ Newton.}}$$

Geval II. Het vlak beweegt EENPARIG naar boven.



A beweegt dus EENPARIG naar boven: de resultante van ALLE op A werkende krachten moet dus NUL zijn.
Dus $+ N - m_A.g = 0$

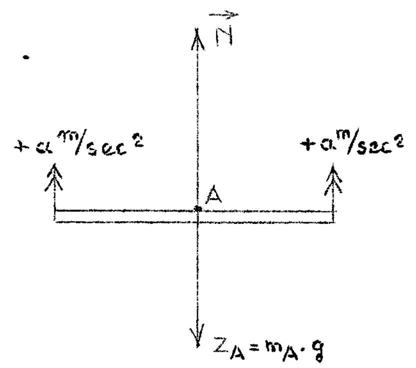
Dus $\boxed{N = m_A.g \text{ Newton.}}$

Geval III. Het vlak beweegt EENPARIG naar beneden.

A beweegt dus ook EENPARIG: $+ N - m_A.g = 0 \longrightarrow$

$$\boxed{N = m_A.g \text{ Newton.}}$$

Geval IV. Het vlak beweegt EENPARIG VERSNELD NAAR BOVEN; versnelling a $^m/sec^2$.



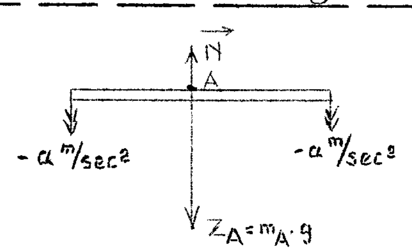
A beweegt nu dus ook EENPARIG VERSNELD naar boven met versnelling a $^m/sec^2$.
De resultante van ALLE op A werkende krachten moet nu dus een naar boven gerichte kracht zijn die zo'n grootte heeft dat A een versnelling heeft van a $^m/sec^2$.
Dus:

$$+ N - m_A.g = + m_A.a.$$

Uit deze vergelijking volgt de grootte van de normale druk N.

$$\boxed{N = m_A.g + m_A.a = m_A\ (g + a) \text{ Newton.}}$$

Geval V. Het vlak beweegt EENPARIG VERSNELD NAAR BENEDEN: versnelling = a $^m/sec^2$.



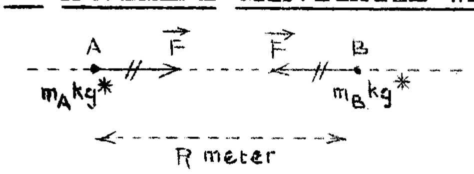
De resultante van ALLE op A werkende krachten moet A een naar beneden gerichte versnelling geven van a $^m/sec^2$
Dus:

$$+ N - m_A.g = - m_A.a$$

Dus:

$$\boxed{N = m_A.g - m_A.a = m_A\ (g - a) \text{ Newton.}}$$

§ 15. De ALGEMENE GRAVITATIE-WET VAN NEWTON.



In nevenstaande figuur stellen A en B twee massapunten voor, resp. met massa m_A kg* en m_B kg*.
De afstand tussen A en B bedraagt R m.

Newton stelde de volgende HYPOTHESE op:

NB. 1°) De massapunten A en B TREKKEN ELKAAR WEDERKERIG AAN.

2°) Deze krachten zijn gericht volgens de verbindingslijn der massapunten EN HEBBEN DEZELFDE GROOTTE.

NB. 3°) De grootte van deze wederkerige, gelijke aantrekkingskrachten wordt gegeven door de formule:

NB.

$$\boxed{F = C\ \frac{m_A \times m_B}{R^2} \text{ Newton.}}$$

In deze formule is C een UNIVERSELE CONSTANTE; de z.g. GRAVITATIE CONSTANTE.

Deze gravitatie constante is pas in 1798 (Newton stelde deze hypothese op in 1686) voor het eerst bepaald door de Engelse natuurkundige CAVENDISH

$$\boxed{C = 6{,}664.10^{-11}}$$

dus: $$\boxed{F = 6{,}664.10^{-11}\ \frac{m_A \times m_B}{R^2}\ \text{Newton.}}$$

§ 16. De ZWAARTE KRACHT van een lichaam op verschillende plaatsen ter aarde.

De zwaartekracht is de kracht die de valversnelling veroorzaakt. De ervaring leert, dat de valversnelling op de polen groter is dan op de evenaar.

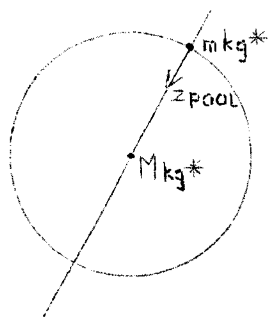
Stelling. Dat de zwaartekracht van een lichaam op de polen groter is dan op de evenaar, heeft TWEE OORZAKEN:

1^o oorzaak: De aarde draait om een as,

2^o oorzaak: De aarde is aan de polen afgeplat.

Bewijs ad 1. We nemen aan dat de aarde een bol is.

A) Berekening van de zwaartekracht van m kg* op de polen.



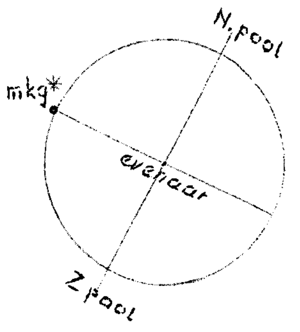
Is de massa van de aarde M kg*, dan is de gravitatiekracht die op een aardpool werkt op m kg*:

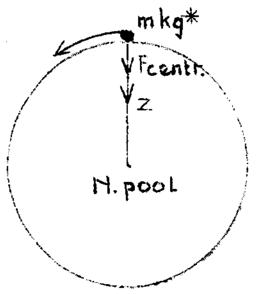
① $$Z_{pool} = C\,\frac{M.m}{R^2} = \left(C\,\frac{M}{R^2}\right).m \text{ Newton}$$

De factor $(C.\frac{M}{R^2})$ is dus gelijk aan g_{POOL}.

Hieruit volgt tevens, dat de valversnelling op de pool voor alle lichamen dezelfde waarde heeft.

B) Berekening van de zwaartekracht van m kg* op de evenaar.





De gravitatiekracht van Newton is op de evenaar eveneens:

$$F_{Newton} = C.\frac{M.m}{R^2} \quad \text{Newton.}$$

Dit is ook de enige kracht die op dit massapunt werkt. Daar de aarde eenparig om haar as draait, voert ieder massapunt op de evenaar een eenparige cirkelvormige beweging uit met lineaire snelheid:

$$v = \frac{2\pi R}{T}\ {}^{m}/\text{sec.} \qquad T = 86400 \text{ sec.}$$

Om het massapunt op deze cirkelbaan te houden is een centripetale kracht nodig van:

$$F_{centr.} = \frac{m.v^2}{R} \text{ Newton.}$$

Deze kracht moet geleverd worden door F_{Newton}:

Was $F_{Newton} < F_{centr}$, dan vloog het massapunt van de aarde af;
Was $F_{Newton} = F_{centr}$, dan zou F_{Newton} het massapunt de cirkel eenparig doen doorlopen, maar er zou geen kracht meer overschieten om het massapunt een valversnelling te geven.
Het massapunt zou dan op de evenaar GEEN GEWICHT HEBBEN.

In werkelijkheid is $F_{Newton} > F_{centr.}$; De gravitatiekracht F_{Newton} dwingt het massapunt dus om de dagelijkse cirkelbaan te doorlopen EN ER SCHIET NOG EEN KRACHT OVER OM DE VALVERSNELLING TE VEROORZAKEN.

Deze overschietende kracht is de zwaartekracht $Z_{evenaar}$
Dus:

$$Z_{evenaar} = F_{Newton} - F_{centr.}$$

$$= C\frac{M.m}{R^2} - \frac{mv^2}{R} \text{ Newton}$$

Dus:

$$\boxed{Z_{evenaar} = (C\frac{M}{R^2} - \frac{v^2}{R}) \times m \text{ Newton}} \qquad ②$$

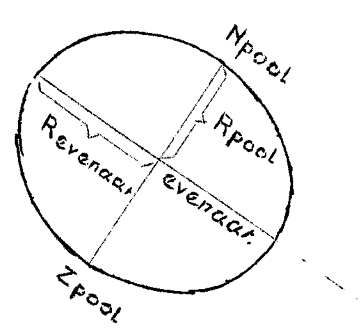
De factor $(C\frac{M}{R^2} - \frac{v^2}{R})$ is gelijk aan $g_{evenaar}$.

Hieruit volgt, dat alle lichamen op de evenaar dezelfde valversnelling MOETEN hebben.

Conclusie uit A en B.

$$\left.\begin{aligned} Z_{pool} &= (C\frac{M}{R^2}) \text{ m Newton} \\ Z_{evenaar} &= (C\frac{M}{R^2} - \frac{v^2}{R}).\text{m Newton} \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} Z_{pool} &> Z_{evenaar} \\ g_{pool} &> g_{evenaar} \end{aligned}}$$

Bewijs ad: 2° oorzaak.



$$R_{pool} < R_{evenaar}$$

De lichamen op de polen liggen dichter bij het zwaartepunt van de aarde dan de lichamen op de evenaar.
Dus:

$$F_{\substack{Newton\\pool}} > F_{\substack{Newton\\evenaar.}}$$

Henric van Veldeke College
Maastricht.

Hoofdstuk V. ARBEID EN ARBEIDSVERMOGEN.

§ 1. DE ARBEID DOOR EEN KRACHT DIE CONSTANT BLIJFT IN GROOTTE EN RICHTING.

Punt 1) Opmerking vooraf.

Als men in de natuurkunde zegt DAT EEN KRACHT ARBEID VERRICHT bedoelt men daar iets heel anders mee dan wanneer men zegt DAT EEN KRACHT WERKT. Een kracht is de oorzaak van een versnelling. EEN KRACHT WERKT als deze bezig is te doen wat er gedaan moet worden om een massapunt een versnelling te geven: EEN KRACHT WERKT ALS DEZE "DOENDE IS" EEN MASSAPUNT EEN VERSNELLING TE GEVEN. Het is daarbij echter zeer wel mogelijk, dat deze kracht door een andere kracht IN EVENWICHT GEHOUDEN WORDT. In dat geval WERKEN er twee krachten, echter zò, dat de RESULTERENDE versnelling NUL is.

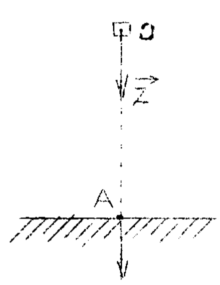
In het komende zullen we zien dat het best mogelijk is dat een kracht WERKT ZONDER DAT DIE KRACHT ARBEID VERRICHT, en dat het eveneens mogelijk is dat een kracht, terwijl ze door een andere kracht in evenwicht gehouden wordt, toch arbeid verricht.

CONCLUSIE: In de natuurkunde heeft de term "ARBEID VERRICHTEN" een andere betekenis dan de term "WERKEN".

Punt 2) Wanneer zegt men DAT EEN KRACHT ARBEID VERRICHT?

Eerst enkele voorbeelden.

Voorbeeld I. Een massapunt wordt op enige hoogte boven de grond losgelaten.



Wordt een massapunt in O (zie fig.) losgelaten, dan valt het vrij volgens de plaatsfunctie: $Y_t = -\frac{1}{2}|g_{T.P.}|\,t^2$ meter.

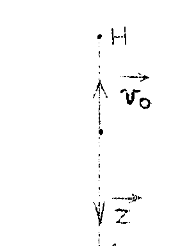
Na enige tijd bereikt het massapunt de grond.

We vragen: WAT DOET DE KRACHT $\vec{Z}$ BIJ DEZE VAL T.O.V. HAAR WERKRICHTING?

Antwoord: Tijdens deze val VERPLAATST DE KRACHT $\vec{Z}$ HAAR AANGRIJPINGSPUNT OVER HET LIJNSTUK OA IN HAAR WERKRICHTING.

Het gaat ons nu om het feit, DAT DE KRACHT $\vec{Z}$ HAAR AANGRIJPINGSPUNT VERPLAATST IN HAAR WERKRICHTING: ALS EEN KRACHT HAAR AANGRIJPINGSPUNT VERPLAATST IN HAAR WERKRICHTING ZEGT MEN, DAT DE KRACHT ARBEID VERRICHT. HET ARBEID VERRICHTEN bestaat dus IN HET VERPLAATSEN VAN HET AANGRIJPINGSPUNT IN DE WERKRICHTING VAN DE KRACHT.

Voorbeeld II. Een kogel wordt verticaal omhoog geschoten.



Stel, dat een kogel vanuit het punt O (zie fig.) verticaal omhoog geschoten wordt. De plaatsfunctie is dan:

$$Y_t = +|v_0|t - \tfrac{1}{2}|g_{T.P.}|\,t^2 \text{ meter.}$$

De kogel gaat dus eenparig vertraagd omhoog, bereikt het hoogste punt H, gaat dan eenparig versneld naar beneden en bereikt na enige tijd de grond.

We vragen: VERRICHT DE KRACHT $\vec{Z}$ ARBEID BIJ DEZE BEWEGING?

Antwoord.

⟶ Bij de beweging van O ⟶ H VERPLAATST DE KRACHT $\vec{Z}$ HAAR AANGRIJPINGSPUNT IN EEN RICHTING DIE TEGENGESTELD IS AAN HAAR WERKRICHTING.

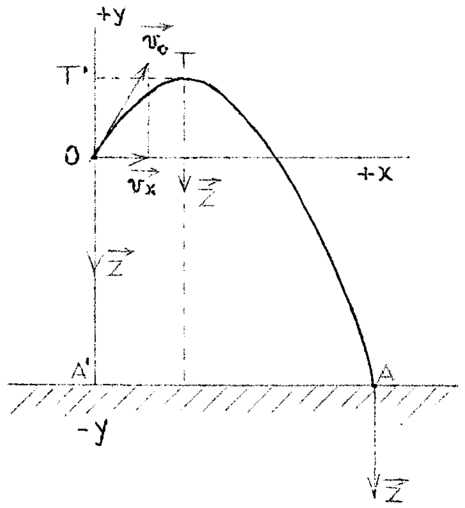
(Men moet de zegswijze, dat de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in verplaatst, goed verstaan. Hiermee wil n.l. NIET gezegd zijn, dat de zwaartekracht ZELF deze verplaatsing bewerkt: De kogel heeft in O een naar boven gerichte beginsnelheid en gaat dientengevolge omhoog. De zwaartekracht blijft daarbij op de kogel werken en "volgt de kogel". Bij dit volgen "verplaatst zij haar aangrijpingspunt dus" tegen haar werkrichting in.)

Men zegt nu DAT DE KRACHT $\vec{Z}$ BIJ DEZE VERPLAATSING VAN HAAR AANGRIJPINGSPUNT TEGEN HAAR WERKRICHTING IN NEGATIEVE ARBEID VERRICHT. Het praedicaat "NEGATIEVE" geeft dus aan, dat de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN verplaatst.

→ Bij de beweging van H → A verplaatst de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt IN HAAR WERKRICHTING. De kracht $\vec{Z}$ VERRICHT bij deze beweging dus ARBEID: Om aan te geven dat de richting van deze verplaatsing SAMENVALT met DE RICHTING VAN DE KRACHTVECTOR $\vec{Z}$, noemt men DEZE ARBEID POSITIEF.

ALGEMEEN: Verplaatst een kracht haar aangrijpingspunt IN HAAR WERKRICHTING, dan verricht de kracht POSITIEVE ARBEID.
Verplaatst een kracht haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN, dan verricht de kracht NEGATIEVE ARBEID.

Voorbeeld III. Een kogel wordt onder een elevatiehoek α ($\neq 90^\circ$) opgeschoten.



De baan van de kogel is dus een parabool die in O raakt aan vector $\vec{v}_0$ en waarvan de symmetrie-as evenwijdig loopt aan- en gelijk gericht is met de kracht $\vec{Z}$.
De baan die door de kogel en dus ook door het aangrijpingspunt van de kracht $\vec{Z}$ beschreven wordt, valt nu dus niet langs de werklijn van de kracht $\vec{Z}$.
Het is duidelijk dat de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt verplaatst bij deze beweging.

We vragen: HOEVEEL EN IN WELKE ZIN VERPLAATST DE KRACHT $\vec{Z}$ HAAR AANGRIJPINGSPUNT BIJ DEZE BEWEGING IN HAAR WERKRICHTING?

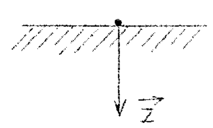
Antwoord: De werkrichting van de kracht $\vec{Z}$ blijft tijdens de gehele beweging verticaal naar beneden: De werklijn van de zwaartekracht blijft dus verticaal, maar beweegt eenparig met snelheid $\vec{v}_x$ in de + x-richting.
Om uit te maken HOEVEEL en IN WELKE ZIN de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt bij deze beweging verplaatst in haar werkrichting, doen we de volgende proef: We leggen een latje langs de Y-as en plaatsen op het latje merktekens bij O en A'. Met de linkerhand verschuiven we het latje in de + X-richting zò, dat het latje evenwijdig blijft aan de Y-as en het merkteken O op de X-as blijft. Ondertussen bewegen we met de rechterhand een potloodpunt langs het latje zò, dat de punt op de parabool blijft.
We zien dan:

1°) Bij de beweging van O ⟶ T verplaatst de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt over een stuk dat gelijk is aan OT' TEGEN HAAR WERKRICHTING IN: Bij deze beweging verricht de kracht $\vec{Z}$ dus EEN NEGATIEVE ARBEID die gelijkwaardig is met de arbeid die de kracht $\vec{Z}$ ZOU VERRICHT HEBBEN als de kogel verticaal van O naar T' gegaan was.

2°) Bij de beweging van T ⟶ A verplaatst de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt over een stuk dat gelijk is aan T'A' IN HAAR WERKRICHTING: Bij deze beweging verricht de kracht $\vec{Z}$ dus EEN POSITIEVE ARBEID die gelijkwaardig is met de arbeid die de kracht $\vec{Z}$ ZOU VERRICHT HEBBEN als de kogel verticaal van T' naar A' gegaan was.

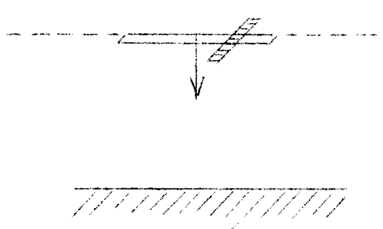
> ALGEMEEN: Bij de vraag of een kracht arbeid verricht gaat het NIET om de baan die het aangrijpingspunt van de kracht beschrijft in het bewegingsvlak, MAAR OM DE VERPLAATSING DIE HET AANGRIJPINGSPUNT ONDERGAAT I N D E R I C H T I N G DIE DOOR DE WERKLIJN VAN DE KRACHT WORDT AANGEWEZEN.

Voorbeeld IV. Een massapunt rust op een tafel.



In dit geval WERKT de kracht $\vec{Z}$ wel, MAAR HET AANGRIJPINGSPUNT BLIJFT IN RUST: De kracht $\vec{Z}$ VERRICHT DUS GEEN ARBEID.
Het is dus mogelijk dat een kracht WERKT ZONDER ARBEID TE VERRICHTEN.

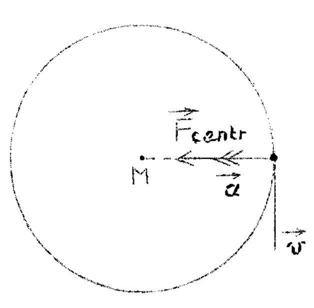
Voorbeeld V. Een vliegtuig beweegt op constante hoogte boven de grond.



In dit geval WERKT de kracht $\vec{Z}$ wel, maar VERPLAATST HAAR AANGRIJPINGSPUNT NIET IN DE RICHTING DIE DOOR HAAR WERKLIJN WORDT AANGEWEZEN.
Bij deze beweging VERRICHT de kracht $\vec{Z}$ dus GEEN ARBEID.

> ALGEMEEN: Om arbeid te verrichten is het nodig, dat de kracht haar aangrijpingspunt VERPLAATST IN DE RICHTING DIE DOOR HAAR WERKLIJN WORDT AANGEWEZEN.

Voorbeeld VI. Een massapunt voert een eenparige cirkelvormige beweging uit.



In dit geval werkt er op het massapunt een centripetale kracht $\vec{F}_{centr.}$ die voortdurend naar het middelpunt M van de cirkel gericht is en in grootte gelijk is aan:

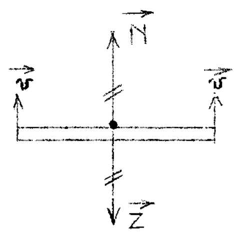
$$F_{centr.} = \frac{mv^2}{R} \text{ Newton.}$$

(De kracht $\vec{F}_{centr.}$ is dus wel constant van grootte, maar niet constant van richting t.o.v. vlak).

Bij deze eenparige cirkelbeweging verplaatst de kracht $\vec{F}_{centr.}$ haar aangrijpingspunt NIET IN DE RICHTING DIE DOOR HAAR MOMENTELE WERKLIJN WORDT AANGEWEZEN: Bij deze beweging verricht de centripetale kracht dus GEEN arbeid.

> ALGEMEEN: EEN LOODRECHT OP DE BAAN VAN EEN MASSAPUNT STAANDE KRACHT VERRICHT NOOIT ARBEID.

Voorbeeld VII. Een massapunt ligt op een vlak (lift) dat eenparig omhoog gaat.



Het massapunt beweegt EENPARIG omhoog. Bij deze beweging wordt de kracht $\vec{Z}$ dus in evenwicht gehouden door de kracht $\vec{N}$.
BIJ DEZE BEWEGING VERPLAATST DE KRACHT $\vec{Z}$ HAAR AANGRIJPINGSPUNT TEGEN HAAR WERKRICHTING IN:
BIJ DEZE BEWEGING VERRICHT DE KRACHT $\vec{Z}$ DUS N E G A T I E V E ARBEID.
(DE KRACHT $\vec{N}$ POSITIEVE ARBEID).

> ALGEMEEN: Bij de vraag of een kracht arbeid verricht gaat het er ALLEEN maar om OF de kracht HAAR AANGRIJPINGSPUNT VERPLAATST IN DE RICHTING DIE DOOR DE WERKLIJN WORDT AANGEWEZEN.

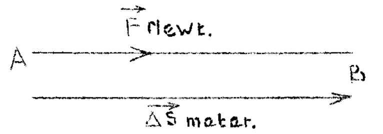
> CONCLUSIE UIT DE VOORBEELDEN.
>
> MEN ZEGT DAT EEN KRACHT ARBEID VERRICHT ALS DE KRACHT HAAR AANGRIJPINGSPUNT VERPLAATST IN DE RICHTING DIE DOOR HAAR WERKLIJN WORDT AANGEWEZEN.
>
> DE ARBEID IS + , als de richting van deze verplaatsing SAMENVALT MET de richting van de krachtvector.
>
> DE ARBEID IS – , als de richting van deze verplaatsing TEGENGESTELD is aan de richting van de krachtvector.

Punt 3) DE HOE-VEEL-HEID ARBEID die verricht wordt door een kracht die constant blijft in grootte en richting.

In punt 2) hebben we vastgesteld wanneer we zullen zeggen DAT een kracht ARBEID VERRICHT, n.l. als de kracht haar aangrijpingspunt verplaatst in een RICHTING die samenvalt met- of tegengesteld is aan de RICHTING waarin de kracht werkt.
We gaan nu spreken over de HOE-VEEL-HEID ARBEID die bij een arbeidsverrichting door een kracht wordt verricht.

Het begrip HOE-VEEL-HEID ARBEID is voor ons GEHEEL NIEUW. Er is ons zelfs geen enkel natuurkundig feit bekend waaruit we zouden kunnen afleiden wat men onder "HOEVEELHEID ARBEID" zou MOETEN VERSTAAN. We zullen het begrip HOEVEELHEID ARBEID gaan ontwikkelen aan de hand van de verschillende gevallen waarin een kracht arbeid verricht.

Geval I. Een kracht $\vec{F}$ verplaatst haar aangrijpingspunt LANGS HAAR WERKLIJN in een richting die samenvalt met haar werkrichting.



Nevenstaande figuur stelt de situatie voor waarin een kracht $\vec{F}$ haar aangrijpingspunt langs haar werklijn van A naar B verplaatst.
Bij deze verplaatsing verricht de kracht $\vec{F}$ dus POSITIEVE ARBEID.

Men zegt nu, dat de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt ook EEN POSITIEVE HOEVEELHEID

ARBEID verricht.
PER DEFINITIE stelt men deze POSITIEVE HOEVEELHEID ARBEID gelijk aan de waarde van het PRODUCT:

$$+ F \times \Delta S \text{ NEWTON x METER.}$$

Notatie. Een HOEVEELHEID ARBEID wordt aangeduid door de hoofdletter W.

DEFINITIE. DE HOEVEELHEID ARBEID die DOOR een kracht van F Newton verricht wordt als deze haar aangrijpingspunt over een stuk ΔS meter LANGS HAAR WERKLIJN en IN HAAR WERKRICHTING verplaatst, is gelijk aan:

$$\boxed{W_{\text{door } \vec{F}} = + F . \Delta S \text{ Newton x Meter}}$$

Opmerkingen.

a) Met nadruk stellen we vast, dat in deze definitie slechts drie dingen een rol spelen:

1°) het teken,

2°) het aantal Newton van de kracht,

3°) het aantal meter van de verplaatsing.

Al het andere wat men zich er nog bij kan denken (of er nog meerdere krachten werkzaam zijn; of de kracht er kort of lang over doet om haar aangrijpingspunt deze verplaatsing te geven; volgens welke plaatsfunctie het aangrijpingspunt beweegt; enz., enz.) DOET MET BETREKKING TOT DE HOE-VEEL-HEID ARBEID die bij deze verplaatsing door $\vec{F}$ wordt verricht NIETS TER ZAKE.

b) In het onderhavige geval dat de kracht haar aangrijpingspunt verplaatst LANGS HAAR WERKLIJN is ΔS tevens gelijk aan het stuk waarover de kracht haar aangrijpingspunt verplaatst IN HAAR WERKRICHTING. Deze formule zegt dus eigenlijk, dat

$$W_{\text{door } \vec{F}} = + F . \left\{ \begin{array}{l} \text{het lijnstuk waarover} \\ \text{de kracht haar aangrij-} \\ \text{pingspunt verplaatst IN} \\ \text{HAAR WERKRICHTING} \end{array} \right\} \text{Newton x meter}$$

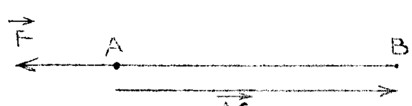
c) De DIMENSIE van een HOEVEELHEID ARBEID is dus:

$$\boxed{\text{NEWTON x METER.}}$$

d) Op dit ogenblik is deze definitie voor ons SLECHTS een definitie: Het zal ons pas later blijken dat HET ZIN HEEFT om bovenstaand product te definiëren als DE HOEVEELHEID ARBEID die de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing verricht.

Historisch is het natuurlijk omgekeerd gegaan: de ervaring leerde dat energieproblemen opgelost konden worden als de hoeveelheid arbeid aldus gedefinieerd werd.

Geval II. Een kracht verplaatst haar aangrijpingspunt LANGS HAAR WERKLIJN in een richting die TEGENGESTELD is aan haar werkrichting.



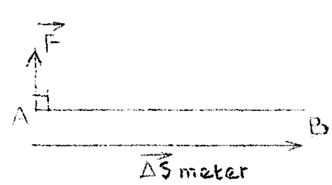
Nevenstaande figuur geeft de situatie waarin een massapunt door een of andere oorzaak van A naar B gaat. De op dit massapunt werkende kracht $\vec{F}$ verplaatst daarbij haar aangrijpingspunt langs haar werklijn in een richting die tegengesteld is aan haar werkrichting.

Gevraagd: De hoeveelheid arbeid die bij deze beweging DOOR de kracht $\vec{F}$ wordt verricht.

Oplossing: Bij deze beweging verricht de kracht $\vec{F}$ dus NEGATIEVE ARBEID.
PER DEFINITIE stelt men de HOEVEELHEID ARBEID die door de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing wordt verricht gelijk aan:

$$\boxed{W_{\text{door } \vec{F}} = - F.\,\Delta S \text{ Newton x Meter.}}$$

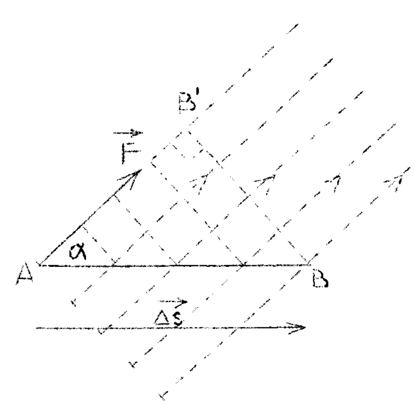
Geval III. De kracht staat op ieder ogenblik loodrecht op de baan van het massapunt.



Het massapunt beweegt van A naar B. De kracht $\vec{F}$ staat op ieder ogenblik loodrecht op de baan: Bij deze beweging verricht de kracht $\vec{F}$ dus GEEN ARBEID.

Dus:
$$W_{\text{door } \vec{F}} = 0.$$

Geval IV. De baan van het massapunt is recht; de kracht $\vec{F}$ maakt een SCHERPE HOEK met de verplaatsingsvector $\vec{\Delta S}$.



Het massapunt beweegt over het rechte lijnstuk AB van A naar B.
Tijdens deze beweging werkt op het massapunt o.a. de kracht $\vec{F}$ die constant blijft in grootte en richting en met $\vec{\Delta S}$ een SCHERPE HOEK α maakt.

Bij deze beweging verricht de kracht $\vec{F}$ POSITIEVE ARBEID.

Gevraagd: De HOEVEELHEID ARBEID die door de kracht $\vec{F}$ verricht wordt bij deze beweging.

Oplossing: Of een kracht arbeid verricht hangt alleen af van de vraag of de kracht haar aangrijpingspunt verplaatst in de richting die door de werklijn van de kracht wordt aangewezen.
Dan kan de HOEVEELHEID ARBEID, behalve van de grootte van de kracht, ook alleen maar afhangen van de GROOTTE VAN DE VERPLAATSING DIE HET AANGRIJPINGSPUNT VAN DE KRACHT ONDERGAAT IN DE RICHTING DIE DOOR DE WERKLIJN VAN DE KRACHT WORDT AANGEWEZEN, dus van de grootte van het lijnstuk AB'.
De HOEVEELHEID ARBEID die de kracht $\vec{F}$ verricht bij de verplaatsing van A naar B is dus PER DEFINITIE gelijk aan de HOEVEELHEID ARBEID DIE DE KRACHT F ZOU VERRICHTEN ALS DEZE HAAR AANGRIJPINGSPUNT LANGS HAAR WERKLIJN VAN A NAAR B' VERPLAATSTE.

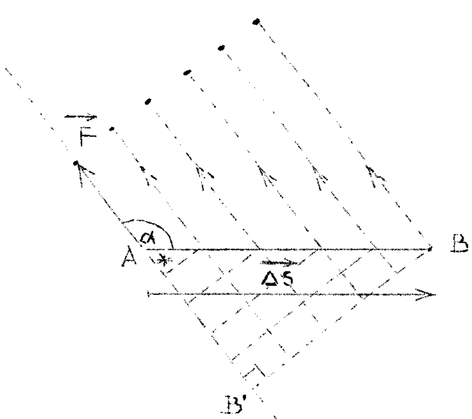
Let men op de verplaatsing van het aangrijpingspunt LANGS DE MEEBEWEGENDE WERKLIJN VAN DE KRACHT, dan ziet men, dat de kracht $\vec{F}$ IN FEITE haar aangrijpingspunt over het stuk AB' LANGS HAAR WERKLIJN IN HAAR WERKRICHTING verplaatst.
Dus:

$$\underset{\text{bij bew.van } A \to B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \underset{\text{bij bew.van } A \to B'}{W_{\text{door } \vec{F}}} = + F.AB' \text{ NEWTON x METER.}$$

Dus:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.van} \\ A \rightarrow B}} = + F.AB' \text{ NEWTON x METER.}$$

Geval V. De baan van het massapunt is recht; de kracht $\vec{F}$ maakt een stompe hoek met de verplaatsingsvector $\vec{\Delta S}$.



Het massapunt beweegt over het rechte lijnstuk AB van A naar B. Tijdens deze beweging werkt op het massapunt o.a. de kracht $\vec{F}$ die constant blijft in grootte en richting en met de verplaatsingsvector $\vec{\Delta S}$ een STOMPE HOEK α maakt.

Vraag: Verplaatst de kracht $\vec{F}$ bij deze beweging haar aangrijpingspunt t.o.v. de richting die door haar werklijn wordt aangewezen?

Antwoord: Terwijl het massapunt langs het rechte lijnstuk AB van A naar B gaat verplaatst de kracht $\vec{F}$ haar aangrijpingspunt inderdaad T.O.V. DE RICHTING die door haar werklijn wordt aangewezen, n.l. over het stuk AB' in de richting tegengesteld aan de werkrichting van de kracht.
Bij de beweging van A naar B verricht de kracht $\vec{F}$ dus NEGATIEVE ARBEID.

Gevraagd: DE HOEVEELHEID ARBEID door de kracht $\vec{F}$ verricht bij deze verplaatsing.

Antwoord: DE HOEVEELHEID ARBEID die de kracht $\vec{F}$ verricht als met massapunt over het rechte lijnstuk AB van A naar B gaat, IS PER DEFINITIE gelijk aan DE HOEVEELHEID ARBEID die door de kracht $\vec{F}$ ZOU VERRICHT WORDEN ALS DEZE HAAR AANGRIJPINGSPUNT LANGS HAAR WERKLIJN TEGEN HAAR WERKRICHTING N VERPLAATSTE VAN A NAAR B'. (Let men op de MEE BEWEGENDE werklijn, dan ziet men, dat de kracht $\vec{F}$ dit ook IN FEITE DOET).

Dus:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.van} \\ A \rightarrow B}} = W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.van} \\ A \rightarrow B'}} = - F.AB' \text{ Newt. x meter.}$$

Dus:

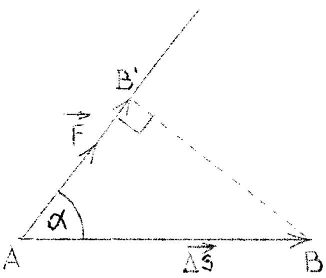
$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.van} \\ A \rightarrow B}} = - F.AB' \text{ NEWTON x METER}$$

Nadere beschouwing van de gevallen IV en V.

Geval IV. Geval V.

Nadere beschouwing van de gevallen IV en V.

Geval IV.



$W_{door\ \vec{F}} = + F.AB'$ Newt.x Meter.

Meetkundig stelt AB' de projectie van het lijnstuk $\vec{AB}$ op de werklijn van de kracht $\vec{F}$ voor.

Goniometrisch kunnen we zeggen, dat

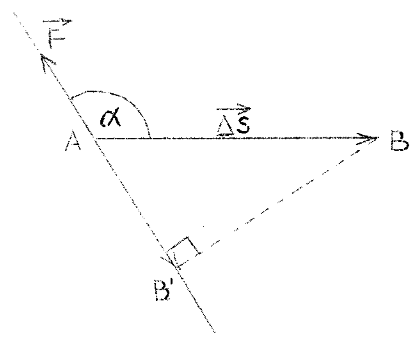
$$+ AB' = AB.\cos\alpha$$

Het + teken wordt dan verrekend in de goniometrische waarde van cos. α: de cosinus van een scherpe hoek is immers POSITIEF.

Dus:

$W_{door\ \vec{F}}$ bij bew.van $A \rightarrow B$ $= F.AB \cos\alpha$ N. x M.

Geval V.



$W_{door\ \vec{F}} = - F.AB'$ Newt.x Meter.

Meetkundig stelt AB' de projectie van het lijnstuk $\vec{AB}$ op de werklijn van de kracht $\vec{F}$ voor.

Goniometrisch kunnen we zeggen, dat

$$- AB' = AB \cos\alpha$$

Het - teken wordt dan verrekend in de goniometrische waarde van cos. α: de cosinus van een stompe hoek is immers NEGATIEF.

Dus:

$W_{door\ \vec{F}}$ bij bew.van $A \rightarrow B$ F.AB $\cos\alpha$ N. x M.

In beide gevallen vinden we dus DEZELFDE FORMULE VOOR $W_{door\ \vec{F}}$.
Daar $AB = \Delta S$ kunnen we deze formule schrijven als:

$$\boxed{W_{door\ \vec{F}\ \text{bij de verpl.}\ \vec{\Delta S}} = F.\ \Delta S \cos\alpha \text{ NEWTON x METER}} \qquad (1)$$

Benaming. ΔS cos. α noemen we DE GONIOMETRISCHE PROJECTIE VAN DE VERPLAATSINGSVECTOR $\vec{\Delta S}$ OP DE WERKRICHTING VAN DE KRACHT.

Het praedicaat 'GONIOMETRISCHE' geeft aan dat men aan deze projectie het teken moet toekennen dat cos. α goniometrisch heeft.

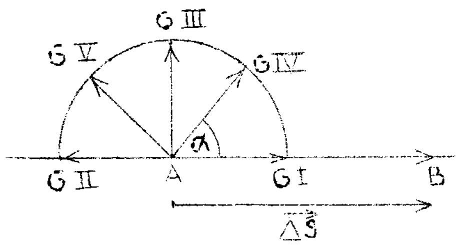
> Formule (1) luidt dus IN WOORDEN:
>
> DE HOEVEELHEID ARBEID DIE VERRICHT WORDT DOOR EEN KRACHT DIE CONSTANT BLIJFT IN GROOTTE EN RICHTING IS GELIJK AAN HET PRODUCT VAN DE KRACHT EN DE GONIOMETRISCHE PROJECTIE VAN DE VERPLAATSINGS VECTOR VAN HET AANGRIJPINGSPUNT OP DE WERKRICHTING VAN DE KRACHT.

Reflexie op formule (1)

Reflexie op formule ①.

$W_{door\ \vec{F}} = F.\Delta S \cos.\alpha$ NEWTON x METER.

Deze formule overkoepelt de gevallen I, II, III, IV en V.



Immers:

$\alpha = 0 \longrightarrow W_{door\ \vec{F}} = - F.S \longrightarrow$ Geval I

$\alpha = 180^0 \longrightarrow W_{door\ \vec{F}} = - F.S \longrightarrow$ Geval II

$\alpha = 90^0 \longrightarrow W_{door\ \vec{F}} = 0 \longrightarrow$ Geval III

$0 < \alpha < 90^0 \longrightarrow$ Geval IV

$90^0 < \alpha < 180^0 \longrightarrow$ Geval V

CONCLUSIE.

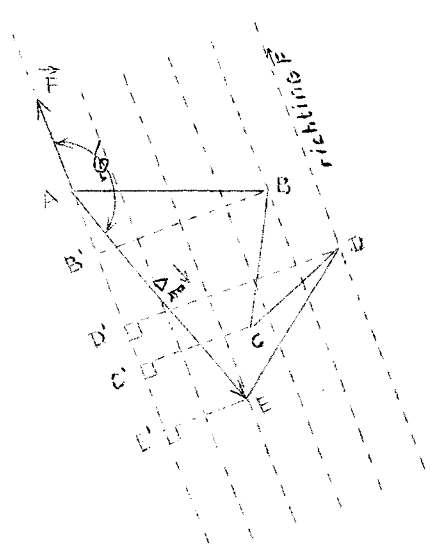
Blijft een kracht $\vec{F}$ constant van grootte en richting, dan verricht deze kracht bij de verplaatsing $\vec{\Delta S}$ van haar aangrijpingspunt de hoeveelheid arbeid:

$W_{door\ \vec{F}} = F.\Delta S \cos.\alpha$ NEWT. x METER.

Opmerking. $W_{door\ \vec{F}}$ is een SCALAIRE grootheid; $\vec{F}$ en $\vec{\Delta S}$ zijn VECTOREN.
In de hogere natuurkunde noemt men
$F.\Delta S \cos.\alpha$
het SCALAIRE PRODUCT van de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{\Delta S}$.

In de hogere natuurkunde wordt de arbeid door een kracht die constant blijft in grootte en richting GEDEFINIEERD als het SCALAIRE PRODUCT van de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{\Delta S}$.

Geval VI. Een kracht (constant in grootte en richting) verplaatst haar aangrijpingspunt langs een GEBROKEN LIJN.



De kracht $\vec{F}$ die constant blijft in grootte en richting verplaatst haar aangrijpingspunt van A → B → C → D → E.

Gevraagd: De hoeveelheid arbeid die de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt IN TOTAAL verricht.

Oplossing:

Bij de bew. van A → B is $W_{door\ \vec{F}} = - F.AB'$ Newt. x meter
" " " " B → C " $W_{door\ \vec{F}} = - F.B'C'$ " "
" " " " C → D " $W_{door\ \vec{F}} = + F.C'D'$ " "
" " " " D → E " $W_{door\ \vec{F}} = - F.D'E'$ " "

$W_{TOTAAL\ door\ \vec{F}} = - F(AB' + B'C' - C'D' + D'E')$ NEWT. x METER

Maar $AB' + B'C' - C'D' + D'E' = AE'$

Dus:

$W_{TOTAAL\ door\ \vec{F}} = - F.AE' = F(-AE') = F.\Delta k.\cos\varphi$ NEWT.xMETER

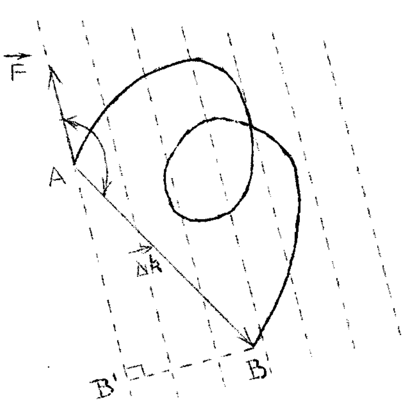
Conclusie:

$$W_{\text{door } \vec{F}} = F.\Delta k \cos.\varphi \text{ NEWT. x METER.}$$

In woorden:

De hoeveelheid arbeid door de kracht $\vec{F}$ verricht is gelijk aan het product van de kracht en DE GONIOMETRISCHE PROJECTIE van DE RESULTERENDE VERPLAATSINGSVECTOR op de werkrichting van de kracht $\vec{F}$.

Geval VII. Een kracht (constant van grootte en richting) verplaatst haar aangrijpingspunt LANGS EEN KROMME BAAN.



Gegeven: De kracht $\vec{F}$ (constant van grootte en richting) verplaatst haar aangrijpingspunt langs de kromme lijn van A naar B.

Gevraagd: $W_{\text{door } \vec{F}}$ totaal.

Oplossing: We verdelen de kromme baan in infinitesimaal kleine stukjes, die zo klein zijn, dat ieder stukje ALS RECHT kan beschouwd worden, en passen de redenering van geval VI toe.

Conclusie:

$$\underset{\text{totaal}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F.\,\Delta k \cos \varphi \text{ Newt. x Meter}$$

EINDCONCLUSIE van punt 3).

NB De hoeveelheid arbeid die verricht wordt als een kracht die constant blijft in grootte en richting haar aangrijpingspunt verplaatst, is gelijk aan HET PRODUCT VAN DE KRACHT EN DE GONIOMETRISCHE PROJECTIE VAN DE RESULTERENDE VERPLAATSINGS-

NB VECTOR OP DE WERKRICHTING VAN DE KRACHT.

In formule:

$$\underset{\text{bij verplaatsing } \vec{\Delta k}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F.\,\Delta k \cos \varphi \text{ NEWTON x METER.}$$

Punt 4) De EENHEID VAN HOEVEELHEID ARBEID.

Definitie. De eenheid van hoeveelheid arbeid is de arbeid die verricht wordt als een kracht van EEN NEWTON haar aangrijpingspunt EEN METER in haar werkrichting verplaatst.

Benaming. Deze eenheid heet EEN JOULE (spreek uit DZJOEL)
(James Prescott JOULE; 1818-1889; zie warmte-leer)

Dus:

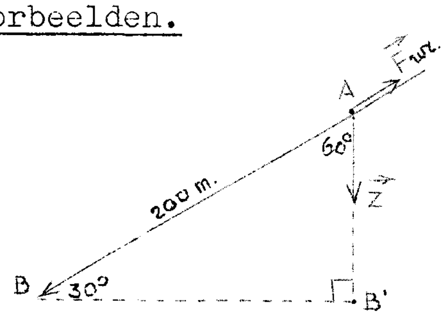
1 NEWTON x METER = 1 JOULE

De algemene formule voor de hoeveelheid arbeid, verricht door een kracht die constant blijft in grootte en richting, luidt dus:

$$\boxed{W_{\text{door } \vec{F}} = F \cdot \Delta k \cos . \varphi \text{ JOULE}}$$

Punt 5) Voorbeelden.

I)



Gegeven: Een massapunt van 5 kg* glijdt langs een hellend vlak (hellingshoek 30°) naar beneden over een stuk AB dat 200 meter lang is.
Bij deze beweging ondervindt het massapunt van het vlak een wrijvingsweerstand $\vec{F}_{wr}$ van 1 $kgf_{T.P.}$.
$g_{T.P.} = 10\ ^m/sec^2$.

Gevraagd: a) De hoeveelheid arbeid die de zwaartekracht $\vec{Z}$ bij deze beweging verricht.

Oplossing: $Z = m\ g_{T.P.} = 5.10 = 50$ NEWTON.
Bij de beweging van het massapunt blijft de kracht $\vec{Z}$ constant in grootte en richting.
Dus:

$$W_{\text{door } \vec{Z}} = Z \times \begin{Bmatrix} \text{de goniometrische proj.} \\ \text{v.d. verplaatsingsvect.} \\ \vec{AB} \text{ op de richting van } \vec{Z}. \end{Bmatrix} \text{Joule}$$

De goniometrische projectie van de verplaatsingsvector $\vec{AB}$ op de werkrichting van $\vec{Z}$ =
200 cos. 60° = + 100 meter.
Dus:

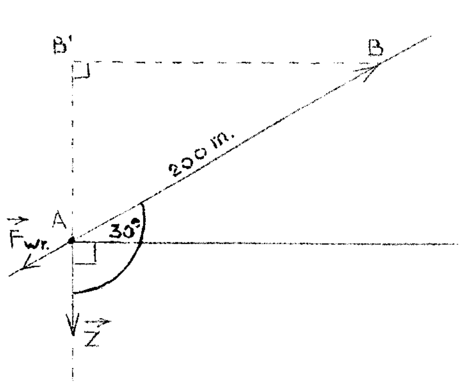
$$W_{\text{door } \vec{Z}} = + 50 \times 100 = \underline{\underline{+ 5000 \text{ Joule.}}}$$

Gevraagd: b) De hoeveelheid arbeid die de wrijvingskracht $\vec{F}_{wr.}$ bij deze beweging verricht.

Oplossing: $\vec{F}_{wr.} = 1\ kgf_{T.P.} = 10$ NEWTON.
De wrijvingskracht verplaatst haar aangrijpingspunt 200 meter tegen haar werkrichting in.
Dus:

$$W_{\text{door } \vec{F}_{wr.}} = - 10 \times 200 = \underline{\underline{- 2000 \text{ Joule.}}}$$

II)



Gegeven: Een massapunt van 5 kg* beweegt over een lijnstuk AB (200 meter) langs een hellend vlak (hellingshoek 30°) naar boven.
Bij deze beweging ondervindt het massapunt een wrijvingsweerstand $\vec{F}_{wr.}$ van 1 $kgf_{T.P.}$. $g_{T.P.} = 10\ ^m/s^2$

Gevraagd: a) $W_{\text{door } \vec{Z}}$

Oplossing: $Z = 5.10 = 50$ Newton.

De goniometrische projectie van de verplaatsingsvector $\vec{AB}$ op de werkrichting van $\vec{Z}$ is nu:

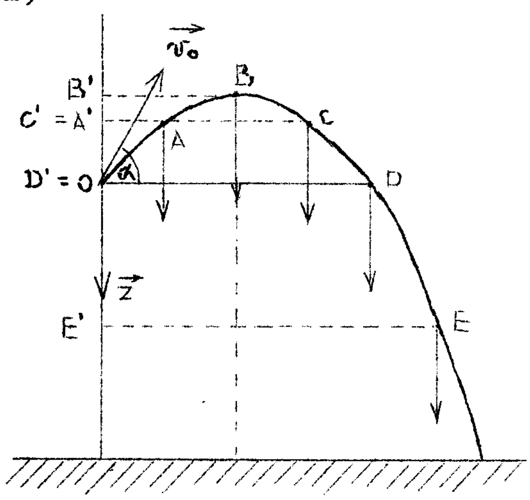
$$- |AB| = 200 \times \cos. 120° = - 100 \text{ meter.}$$

Dus: $W_{\text{door } \vec{Z}} = - 50 \times 100 = \underline{\underline{- 5000 \text{ Joule.}}}$

<u>Gevraagd:</u> b) $W_{\text{door } \vec{F}_{wr.}}$

<u>Oplossing:</u> $F_{wr.} = 10$ NEWTON.
De wrijvingskracht verplaatst haar aangrijpingspunt 200 meter <u>tegen haar werkrichting in.</u>
Dus:
$$W_{\text{door } \vec{F}_{wr.}} = -\ 10\ .\ 200 = \underline{\underline{-\ 2000 \text{ Joule.}}}$$

III)



<u>Gegeven:</u> Een kogel, gewicht ˉ kgf$_{T.P.}$ wordt vanuit een punt O op enige hoogte boven de grond onder een elevatiehoek α opgeschoten met een beginsnelheid $\vec{v}_o$ m/sec.

<u>Gevraagd:</u> De hoeveelheid arbeid door de kracht $\vec{Z}$ verricht bij de bewegingen van: (zie fig.)

O ⟶ A; O ⟶ B; O ⟶ C; O ⟶ D en O ⟶ E.

<u>Oplossing:</u> $Z = 8.g_{T.P.}$ Newton. Immers 1 kgf$_{T.P.}$ = $g_{T.P.}$ NEWTON.
<u>Bij de beweging van O ⟶ A</u> verplaatst de kracht $\vec{Z}$ haar aangrijpingspunt <u>tegen haar werkrichting in</u> over het stuk OA'
Dus: $W_{\text{door } \vec{Z}} = -\ 8.g_{T.P.}.|OA'|$ Joule.
bij O→A

<u>Bij de beweging van O ⟶ B is:</u>

$W_{\text{door } \vec{Z}} = -\ 8.g_{T.P.}.|OB'|$ Joule
bij O→B

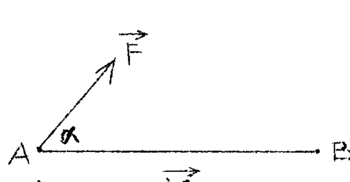
<u>Bij de beweging van O ⟶ C</u> is $\vec{OC}$ de verplaatsingsvector.
De goniometrische projectie van de verplaatsingsvector op de werkrichting van $\vec{Z} = -|OC'|$m.
Dus: $W_{\text{door } \vec{Z}} = -\ 8.g_{T.P.}.|OC'|$ Joule.
bij O→C

<u>Bij de beweging van O ⟶ D</u> is de verplaatsingsvector $\vec{OD}$.
De goniometrische projectie van $\vec{OD}$ op de werkrichting van $\vec{Z} = 0$.
Dus: $W_{\text{door } \vec{Z}} = 0$ Joule.
bij O→D

<u>Bij de beweging van O ⟶ E</u> is $\vec{OE}$ de verplaatsingsvector.
De goniometrische projectie van $\vec{OE}$ op de werkrichting van $\vec{Z} = +\ |OE'|$ meter.
Dus: $W_{\text{door } \vec{Z}} = +\ 8.g_{T.P.}.|OE'|$ Joule.
bij O→E

<u>Opmerking.</u> Met nadruk wijzen we er op, dat in bovenstaande voorbeelden werd verondersteld, dat de arbeid-verrichtende kracht <u>constant is in grootte en richting.</u>

Punt 6) <u>Andere lezing van de arbeidsformule: W = F. ΔS. cos. α Joule.</u>



We beschouwen nogmaals het geval, dat een kracht $\vec{F}$ (constant in grootte en richting) haar aangrijpingspunt verplaatst over een RECHT lijnstuk AB, terwijl de werkrichting van de kracht een ∠ α (scherp, recht of stomp) maakt met

de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AB}$ (= $\overrightarrow{\Delta S}$).
Zoals we hebben afgeleid, verricht de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing de hoeveelheid arbeid:

$$W_{door\ \vec{F}} = F.\Delta S\ \cos.\alpha\ \text{Joule} \qquad (1)$$

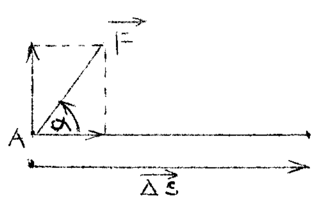
Hierin is ΔS cos. α de goniometrische projectie van de verplaatsingsvector $\overrightarrow{\Delta S}$ op de werkrichting van de kracht $\vec{F}$.
De waarde van het rechter lid van vergelijking (1) blijft onveranderd als we dit schrijven als:

$$W_{door\ \vec{F}} = (F\ \cos.\ \alpha).\ \Delta S\ \text{Joule} \qquad (2)$$

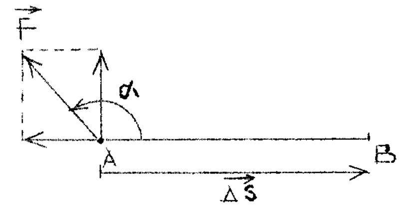
→ <u>Wat stelt F cos. α voor?</u>

<u>Antwoord:</u>

<u>α scherp.</u>



<u>α stomp.</u>



<u>In beide gevallen stelt F cos. α de goniometrische projectie voor van de krachtvector $\vec{F}$ op de richting van de verplaatsingsvector $\overrightarrow{\Delta S}$, m.a.w. de goniometrische waarde van de TANGENTIELE COMPONENT VAN DE KRACHT $\vec{F}$.</u>

→ <u>Wat zegt formule (2) dus eigenlijk?</u>

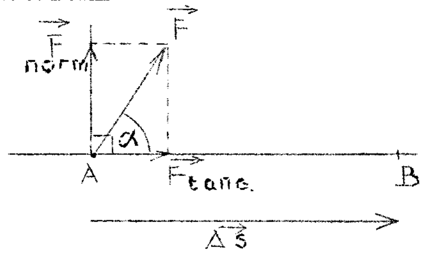
<u>Antwoord:</u> Deze formule zegt, DAT DE HOEVEELHEID ARBEID DOOR DE KRACHT $\vec{F}$ VERRICHT BIJ DE VERPLAATSING $\overrightarrow{\Delta S}$ GELIJK IS AAN DE HOEVEELHEID ARBEID DIE HAAR TANGENTIELE COMPONENT BIJ DEZE VERPLAATSING VERRICHT.

Dus:

$$\boxed{W_{door\ \vec{F}} = W_{door\ \vec{F}_{tang.}}}$$

→ <u>Hoe kunnen we direct inzien, dat $W_{door\ \vec{F}}$ gelijk MOET zijn aan $W_{door\ \vec{F}_{tang.}}$</u>

<u>Antwoord:</u>



Op blz. 126 zijn we tot de conclusie gekomen DAT MEN EEN KRACHT MAG ONTBINDEN IN COMPONENTEN: DE WERKING VAN DE KRACHT $\vec{F}$ ALLEEN IS IN ALLE OPZICHTEN GELIJK AAN DE WERKING VAN DE KRACHTEN $\vec{F}_{norm.}$ en $\vec{F}_{tang.}$ S A M E N.

De hoeveelheid arbeid door de kracht $\vec{F}$ ALLEEN verricht, moet dus ook gelijk zijn aan de hoeveelheid arbeid die de componenten $\vec{F}_{norm.}$ en $\vec{F}_{tang.}$ SAMEN verrichten.

<u>Welnu:</u>
De normale component $\vec{F}_{norm.}$ verricht bij deze verplaatsing $\overrightarrow{\Delta S}$ GEEN ARBEID.
Dus moet de hoeveelheid arbeid door de kracht $\vec{F}$ ALLEEN verricht, gelijk zijn aan de hoeveelheid arbeid die door HAAR TANGENTIELE COMPONENT $\vec{F}_{tang.}$ ALLEEN verricht wordt.

Dus:

$$\boxed{W_{door\ \vec{F}} = W_{door\ \vec{F}_{tang.}}}$$

<u>CONCLUSIE:</u>

CONCLUSIE:

Men kan de arbeidsformule $W_{\text{door } \vec{F}} = F.\Delta S \cos.\alpha$ Joule, welke geldig is voor een kracht die constant blijft in grootte en richting, OP TWEE MANIEREN LEZEN:

1° LEZING.

$$W_{\text{door } \vec{F}} = F(\Delta S \cos.\alpha) \text{ J.}$$

In woorden:

De hoeveelheid arbeid door een kracht $\vec{F}$ (constant in grootte en richting) verricht, is gelijk aan het product van de kracht en de goniometrische projectie van de verplaatsingsvector $\vec{\Delta S}$ op de werkrichting van de kracht.

2° LEZING.

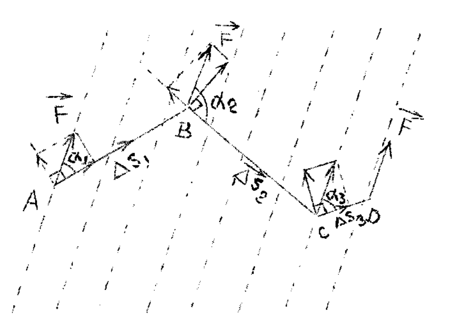
$$W_{\text{door } \vec{F}} = (F.\cos\alpha).\Delta S \text{ J.}$$

In woorden:

De hoeveelheid arbeid door een kracht $\vec{F}$ (constant in grootte en richting) verricht bij de verplaatsing langs een RECHT lijnstuk ΔS is gelijk aan de hoeveelheid arbeid die haar tangentiële component bij deze verplaatsing verricht.

Punt 7) De berekening van de hoeveelheid arbeid volgens de 2° lezing als de kracht $\vec{F}$ (constant van grootte en richting) haar aangrijpingspunt verplaatst over een baanstuk DAT NIET RECHT IS.

Geval I. Het baanstuk is een GEBROKEN LIJN.



Nevenstaande figuur stelt de situatie voor waarin een kracht F, die constant blijft in grootte en richting, haar aangrijpingspunt verplaatst over de gebroken lijn ABCD.

Gevraagd: $W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van $A \to B \to C \to D$ volgens de 2° lezing.

Oplossing:

$$\underset{A \to B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F \cos. \alpha_1 .AB \text{ Joule}$$

$$\underset{B \to C}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F \cos. \alpha_2 .BC \text{ Joule}$$

$$\underset{C \to D}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F \cos. \alpha_3 .CD \text{ Joule}$$

+

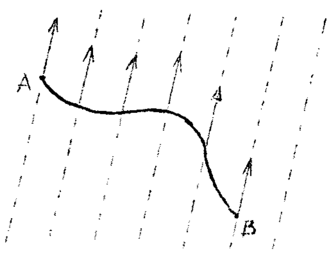
$$\underset{A \to B \to C \to D}{W_{\text{door } \vec{F}}} = (F \cos.\alpha_1)AB + (F \cos.\alpha_2)BC + (F \cos.\alpha_3)CD \text{ J.}$$

Dus: $$\boxed{\underset{\text{totaal}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = F_1^{\text{tang}}.\Delta S_1 + F_2^{\text{tang}}.\Delta S_2 + F_3^{\text{tang}}.\Delta S_3 \text{ Joule.}}$$

We vinden de totale hoeveelheid door $\vec{F}$ verrichte arbeid dus door voor ieder recht onderdeel van de baan de hoeveelheid verrichte arbeid afzonderlijk te berekenen en deze hoeveelheden daarna algebraïsch op te tellen.

Geval II.

Geval II. Het baanstuk is GEKROMD.



Theoretische bepaling van $W_{door\ \vec{F}}$.

1°) Verdeel de baan in infinitesimaal kleine stukjes die zo klein zijn, dat ieder stukje als recht beschouwd kan worden.

2°) Bepaal voor ieder stukje $F_{tang} \cdot \Delta S$.

3°) Bepaal de algebraische som van al deze arbeidsporties.

Opmerking. a) Als de kracht $\vec{F}$ constant is in grootte en richting is de bepaling van $W_{door\ \vec{F}}$ volgens "de 2° lezing" veel ingewikkelder dan de bepaling volgens "de 1° lezing". Volgens beide werkmethoden komt men natuurlijk tot dezelfde uitkomst.

Blijft de kracht $\vec{F}$ echter NIET constant in grootte en/of richting, dan kan $W_{door\ \vec{F}}$ meestal alleen volgens "de 2° lezing" berekend worden. In § 3 zullen we aan de hand van voorbeelden zien, dat deze arbeids bepaling niet zo ingewikkeld is als ze zich nu laat aanzien.

b) Tot nu toe hebben we steeds gesproken van DE HOEVEELHEID ARBEID die door een kracht verricht wordt. In de praktijk spreekt men kortweg van DE ARBEID door een kracht verricht. We zullen dit in het komende ook doen.

§ 2. De berekening van de arbeid die verricht wordt door een kracht die NIET CONSTANT BLIJFT in grootte en/of richting.

Nevenstaande figuur stelt het geval voor waarin een kracht DIE NIET CONSTANT IS IN GROOTTE EN RICHTING haar aangrijpingspunt langs een kromme baan verplaatst.

Gevraagd: De (hoeveelheid) arbeid die bij deze verplaatsing van het aangrijpingspunt door de kracht wordt verricht.

Theoretische oplossing: 1°) Verdeel de baan in infinitesimaal kleine delen die zo klein zijn dat ieder deel als recht- en de kracht $\vec{F}$ voor ieder deel als constant in grootte en richting kan beschouwd worden en nummer deze baanstukjes: $\Delta_1 S$; $\Delta_2 S$, $\Delta_3 S$..... $\Delta_n S$.

2°) Bepaal voor elk van deze baanstukjes de arbeidsportie: $F^{tang}_{op\ \Delta_k S} \cdot \Delta_k S$ Joule.

3°) De algebraïsche som van al deze arbeidsporties is dan de totale arbeid die door de niet constante kracht $\vec{F}$ verricht wordt bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt.

Dus: $W_{door\ \vec{F}}$ bij bew. van A → B $= (F^{tang}_{op\ \Delta_1 S} \cdot \Delta_1 S - F^{tang}_{op\ \Delta_2 S} \cdot \Delta_2 S - \ldots\ldots + F^{tang}_{op\ \Delta_n S} \cdot \Delta_n S)$ J.

Dus: $W_{door\ \vec{F}}$ bij bew. van A → B $= \sum_{k=1}^{k=n} F^{tang}_{op\ \Delta_k S} \cdot \Delta_k S$ Joule.

Hierin zijn de baanstukjes $\Delta_k S$ eventueel infinitesimaal klein. Om dit aan te geven gebruikt de wiskunde een speciaal symbool. De wiskundige situatie van deze som is:

$$\underset{\substack{\text{bij de bew.}\\ \text{van } A \longrightarrow B.}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \int_A^B F_{(s)}^{\text{tang}} \; . \; ds \text{ Joule}$$

Lees: $\underset{\substack{\text{bij de bew.}\\ \text{van } A \longrightarrow B.}}{W_{\text{door } \vec{F}}}$ is DE INTEGRAAL VAN A TOT B van $F_{(s)}^{\text{tang}}$. ds.

Opmerkingen: 1) In zijn algemeenheid is dit probleem voor ons (op deze klas) onoplosbaar. In de volgende paragraaf zullen we echter zien hoe we dit probleem voor een voudige gevallen op deze klas oplossen.

2) Met nadruk wijzen we er op, dat we, om de termen $F^{\text{tang}}_{\text{op } \Delta_k S} \, . \, \Delta_k S$ te kunnen bepalen MOETEN WETEN HOE DE TANGENTIELE COMPONENT VAN DE KRACHT VERANDERT ALS FUNCTIE VAN DE BAANCOORDINAAT LANGS KROMME AB.

In de integraal
$$\int_A^B F_{(s)}^{\text{tang}} . ds \text{ Joule}$$
moet dus voor $F_{(s)}^{\text{tang}}$ de functie ingevuld worden DIE DE TANGENTIELE COMPONENT VAN DE KRACHT IS VAN DE BAANCOÖRDINAAT S, dus de tangentiële component van de kracht $\vec{F}$ ALS FUNCTIE VAN DE BAANCOÖRDINAAT S.

§ 3. Grafische beschouwing: De bepaling van $W_{\text{door } \vec{F}}$ uit de grafiek van de tangentiële component van de kracht als functie van de baancoördinaat.

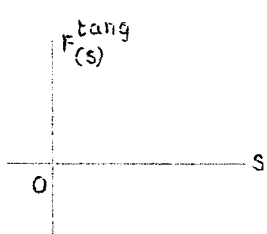
Punt 1) Inleiding.

In deze paragraaf willen we laten zien hoe men de integraal

$$\underset{\substack{\text{bij bew.}\\ \text{van } A \rightarrow B}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \int_A^B F_{(s)}^{\text{tang}} . ds \text{ Joule}$$

grafisch kan bepalen.

Zoals we in par. 2 hebben opgemerkt stelt $F_{(s)}^{\text{tang}}$ DE TANGENTIELE COMPONENT van de kracht $\vec{F}$ voor als functie van de baancoördinaat langs de beschreven baan. De VORM van de baan zelf doet hierbij niets ter zake.



In het nu volgende punt 2) gaan we grafieken tekenen met de baancoördinaat tot abscis en de tangentiële component van de kracht tot ordinaat.

We houden dus twee dingen in het oog:

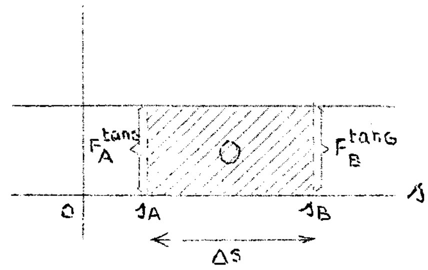
1°) De abscis zegt alleen iets over de baancoördinaat van een baanpunt en NIETS OVER DE VORM VAN DE BAAN.

2°) De ordinaat zegt alleen iets over DE TANGENTIELE COMPONENT VAN DE KRACHT en NIETS over de WARE GROOTTE van de kracht.

Punt 2) Verschillende gevallen.

Geval I. $F_{(s)}^{\text{tang}}$ is CONSTANT.

Geval I. $F^{tang}_{(s)}$ is CONSTANT.



Gegeven: Een kracht $\vec{F}$ verplaatst haar aangrijpingspunt langs een baan (recht of krom) van het baanpunt A (baancoörd. s_A) naar het baanpunt B (baancoörd. s_B). BIJ DEZE VERPLAATSING BLIJFT DE TANGENTIELE COMPONENT VAN DE KRACHT CONSTANT.

Gevraagd: $W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van A→B.

Oplossing: Daar de normale component van een kracht nooit arbeid verricht is de arbeid door de (eventueel niet constante) kracht $\vec{F}$ gelijk aan de arbeid DIE DOOR HAAR TANGENTIELE COMPONENT VERRICHT WORDT.

Dus: $\underset{A \to B.}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \underset{A \to B.}{W_{\text{door } F^{tang}}} = \underline{\underline{F^{tang} \, . \, \Delta S \quad \text{Joule}}}$

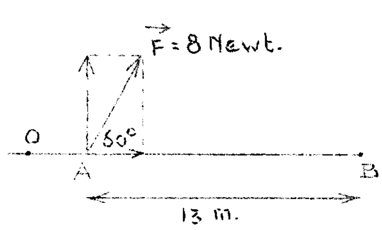
Gevraagd: Waardoor wordt deze arbeid IN BOVENSTAANDE GRAFIEK voorgesteld?

Antwoord: MEETKUNDIG is $F^{tang} . \Delta S$ = Oppervlak O.

> Conclusie: $W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van A→B. wordt in de grafiek voorgesteld door
>
> HET OPPERVLAK
>
> dat begrensd wordt door $\Delta S_{A \to B}$, F_A^{tang}, F_B^{tang} en de grafieklijn.

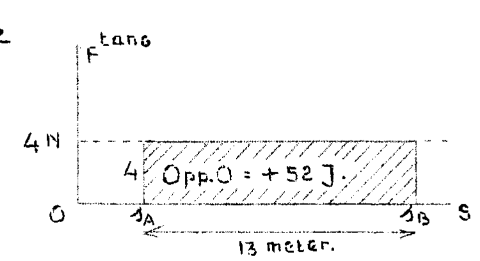
Waar het ons nu om gaat is, dat de arbeid door een kracht in de grafiek $F^{tang}_{(s)}$ wordt voorgesteld door een OPPERVLAK.

Voorbeelden: a)



$W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van A→B. $= + 4.13 = + 52$ Joule.

Grafiek.



b) Een massapunt van 6 kg* doorloopt de omtrek van een cirkel EENPARIG VERSNELD met een tangentiële versnelling van 2 $^m/sec^2$. De straal van de cirkel is $\frac{5}{\pi}$ meter.

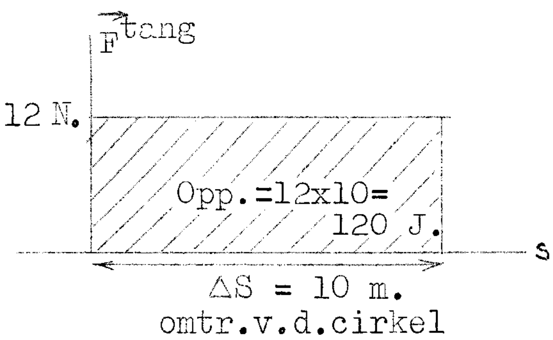
Gevraagd: Hoeveel arbeid wordt er GEDURENDE EEN OMLOOP verricht door de tangentiële kracht.

Oplossing. $F^{tang} = 6.2 = 12$ NEWTON.

De omtrek van de cirkel is $2\pi . \frac{5}{\pi} = 10$ meter.

Dus: $W_{\text{door } \vec{F}_{tang}} = 12 \times 10 = 120$ Joule.

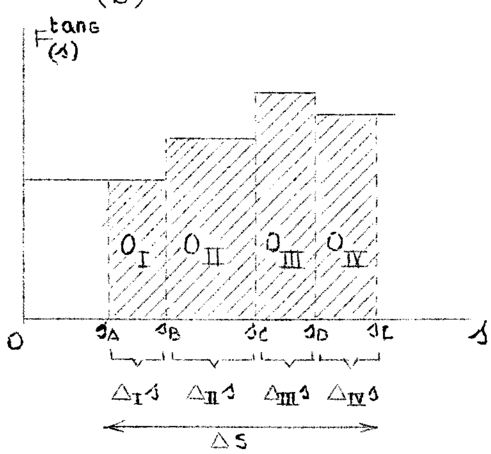
Grafiek.



Opmerking.

Als over een gekromd baanstuk $F^{tang}_{(s)}$ constant is, behoeven we om de arbeid te berekenen het baanstuk dus niet meer in infinitesimaal kleine stukjes te verdelen die zo klein zijn, dat elk stukje als recht kan beschouwd worden.

Geval II. $F^{tang}_{(s)}$ verandert "met sprongen".



Gegeven: Een kracht $\vec{F}$ verplaatst haar aangrijpingspunt langs een (rechte of kromme)baan van het baanpunt A naar het baan punt E.
Nevenstaande grafiek geeft de TANGENTIËLE COMPONENT van de kracht $\vec{F}$ als functie van de baan coördinaat s.

Gevraagd: $W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van A→E.

Oplossing: Omdat de normale component van $\vec{F}$ geen arbeid verricht, is:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A\to E}} = W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A\to E}}$$

Welnu:

$$W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A\to B}} = + F^{tang}_{I} . (s_B - s_A) = + F^{tang}_{I} . \Delta_I s = + \text{Opp. } O_I$$

$$W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } B\to C}} = + F^{tang}_{II} . (s_C - s_B) = + F^{tang}_{II} . \Delta_{II} s = + \text{Opp. } O_{II}$$

$$W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } C\to D}} = + F^{tang}_{III} . (s_D - s_C) = + F^{tang}_{III} . \Delta_{III} s = + \text{Opp. } O_{III}$$

$$W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } D\to E}} = + F^{tang}_{IV} . (s_E - s_D) = + F^{tang}_{IV} . \Delta_{IV} s = + \text{Opp. } O_{IV}$$

+

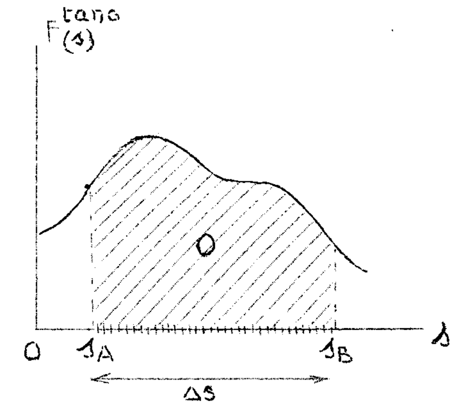
Dus: $$W_{\substack{\text{door } F^{tang} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A\to E}} = \sum F_k \Delta_k s = \text{Opp.}(O_I + O_{II} + O_{III} + O_{IV})$$

Dus:

$W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. van A→E $= \text{Opp.} (O_I + O_{II} + O_{III} + O_{IV})$ Joule

De arbeid door de kracht $\vec{F}$ verricht, als deze haar aangrijpingspunt langs de gegeven baan verplaatst van het baanpunt A naar het baanpunt B, wordt dus in de grafiek van $F^{tang}_{(s)}$ voorgesteld door het oppervlak dat begrensd wordt door ΔS, de ordinaten F^{tang}_A en F^{tang}_B, en de grafieklijn.

Geval III. $F^{tang}_{(s)}$ is een willekeurige functie.



In nevenstaande figuur stelt de kromme lijn de grafiek van de TANGENTIËLE COMPONENT van de kracht $\vec{F}$ voor als functie van de baancoördinaat van een gegeven baan.

Gevraagd: $W_{\text{door } \vec{F}}$ als de kracht $\vec{F}$ haar aangrijpingspunt langs deze baan verplaatst van het baanpunt A naar het baanpunt B.

Oplossing: Omdat de normale component van $\vec{F}$ geen arbeid verricht is $W_{\text{door } \vec{F}} = W_{\text{door } F^{tang}}$.

We verdelen het baanstuk ΔS in infinitesimaal kleine stukjes die zo klein zijn, dat over elk stukje $F^{tang}_{\Delta_k S}$ constant is.
Daarna bepalen we voor elk stukje de arbeidsportie:

$$F^{tang}_{\Delta_k S} \cdot \Delta_k S \text{ Joule}$$

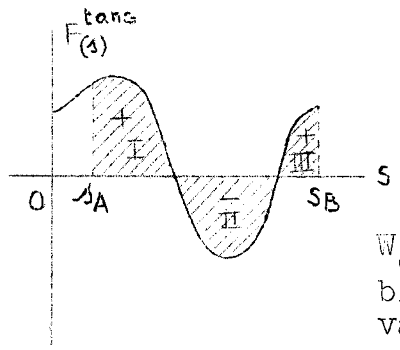
en tellen deze arbeidsporties algebraisch op.
Maar elk van deze arbeidsporties wordt in de grafiek voorgesteld door het oppervlak van een infinitesimaal smalle rechthoek.
De algebraische som van al deze arbeidsporties wordt in de grafiek dus voorgesteld door HET OPPERVLAK van de gearceerde figuur die begrensd wordt door ΔS, de ordinaten F^{tang}_A en F^{tang}_B, en de grafieklijn.
(Dit geval kan dus beschouwd worden als een limiet van geval II)
Dus:

$W_{\text{door } \vec{F}}$ bij bew. langs de baan v. A→B = Oppervlak  Joule.

De arbeid door de kracht $\vec{F}$ Verricht, als deze haar aangrijpingspunt langs de gegeven baan verplaatst van het baanpunt A naar het baanpunt B, wordt dus in de grafiek van de TANGENTIËLE COMPONENT VAN $\vec{F}$ ALS FUNCTIE VAN S, voorgesteld door HET OPPERVLAK VAN DE FIGUUR die begrensd wordt door ΔS, de ordinaten F^{tang}_A en F^{tang}_B, en de grafieklijn.

Opmerking.

Opmerking.



Is, zoals in nevenstaande figuur, de grafiek van $F^{tang}_{(s)}$ een lijn die de S-as SNIJDT, dan moet het oppervlak-onder-de-as NEGATIEF gerekend worden.
In nevenstaand geval is dus:

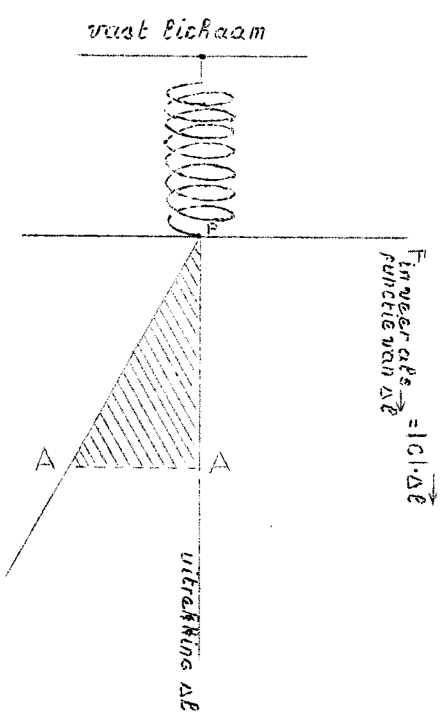
$$\underset{\text{bij bew. van } A\to B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = + \text{Opp.I} - \text{Opp.II} + \text{Opp.III}$$

EINDCONCLUSIE.

DE BEREKENING VAN DE ARBEID DIE VERRICHT WORDT ALS EEN NIET CONSTANTE KRACHT HAAR AANGRIJPINGSPUNT LANGS EEN RECHTE OF KROMME BAAN VERPLAATST KOMT NEER OP EEN OPPERVLAKTE BEPALING in DE GRAFIEK WAARIN

ΔS DE ABSCIS IS, en
$F^{tang}_{(s)}$ DE ORDINAAT.

Voorbeeld. De arbeid door de veerkracht in een schroefveer bij intrekking van de veer.



In de eerste ronde hebben we gezien, dat er bij uitrekking van de schroefveer IN de veer een veerkracht optreedt die de veer haar oorspronkelijke vorm wil teruggeven.
In de situatie van nevenstaande figuur is deze veerkracht dan verticaal naar boven gericht, dus tegengesteld aan de verplaatsingsvector $\vec{\Delta\ell}$ van het punt P.
Als $\vec{\Delta\ell}$ niet al te groot is, geldt:

$$\vec{F}_{\text{in veer}} = - |C| . \vec{\Delta\ell} \text{ Newton.}$$

Hierin is |C| de z.g. krachtsconstante van de veer.

Gevraagd: De arbeid die de veerkracht verricht bij de uitrekking $\vec{OA}$.

Oplossing:

$$\underset{\text{bij uitrekk. } \vec{OA}}{W_{\text{door } \vec{F}_{\text{veer}}}} = - \text{Opp. } \Delta OAA' \text{ Joule}$$

$$= - \tfrac{1}{2}.OA.|AA'| \quad \text{Joule}$$

Nu is: $|AA'| = |C|.\ \Delta\ell = |C|.OA$ meter.

Dus:

$$\underset{\text{bij uitr. } \vec{OA}}{W_{\text{door } \vec{F}_{\text{veer}}}} = - \tfrac{1}{2} . OA .|C| . OA = \underline{\underline{- \tfrac{1}{2}|C| . OA^2 \text{ Joule}}}$$

Algemeen:

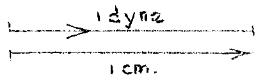
$$\underset{\text{bij uitr. } \vec{\Delta\ell}}{W_{\text{door } \vec{F}_{\text{veer}}}} = - \tfrac{1}{2}|C| . (\Delta\ell)^2 \text{ Joule.}$$

Deze formule zullen we later nodig hebben.

§ 4. De eenheid van arbeid in het C.G.S.-stelsel en in het dagelijkse leven.

Punt 1) De eenheid van arbeid in het C.G.S. stelsel.

De eenheid van kracht is 1 dyne.
De eenheid van lengte is 1 cm.



De eenheid van arbeid in het C.G.S. stelsel is de arbeid die verricht wordt als een kracht van 1 dyne haar aangrijpingspunt 1 cm. in haar werkrichting verplaatst.

Deze eenheid van arbeid heet EEN ERG.

Omrekenen.

1 dyne $= 10^{-5}$ Newton
1 cm. $= 10^{-2}$ meter

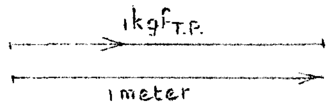
1 erg = 1 dyne.cm. $= 10^{-7}$ Joule

Dus:

$$\boxed{1 \text{ Joule} = 10^{7} \text{ erg.}}$$

Punt 2) De eenheid van arbeid in het dagelijkse leven.

De eenheid van kracht is 1 $kgf_{T.P.}$
De eenheid van lengte is 1 meter



De eenheid van arbeid op een bepaalde plaats ter aarde is de arbeid die verricht wordt als een kracht ter grootte van 1 $kgf_{T.P.}$ haar aangrijpingspunt èèn meter in haar werkrichting verplaatst.

In het dagelijkse leven is de plaatselijke eenheid van arbeid dus:

1 $kgf_{T.P.}$.meter.

Men noemt deze eenheid kortweg: een kilogrammeter (T.P.), en noteert deze als 1 $kgm_{(T.P.)}$

Omrekenen.

1 $kgf_{T.P.}$ = $g_{T.P.}$ NEWTON

Dus: 1 $kgf_{T.P.}$.meter = $g_{T.P.}$ NEWTON.METER = $g_{T.P.}$ Joule.

Conclusie:

$$\boxed{1 \text{ kilogrammeter T.P.} = g_{T.P.} \text{ Joule.}}$$

Getallenvoorbeeld. Een kracht van 5 $kgf_{T.P.}$ verplaatst haar aangrijpingspunt 3 meter in haar werkrichting.
$g_{T.P.} = 10\ ^{m}/sec^{2}$.

Gevraagd: De arbeid in Joule.

Oplossing: F = 5 $kgf_{T.P.}$ = 50 NEWTON

Dus: $W_{door\ \vec{F}} = + 50 \times 3 = \underline{+ 150 \text{ Joule.}}$

§ 5. Het begrip ARBEIDS EFFECT of VERMOGEN van een energiebron.

Punt 1) In de praktijk gaat het er niet alleen om HOEVEEL ARBEID EEN MACHINE LEVERT, maar ook OM DE SNELHEID WAARMEE DEZE ARBEID GELEVERD WORDT. Deze arbeidssnelheid noemt men HET ARBEIDSEFFECT of HET VERMOGEN van de energiebron. (De term "energie" betekent hier "hoeveelheid arbeid")

> Definitie. Onder HET ARBEIDSEFFECT OF VERMOGEN van een energiebron verstaat men de PER SECONDE geleverde arbeid.

Notatie. Het ARBEIDSEFFECT OF VERMOGEN wordt aangeduid door de hoofdletter P.

De formule voor het arbeidseffect of vermogen luidt dus:

$$\boxed{P = \frac{W}{t_{\text{in sec.}}}} \qquad (1)$$

Punt 2) De eenheden van effect of vermogen.

I) In het stelsel van Giorgi: 1 Watt.

$$\boxed{1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}} \qquad (2)$$

Deze eenheid is genoemd naar de Engelse natuurkundige JAMES WATT (1736 - 1819), realiseerde de idee van de stoommachine)

II) In de techniek: 1 Kilo-Watt = 1 K.Watt

$$\boxed{1 \text{ K.Watt} = 1000 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}}$$

III) In de verouderde techniek: 1 P.K. = $75 \frac{\text{kgm}_{\text{T.P.}}}{\text{sec.}}$

Deze eenheid stamt uit de tijd toen de machines door paarden in beweging gebracht werden. Men veronderstelde dat een paard in staat was om een gewicht van 75 $\text{kgf}_{\text{T.P.}}$ in een seconde 1 meter op te tillen. Dit vermogen noemde men "een paarde-kracht", afgekort 1 P.K.

Een machine van 100 P.K. levert dus per seconde even veel arbeid als 100 paarden samen per seconde kunnen verrichten.

Merk op, dat in de eenheid 1 P.K. de term KRACHT gebruikt wordt waar eigenlijk VERMOGEN bedoeld wordt: In de tijd van James Watt had men nog geen duidelijk "arbeidsbegrip".

Omrekenen.

$$1 \text{ P.K.} = 75 \frac{\text{kgf}_{\text{T.P.}}\text{.m.}}{\text{sec.}} = 75 \times g_{\text{T.P.}} \frac{\text{Joule}}{\text{sec.}} =$$

$$75 \times g_{\text{T.P.}} \text{ Watt.}$$

Punt 3) Nadere beschouwing.

Uit formule (1) volgt:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geleverde} \\ \text{arbeid}}}{W} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per sec} \\ \text{gelev.} \\ \text{arbeid}}}{P} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aantal} \\ \text{sec.}}}{t}$$

Dus:

$$\boxed{\text{Arbeid} = \text{vermogen} \times \text{tijdsduur.}}$$

Uit formule (2) volgt:

$$\boxed{1 \text{ Joule} = 1 \text{ Watt} \times 1 \text{ sec.}} \qquad (3)$$

Deze vergelijking vormt in het stelsel van Giorgi de schakel tussen de eenheid van mechanische energie (1 Joule) en de eenheid van hoeveelheid energie van een electrische stroom. Men wil deze vergelijking "de vergelijking van Giorgi" noemen.

Men schrijft vergelijking (3) kortweg als:

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Watt.seconde.}$$

1 Watt seconde is dus eigenlijk alleen maar een ANDERE NAAM voor de HOEVEELHEID ARBEID van 1 Joule.

Van 1 Watt seconde is de eenheid 1 K.W.h. afgeleid.

$$1 \text{ K.W.h} = 1000 \text{ Watt} \times 3600 \text{ sec.} = 1000 \frac{\text{Joule}}{\text{sec.}} \times 3600 \text{ sec.} = $$
$$= 36.10^5 \text{ Joule.}$$

Dus:

$$\boxed{1 \text{ K.W.h} = 36.10^5 \text{ Joule.}}$$

NB. 1 K.W.h. is EEN EENHEID VAN HOEVEELHEID ARBEID: het is de arbeid die in de tijd van EEN UUR geleverd wordt door een energiebron met een arbeidseffect of vermogen van 1 K. Watt.

Deze eenheid wordt practisch alleen in de electrotechniek gebruikt.

NB. §6. ARBEIDSVERMOGEN.

Opmerking vooraf. In het woord "arbeidsVERMOGEN" heeft de term "VERMOGEN" een ANDERE BETEKENIS dan deze had toen in de vorige paragraaf gesproken werd van het vermogen van een energiebron. Toen betekende "vermogen" de arbeid die de energiebron PER SECONDE LEVERT.
Daarom hebben we in de vorige paragraaf aan de term "vermogen" steeds de, helaas verouderde, term "arbeidseffect" vooraf laten gaan.
In het woord "ARBEIDSVERMOGEN" slaat de term "VERMOGEN" op de TOTALE HOEVEELHEID ARBEID DIE ER VERRICHT KAN WORDEN.
Als we dus straks zeggen, dat een massapunt een arbeidsvermogen heeft van b.v. 20 Joule, dan zullen we daarmee bedoelen DAT HET MASSAPUNT IN STAAT IS EEN ARBEID TE VERRICHTEN VAN 20 JOULE.
Het is ons op dit ogenblik echter nog niet duidelijk dat een massapunt "überhaupt" in staat KAN zijn om arbeid te verrichten.

Deel I van § 6: HET ARBEIDSVERMOGEN VAN BEWEGING.

Punt 1) Het begrip.

In de eerste ronde hebben we de kreet geslaakt "ALS MASSA VAART KRIJGT, DAN KAN ER WAT GEBEUREN".

Met deze uitroep werden TWEE ERVARINGSFEITEN aangeduid, n.l.:

1°) dat EEN MASSAPUNT IN RUST UIT ZICHZELF NIET IN STAAT IS om een OP dit massapunt werkende kracht TE DWINGEN haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen.

2°) dat EEN BEWEGEND MASSAPUNT DAAR WEL TOE IN STAAT IS.

Voorbeelden: a) Een kogel in de rusttoestand is NIET IN STAAT om de zwaartekracht te dwingen haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in te verplaatsen; wordt de kogel verticaal omhoog geschoten dan DWINGT hij de zwaartekracht om haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen, althans over een bepaald stuk.

b) Een langs een ruw vlak bewegend massapunt DWINGT de WRIJVINGSKRACHT om haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen.

Conclusie.

Conclusie: Een bewegend massapunt is TEN GEVOLGE VAN ZIJN BEWEGING in staat om een kracht, die deze beweging tegenwerkt, TE DWINGEN haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen.

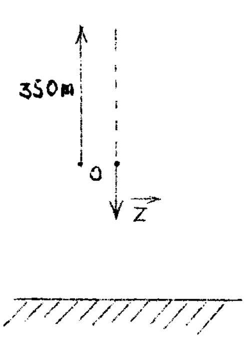
Het gaat ons nu om het feit, dat een BEWEGEND massapunt TEN GEVOLGE VAN DEZE BEWEGING IN STAAT IS om een kracht, DIE DEZE BEWEGING TEGENWERKT, TE DWINGEN HAAR AANGRIJPINGSPUNT TEGEN HAAR WERKRICHTING IN TE VERPLAATSEN.

Benaming. Als een massapunt ten gevolge van zijn beweging een kracht dwingt om haar aangrijpingspunt TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen, ZEGT MEN, DAT HET MASSAPUNT ARBEID VERRICHT OP DEZE KRACHT.

De verticaal omhoog geschoten kogel verricht tijdens het stijgen dus arbeid OP de zwaartekracht; het langs het ruwe vlak bewegende massapunt verricht dus bij deze beweging arbeid OP de wrijvingskracht.
Als een massapunt ARBEID VERRICHT OP EEN KRACHT, verricht DIE KRACHT ZELF dus NEGATIEVE ARBEID. Daarom noemt men de arbeid die dan DOOR HET MASSAPUNT VERRICHT WORDT POSITIEF.

Definitie: Onder DE HOEVEELHEID POSITIEVE ARBEID die een massapunt verricht als het arbeid verricht op een kracht (en dus de kracht dwingt om haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in te verplaatsen) verstaat men de hoeveelheid arbeid DIE GELIJK EN TEGENGESTELD IS AAN DE HOEVEELHEID NEGATIEVE ARBEID die de kracht bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt verricht.

Getallenvoorbeelden: I) Gegeven: De verticaal omhoog geschoten kogel weegt 2 $kgf_{T.P.}$ en stijgt 350 meter.
$g_{T.P.} = 10\ m/sec^2$.



Gevr. a) $W_{door\ \vec{Z}}$ bij dit stijgen.

Oplossing: Z = 20 NEWTON.

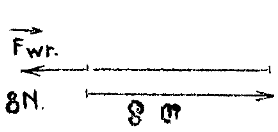
Dus: $W_{door\ \vec{Z}} =$
$- 20 \times 350 = \underline{-\ 7000\ J.}$

Gevr. b) Hoeveel arbeid verricht de kogel bij dit stijgen OP DE ZWAARTEKRACHT?

Antwoord:

$W_{door\ kogel\ op\ \vec{Z}} = \underline{+\ 7000\ Joule.}$

II) Gegeven: Een massapunt beweegt 8 meter langs een ruw vlak en ondervindt daarbij een wrijvingskracht van 7 Newton.



Gevr. a) $W_{door\ de\ wrijvingskracht}$.

Oplossing: $W_{door\ de\ wr.\ kracht} =$
$= - 7 \times 8 = \underline{-\ 56\ Joule.}$

Gevr. b)

Gevr. b) Hoeveel arbeid verricht het massa punt bij deze beweging OP DE WRIJVINGSKRACHT.

Antwoord: $W_{\text{door massap. op wr.kr.}} =$
$= +\ 56$ Joule.

CONCLUSIE. I Een BEWEGEND massapunt is TEN GEVOLGE VAN DEZE BEWEGING IN STAAT OM POSITIEVE ARBEID OP EEN KRACHT TE VERRICHTEN.

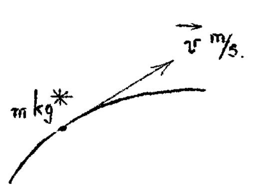
II DE HOEVEELHEID POSITIEVE ARBEID die het massa punt dan verricht is GELIJK EN TEGENGESTELD aan de hoeveelheid NEGATIEVE ARBEID die de kracht dan verricht bij de gedwongen verplaatsing van haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in.

Welnu: Het feit dat een bewegend massapunt TEN GEVOLGE VAN ZIJN BEWEGING IN STAAT IS OM POSITIEVE ARBEID TE VERRICHTEN OP EEN TEGEN-WERKENDE KRACHT duidt men aan door te zeggen DAT HET MASSAPUNT ARBEIDSVERMOGEN VAN BEWEGING HEEFT.

De HOEVEELHEID POSITIEVE ARBEID die een massapunt met een massa van m kg* en een snelheid v m/sec. IN TOTAAL op een tegenwerkende kracht KAN verrichten, noemt men HET ARBEIDSVERMOGEN VAN BEWEGING van dit massapunt met deze snelheid.

DEFINITIE: ONDER HET ARBEIDSVERMOGEN VAN BEWEGING (afgekort A.v.B.) van een massapunt met massa m kg* en snelheid v m/sec. verstaat men DE TOTALE HOEVEELHEID POSITIEVE ARBEID die dit massapunt tengevolge van deze snelheid IN STAAT IS op een tegenwerkende kracht te verrichten.

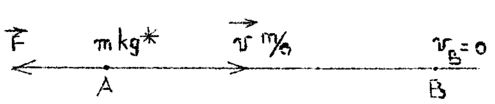
Punt 2) Het A.v.B. van een massapunt uitgedrukt in Joule.



Gegeven: Een massapunt van m kg* voert een of andere beweging uit en heeft op een gegeven ogenblik een snelheid van v m/sec.

Gevraagd: Hoeveel Joule bedraagt het A.v.B. van het massapunt op dit ogenblik?

Oplossing: We moeten dus berekenen hoeveel Joule positieve arbeid dit massapunt met deze snelheid MAXIMAAL ZOU KUNNEN VERRICHTEN op een kracht die zijn beweging tegenwerkte.



Daartoe doen we de volgende "gedachten-proef": We nemen het massapunt uit de gegeven bewegingssituatie, plaatsen het, met behoud van de snelheid v m/sec., op een rechte baan en laten er een kracht van $\vec{F}$ Newton op werken waarvan de werkrichting tegengesteld is aan de langs deze rechte baan gerichte snelheidsvector $\vec{v}$.
Het massapunt krijgt dan dus een eenparig vertraagde rechtlijnige beweging waarvan de beginsnelheid v m/sec. is en de vertraging volgens de 2e wet van Newton ($\vec{F}=m.\vec{a}$) gelijk is aan

$$a = \frac{F}{m}\ \text{m/sec}^2.$$

De plaatsfunctie wordt dus:

$$s_t = vt - \tfrac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,t^2 \text{ meter,}$$

en de snelheidsfunctie:

$$v_t = v - \frac{F}{m}\, t \ {}^{m}/sec.$$

<u>We berekenen nu de lengte van het baanstuk waarover het massapunt de kracht $\vec{F}$ zal "voortslepen" en de hoeveelheid negatieve arbeid die de kracht $\vec{F}$ verricht bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in.</u>

<u>Berekening.</u>

Het massapunt zal de kracht $\vec{F}$ zo lang "voortslepen" tot $v_t = 0$.

$$0 = v - \frac{F}{m}\, t$$

$$t = \frac{m}{F} \cdot v \text{ sec.}$$

Is AB (zie fig.) het baanstuk waarover het massapunt de kracht $\vec{F}$ "voortsleept", dan is:

$$\begin{aligned} AB &= v\left(\frac{m}{F}.v\right) - \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\left(\frac{m}{F}.v\right)^2 && \text{meter} \\ &= \frac{m}{F}.v^2 - \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}.\frac{m^2}{F^2}.v^2 && \text{meter} \\ &= \frac{m}{F}.v^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m}{F}.v^2 && \text{meter} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{m}{F}.v^2 && \text{meter.} \end{aligned}$$

Het massapunt van m kg* met snelheid v $^{m}/sec.$ is dus IN STAAT om de tegenwerkende kracht $\vec{F}$ te dwingen haar aangrijpingspunt over een stuk

$$AB = \frac{1}{2}\,\frac{m}{F}\, v^2 \text{ meter}$$

TEGEN HAAR WERKRICHTING IN te verplaatsen.

<u>De hoeveelheid negatieve arbeid die de kracht $\vec{F}$ verricht bij deze verplaatsing van haar aangrijpingspunt tegen</u> haar werkrichting in, is:

$$W_{\text{door } \vec{F}} = -\,F.AB = -\,F.\frac{1}{2}\,\frac{m}{F}\, v^2 = -\,\frac{1}{2}\, mv^2 \text{ Joule.}$$

Dus:

$$\boxed{W_{\text{door } \vec{F}} = -\,\frac{1}{2}\, mv^2 \text{ Joule}}$$

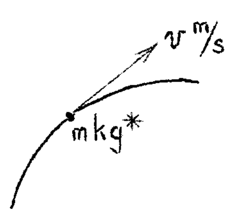
(Deze arbeid is dus onafhankelijk van de grootte van F)

DE HOEVEELHEID POSITIEVE ARBEID DIE HET MASSAPUNT BIJ DEZE VERPLAATSING VERRICHT <u>OP</u> DE TEGENWERKENDE KRACHT $\vec{F}$, IS DUS:

$$+\,\frac{1}{2}\, mv^2 \text{ Joule.}$$

<u>CONCLUSIE I</u> Een massapunt met massa m kg* en snelheid v $^{m}/s$,
IS IN STAAT
om OP een tegenwerkende kracht een hoeveelheid
POSITIEVE ARBEID TE VERRICHTEN VAN
$+\,\frac{1}{2}\, mv^2$ Joule.

<u>CONCLUSIE II</u>



HET <u>A</u>RBEIDSVERMOGEN VAN <u>B</u>EWEGING
VAN EEN MASSAPUNT
MET MASSA m kg*
EN SNELHEID v $^{m}/sec$
IS GELIJK AAN

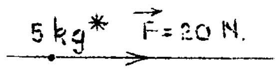
$$\frac{1}{2}\, m.v^2 \text{ Joule.}$$

In woorden: DE HELFT van het product van ZIJN M A S S A (in kg*) en HET <u>KWADRAAT</u> VAN ZIJN MOMENTELE SNELHEID (in $^{m}/sec.$)

Punt 3) Opgave 42.

Gegeven: m = 4 kg* ; v = 8 m/sec. Gevr: A.v.B.
Gegeven: v = 4 m/sec; A.v.B. = 8 Joule. Gevr: m.
Gegeven: A.v.B. = 4 Joule; m = 8 Kg*. Gevr: v.

Opgave 43.



Gegeven: Een massapunt van 5 kg*. rust op een volkomen glas horizontaal vlak. Ten tijde t = 0 sec. begint op het massapunt een constante, langs het vlak gerichte kracht $\vec{F}$ van 20 Newton te werken.

Gevraagd: Het A.v.B. van het massapunt op het tijdstip t = 10 sec.

Oplossing:

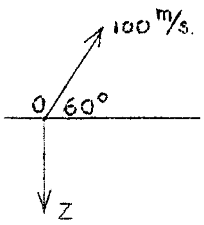
$$\left.\begin{array}{l} F = m \cdot a \\ 20 = \end{array}\right\} a =$$

Het massapunt gaat een eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid uitvoeren.

$s_t =$ meter
$v_t =$ m/sec.
Dus $v_{10} =$ m/sec.
Dus $(A.v.B.)_{t=10} = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad = 4000$ Joule.

Opgave 44.

Gegeven: Een kogel (gewicht 20 $kgf_{T.P.}$) wordt vanuit een punt O van de grond onder een elevatiehoek van 60° met een beginsnelheid van 100 m/sec. opgeschoten. g = 10 m/sec².



Gevraagd: a) $(A.v.B.)_{in\ O}$

Oplossing: $(A.v.B.)_{in\ O} = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad = 100000$ J.

Gevraagd: b) Het A.v.B. in de top van de parabool.

Oplossing: $v_{top} = v_x$

Dus: $(A.v.B.)_{in\ top} = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad = 25000$ J.

Henric van Veldeke College.
Aylvalaan 9
Maastricht.

Deel II van § 6:

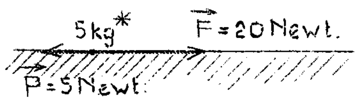
DE WET VAN LEVENDE KRACHT EN ARBEID.

Punt 1) Eerst een voorbeeld om duidelijk te maken waar het nu om gaat.

Gegeven: Een massapunt van 5 kg* rust op een ruw horizontaal vlak. Op het tijdstip $t = 0$ begint er op dit massapunt een constante, langs het vlak gerichte kracht $\vec{F}$ van 20 Newton te werken.
Bij de beweging langs het ruwe vlak ondervindt het massapunt een constante wrijvingsweerstand $\vec{P}$ van 5 Newton.

Gevraagd: a) De plaatsfunctie en de snelheidsfunctie.

Oplossing: De krachten $\vec{F}$ en $\vec{P}$ hebben dezelfde werklijn maar zijn tegengesteld gericht.



Hun resultante is een kracht $\vec{R}$ van 15 Newton waarvan de richting samenvalt met de richting van de kracht $\vec{F}$.
Het massapunt krijgt een eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid, met versnelling $3\ ^m/sec^2$.

Dus: $s_t = \frac{3}{2} t^2$ meter
$v_t = 3\ t\ ^m/sec.$

Gevraagd: b) De verplaatsing in het tijdsinterval van $t = 4$ tot $t = 10$ sec.

Oplossing:
$$s_{10} = \frac{3}{2} \cdot 100 = +\ 150 \text{ meter.}$$
$$s_4 = \frac{3}{2} \cdot 16 = +\ 24 \text{ meter.} \quad -$$
$$\underset{4\to10}{\Delta s} = \quad = +\ 126 \text{ meter.}$$

Gevraagd: c) De snelheden op de tijdstippen $t = 4$ sec. en $t = 10$ s.

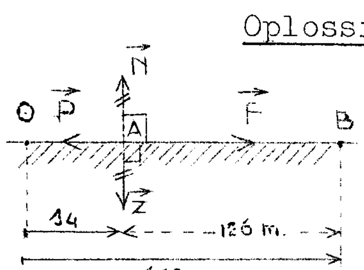
Oplossing:
$$v_4 = 3.\ 4 = +\ 12\ ^m/sec.$$
$$v_{10} = 3.10 = +\ 30\ ^m/sec.$$

→ Gevraagd: d) De RESULTERENDE VERANDERING VAN HET A.v.B. VAN HET MASSAPUNT IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t = 4$ tot $t = 10$ s, dus
$$(A.v.B.)_{op\ t\ =\ 10\ sec.} - (A.v.B.)_{op\ t\ =\ 4\ sec.}$$

Oplossing:
$$\underset{op\ t=10\ s.}{(A.v.B.)} = \tfrac{1}{2}.5.30^2 = \tfrac{1}{2}.5.900 = 2250 \text{ Joule}$$
$$\underset{op\ t=4\ s.}{(A.v.B.)} = \tfrac{1}{2}.5.12^2 = \tfrac{1}{2}.5.144 = 360 \text{ Joule} \quad -$$
$$\underset{op\ t=10\ s.}{(A.v.B.)} - \underset{op\ t=4\ s.}{(A.v.B.)} = \quad = +1890 \text{ Joule}$$

→ Gevraagd: e) DE ALGEBRAISCHE SOM VAN DE HOEVEELHEDEN ARBEID die in het tijdsinterval van $t = 4$ tot $t = 10$ sec. DOOR DE OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN worden verricht.

Oplossing: Stel, dat het massapunt zich op $t = 4$ sec. in het punt A en op $t = 10$ sec. in het punt B bevindt. (zie fig.)



Bij de beweging langs het horizontale vlak verrichten alleen de krachten $\vec{F}$ en $\vec{P}$ arbeid:
$$W_{door\ \vec{F}} = +\ F.AB = +\ 20.126 = +\ 2520 \text{ Joule}$$
$$W_{door\ \vec{P}} = -\ P.AB = -\ 5.126 = -\ 630 \text{ Joule} \quad +$$
$$\Sigma W = \quad = +\ 1890 \text{ Joule}$$

Conclusie: DE RESULTERENDE HOEVEELHEID ARBEID die TIJDENS de beschouwde beweging van het massapunt DOOR DE OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN wordt verricht is: + 1890 Joule.

→ NU KOMT DE KWESTIE WAAR HET IN HET ONDERHAVIGE DEEL II van § 6 OM GAAT:
WAT VALT ER TE ZEGGEN VAN DE UITKOMSTEN VAN DE VRAGEN d) EN e) ?

Antwoord: Deze uitkomsten ZIJN AAN ELKAAR GELIJK. Hieruit moeten we dus besluiten dat:

$$W_{\substack{\text{RESULTEREND}\\ \text{TIJDENS}\\ \text{de beweging}\\ \text{van } A \rightarrow B}} = \underbrace{(A.v.B.)_{\text{op } t = 10 \text{ sec.}}}_{\text{EINDE}} - \underbrace{(A.v.B.)_{\text{op } t = 4 \text{ s.}}}_{\text{BEGIN}}$$

Wat zegt deze vergelijking?

Antwoord:

In het linker lid

van deze vergelijking staat de RESULTERENDE hoeveelheid A R B E I D, die TIJDENS de beweging van het massapunt van het baanpunt A naar het baanpunt B (wijs dit aan in de fig. op voorg. blz.) DOOR ALLE OP HET MASSAPUNT WERKENDE krachten wordt verricht.

In het rechter lid

van deze vergelijking staat de RESULTERENDE VERANDERING VAN HET A.v.B. van het massapunt in het tijdsinterval van t = 4 tot t = 10 sec., dus de algebraïsche waarde van het VERSCHIL:

$(A.v.B.)_{\text{in } B}$ (wijs B aan!)
MIN
$(A.v.B.)_{\text{in } A}$ (wijs A aan!)

Deze vergelijking zegt dus:

De RESULTERENDE ARBEID die TIJDENS het beschouwde tijdsinterval DOOR ALLE OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN GEZAMENLIJK wordt verricht, IS GELIJK AAN de RESULTERENDE VERANDERING VAN HET A.v.B. VAN HET MASSAPUNT in dit tijdsinterval.

Het is natuurlijk zeer de vraag of deze vergelijking geen TOEVALLIGHEID is voor deze opgave: zouden we bij een ander getallenvoorbeeld tot dezelfde conclusie zijn gekomen?

Welnu: in het komende zullen we bewijzen dat deze vergelijking GEEN TOEVALLIGHEID is, maar de wiskundige formulering is van een ALGEMENE NATUURWET:

| DE WET VAN LEVENDE KRACHT EN ARBEID. |

Opmerking: De term "LEVENDE KRACHT" is een antiek woord voor A.v.B. Vroeger dacht men, dat "leven" bestond in het hebben van arbeidsvermogen van beweging.
In de moderne natuurkunde wordt A.v.B. KINETISCHE ENERGIE genoemd.
Bovengenoemde wet heet dan:

| DE WET VAN KINETISCHE ENERGIE EN ARBEID. |

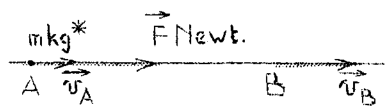
Punt 2)

Punt 2) Algemene behandeling.

We gaan nu voor algemene gevallen onderzoeken of DE RESULTERENDE ARBEID die TIJDENS DE BEWEGING van een massapunt DOOR DE OP DIT MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN GEZAMENLIJK WORDT VERRICHT inderdaad GELIJK IS aan DE RESULTERENDE VERANDERING VAN HET A.v.B. VAN HET MASSAPUNT in het beschouwde tijdsinterval.

We zullen dit onderzoek beginnen met het meest eenvoudige geval en dan staps-gewijs opklimmen tot het meest gecompliceerde geval.

Geval I.



Gegeven: Een massapunt van m kg* bevindt zich op een zeker tijdstip in een punt A van de ruimte en heeft dan de snelheid $\vec{v}_A$.
Op dit massapunt werkt èèn en slechts èèn kracht $\vec{F}$ Newton die constant is in grootte en richting, en waarvan de werkrichting SAMENVALT met de richting van vector $\vec{v}_A$ (zie fig.)
Het massapunt voert dus een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE BEWEGING uit met versnelling $a = \frac{F}{m}$ m/sec. Na enige tijd passeert het massapunt het baanpunt B en heeft dan de snelheid $\vec{v}_B$.

Te bewijzen: $W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A \rightarrow B}} = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$ Joule.

Bewijs: Nemen we het baanpunt A tot oosprong van het coördinatenstelsel langs de baan en het tijdstip waarop het massapunt het baanpunt A passeert als t = 0, dan worden de plaats- en snelheidsfunctie respectievelijk gegeven door de vergelijkingen:

$$s_t = v_A t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \text{ meter}$$

$$v_t = v_A + \frac{F}{m} t \text{ m/sec.}$$

We gaan nu eerst AB berekenen als functie van v_B. Daarna berekenen we $W_{\text{door } \vec{F}}$.

Berekening van AB. Is t_1 sec. het tijdstip waarop het massapunt het baanpunt B passeert, dan geldt:

$$AB = v_A t_1 + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t_1^2 \text{ meter} \qquad (1)$$

$$v_B = v_A + \frac{F}{m} t_1 \text{ m/sec.} \qquad (2)$$

Uit deze vergelijkingen elimineren we de tijd: dit doen we door t_1 uit vergelijking (2) op te lossen en deze in vergelijking (1) te substitueren.

Uit vergelijking (2) volgt:

$$t_1 = \frac{m}{F} (v_B - v_A)$$

Na substitutie van t_1 in vergelijking (1) vinden we:

$$AB = \frac{m.v_A(v_B - v_A)}{F} + \frac{1}{2} \frac{F}{m} \frac{m^2(v_B - v_A)^2}{F^2} \text{ meter}$$

$$AB = \frac{m.v_A v_B - mv_A^2}{F} + \frac{1}{2} \frac{mv_B^2 - 2mv_B v_A + mv_A^2}{F} \text{ meter}$$

$$AB = \frac{2m.v_A v_B - 2mv_A^2 + mv_B^2 - 2mv_B v_A + mv_A^2}{2F} \text{ meter}$$

$$\boxed{AB = \frac{mv_B^2 - mv_A^2}{2F} \quad \text{meter.}}$$

Berekening van $W_{\text{door } \vec{F}}$.

Bij de beweging van het massapunt van A naar B verplaatst de kracht $\vec{F}$ haar aangrijpingspunt AB meter in haar werkrichting.
Dus:

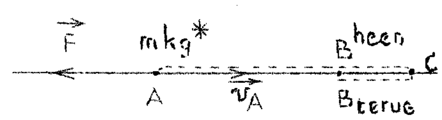
$$\underset{\substack{\text{bij bew.} \\ \text{van } A \to B}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = + F.AB = + F \frac{mv_B^2 - mv_A^2}{2F} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Conclusie:

$$\boxed{\underset{\substack{\text{bij bew.} \\ \text{van } A \to B}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule.}}$$

q.e.d.

Geval II.



Gegeven: In het punt A van de ruimte heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_A$.
Op het massapunt werkt de kracht $\vec{F}$ Newton waarvan de werkrichting TEGENGESTELD is aan de richting van vector $\vec{v}_A$.
Het massapunt voert dus een EENPARIG VERTRAAGDE RECHTLIJNIGE beweging uit: het beweegt eenparig vertraagd van A naar het omkeerpunt C en gaat dan eenparig versneld van C naar A naar $-\infty$.

a) We beschouwen eerst de beweging van A naar B^{heen}.

Te bewijzen:

$$\underset{\substack{\text{bij bew.} \\ \text{van } A \to B_{\text{heen}}}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \tfrac{1}{2}mv_{B_{\text{heen}}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Bewijs: De plaatsfunctie van het massapunt wordt nu gegeven door de vergelijking:

$$s_t = v_A t - \tfrac{1}{2} \frac{|F|}{m} t^2 \text{ meter.}$$

De snelh.functie: $v_t = v_A - \frac{|F|}{m} t \quad {}^{m}/_{sec}$.

Deze vergelijkingen kunnen uit de plaats- resp. snelheidsfunctie van Geval I verkregen worden door F te vervangen door $-|F|$.
Voor AB als functie van v_B vinden we dus:

$$AB = \frac{mv_B^2 - mv_A^2}{-2|F|} \text{ meter.}$$

Bij de beweging van A naar B^{heen} verplaatst de kracht F haar aangrijpingspunt AB meter TEGEN HAAR WERKRICHTING IN.
Dus:

$$\underset{\substack{\text{bij bew.} \\ \text{van } A \to B_{\text{heen}}}}{W_{\text{door } \vec{F}}} = -|F|.\frac{mv_B^2 - mv_A^2}{-2|F|} = \tfrac{1}{2}mv_{B_{\text{heen}}}^2 - \tfrac{1}{2} mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Conclusie:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to B_{heen}}} = -|F|.AB = \tfrac{1}{2}mv^2_{B_{heen}} - \tfrac{1}{2}mv^2_A \text{ Joule.}$$

b) De beweging van A naar C.

Te bewijzen: $W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A \to C}} = 0 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$ Joule.

Bewijs: $v_C = 0$

Dus $AC = \dfrac{0 - mv_A^2}{-2|F|}$ meter

Dus:
$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A \to C}} = -|F| \frac{0 - mv_A^2}{-2|F|} = 0 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Conclusie: $W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ \text{bij bew.} \\ \text{van } A \to C}} = 0 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$ Joule.

Opmerking:
$$\left.\begin{array}{l} W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to C}} = -\tfrac{1}{2}mv_A^2 \\ W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to C}} = -|F|.AC \end{array}\right\} |F|.AC = \tfrac{1}{2}mv_A^2$$

Uit deze vergelijking kunnen we AC oplossen.

De wet van levende kracht en arbeid doet ons dus een eenvoudig middel aan de hand om de baancoördinaat van het omkeerpunt te berekenen!

c) De beweging van $A \to C \to B_{terug}$.

Te bewijzen: $W_{\substack{\text{door} \vec{F} \\ \text{bij bew. van} \\ A \to C \to B_{terug}}} = \tfrac{1}{2}mv^2_{B_{terug}} - \tfrac{1}{2}mv^2_A$ Joule.

Bewijs:
$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to C}} = -|F|.AC = 0 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule (zie boven)}$$

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ C \to B_{terug}}} = +|F|.BC = \tfrac{1}{2}mv^2_{B_{terug}} - 0 \text{ Joule (zie geval I)}$$

+

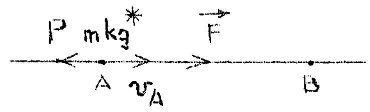
$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to C \to B_{terug}}} = -|F|(AC-BC) = -|F|.AB = \tfrac{1}{2}mv^2_{B_{terug}} - \tfrac{1}{2}mv^2_A \text{ Joule.}$$

Conclusie:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{F} \\ A \to C \to B_{terug}}} = -|F|.AB = \tfrac{1}{2}mv^2_{B_{terug}} - \tfrac{1}{2}mv^2_A \text{ Joule}$$

Opmerking: Vergelijken we de conclusies van a) en c) dan zien we, dat $v^2_{B_{heen}} = v^2_{B_{terug}}$

Geval III.



Gegeven: In het punt A van de ruimte heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_A$. Op het massapunt werken TWEE krachten $\vec{F}$ en $\vec{P}$: de werkrichting van kracht $\vec{F}$ valt samen met de richting van vector $\vec{v}_A$; de werkrichting van kracht $\vec{P}$ is tegengesteld aan de richting van vector $\vec{v}_A$; $|F| > |P|$

Het massapunt krijgt dus een EENPARIG VERSNELDE RECHTLIJNIGE beweging met versnelling $a = \frac{F - |P|}{m}$ m/sec².

De plaats en snelheidsfunctie van het massapunt worden dus resp. gegeven door de vergelijkingen:

$$s_t = v_A t + \tfrac{1}{2}\,\frac{F - |P|}{m}\,t^2 \quad \text{meter}$$

$$v_t = v_A + \frac{F - |P|}{m}\,t \quad \text{m/sec.}$$

Bij de beweging van het massapunt van A naar B verricht de kracht $\vec{F}$ POSITIEVE ARBEID, de kracht $\vec{P}$ NEGATIEVE ARBEID.

De RESULTERENDE ARBEID die TIJDENS deze beweging door de OP het massapunt werkende krachten GEZAMENLIJK wordt verricht is gelijk aan de algebraische som $W_{\text{door }\vec{F}} + W_{\text{door }\vec{P}}$

Te bewijzen:

$$W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{F}}} - W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{P}}} = \tfrac{1}{2}\,m v_B^2 - \tfrac{1}{2}\,m v_A^2 \quad \text{Joule.}$$

Bewijs: Analoog aan geval I vinden we nu voor AB:

$$AB = \frac{m v_B^2 - m v_A^2}{2(F - |P|)} \quad \text{meter.}$$

Dus:

$$W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{F}}} = +\,F.AB = +\,F\,\frac{m v_B^2 - m v_A^2}{2(F - |P|)} \quad \text{Joule}$$

$$W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{P}}} = -\,|P|.\,AB = -\,|P|\,\frac{m v_B^2 - m v_A^2}{2(F - |P|)} \quad \text{Joule}$$

+

$$W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{F}}} + W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{P}}} = (F - |P|).\,\frac{m v_B^2 - m v_A^2}{2(F - |P|)} = \tfrac{1}{2}m v_B^2 - \tfrac{1}{2}m v_A^2 \quad \text{Joule}$$

Conclusie:

$$W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{F}}} + W_{\underset{A \to B}{\text{door }\vec{P}}} = \tfrac{1}{2}m v_B^2 - \tfrac{1}{2}m v_A^2 \quad \text{Joule}$$

Opmerkingen: a) Uit deze bewijsvoering blijkt wel heel duidelijk, dat de resulterende verandering van het A.v.B. van het massapunt in het beschouwde tijdsinterval, (dus $\tfrac{1}{2}mv^2_{\text{einde}} - \tfrac{1}{2}mv^2_{\text{begin}}$) gelijk is aan de

RESULTERENDE ARBEID

die ALLE op het massapunt werkende krachten in het beschouwde tijdsinterval GEZAMENLIJK hebben verricht: Bij de toepassing van deze natuurwet mag dus geen arbeid verrichtende kracht "vergeten worden".

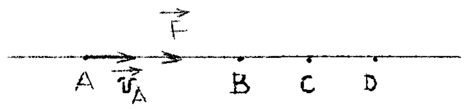
b) Met enkele bijkomstige teken-veranderingen is dit bewijs ook geldig voor de varianten op geval III waarbij $|P| > |F|$ of $\vec{P}$ en $\vec{F}$ EENZELFDE werkrichting hebben die gelijk gericht is met- of tegengesteld is aan de richting van vector $\vec{v}_A$.
In al deze gevallen vinden we, dat

$$W_{\text{door } \vec{F},\, A \to B} + W_{\text{door } \vec{P},\, A \to B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

c) Dit geval III kan uitgebreid worden tot het geval dat er n krachten op het massapunt werken waarvan de werklijnen samenvallen met de drager van de vector $\vec{v}_A$.
We vinden dan:

$$\sum W_{\text{n krachten},\, A \to B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Geval IV.



Gegeven: De beginsituatie is dezelfde als in geval I.
De kracht $\vec{F}$ blijft bij de beweging van het massa punt wel langs dezelfde lijn werken maar heeft op het baanstuk AB een andere grootte en richting als op het baanstuk BC en op BC weer een andere grootte en/of richting als op CD.

Te bewijzen:

$$W_{\text{door } \vec{F},\, A \to B \to C \to D} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

Bewijs: Uit de gevallen I en II volgt:

$$W_{\text{door } \vec{F},\, A \to B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

$$W_{\text{door } \vec{F},\, B \to C} = \tfrac{1}{2}mv_C^2 - \tfrac{1}{2}mv_B^2 \text{ Joule}$$

$$W_{\text{door } \vec{F},\, C \to D} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_C^2 \text{ Joule}$$

$+$ ―――――――――――――――――――――――――

$$W_{\text{door } \vec{F},\, A \to B \to C \to D} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

q.e.d.

Geval V.

Gegeven: De beginsituatie is dezelfde als in geval III.
Bij de beweging van het massapunt blijven de werklijnen van de krachten $\vec{P}$ en $\vec{F}$ samenvallen met de drager van vector $\vec{v}_A$, maar op het baanstuk AB hebben $\vec{P}$ en/of $\vec{F}$ andere grootten en eventueel ook andere richtingen dan op BC.
Idem voor BC en CD.

Te bewijzen:

$$W_{\text{door } \vec{F},\, A \to B \to C \to D} + W_{\text{door } \vec{P},\, A \to B \to C \to D} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

Bewijs:

Bewijs: Uit de gevallen I, II en III volgt voor de bewegingen

$$A \rightarrow B: \; W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

$$B \rightarrow C: \; W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_C^2 - \tfrac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{Joule}$$

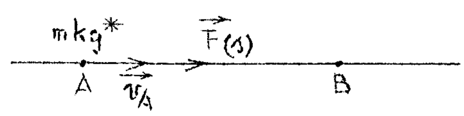
$$C \rightarrow D: \; W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_C^2 \quad \text{Joule}$$

$$+$$

$$\underset{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D}{W_{\text{door } \vec{F}}} + \underset{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D}{W_{\text{door } \vec{P}}} = \tfrac{1}{2}mv_D^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

q.e.d.

Geval VI.



Gegeven: In A heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_A$. Op het massapunt werkt een NIET CONSTANTE kracht $\vec{F}$ (S) waarvan de werklijn steeds samenvalt met de drager van $\vec{v}_A$. De arbeid die de kracht $\vec{F}$(S) verricht bij de beweging van het massapunt van A naar B moeten we dus berekenen door integreren:

$$\underset{A \rightarrow B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \int_A^B F(s)\, ds \text{ Joule} \qquad \text{(zie blz.178)}$$

Te bewijzen: $\underset{A \rightarrow B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$ Joule.

Bewijs: We verdelen het baanstuk AB in infinitesimaal kleine stukjes ΔS die zo klein zijn dat over elk van deze stukjes de kracht $\vec{F}$(S) als constant in grootte en richting kan beschouwd worden en passen voor deze stukjes de redenering van geval IV toe.

$$A \rightarrow D_1 \qquad W_{\text{door } \vec{F}} = \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

$$D_1 \rightarrow D_2 \qquad W_{\text{door } \vec{F}} = \tfrac{1}{2}mv_{D_2}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 \quad \text{Joule}$$

- -

$$D_{K-1} \rightarrow D_K \qquad W_{\text{door } \vec{F}} = \tfrac{1}{2}mv_{D_K}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_{K-1}}^2 \quad \text{Joule}$$

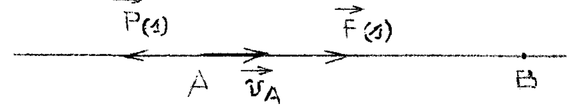
$$D_K \rightarrow B \qquad W_{\text{door } \vec{F}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_K}^2 \quad \text{Joule}$$

$$+$$

$$\int_A^B F(s)ds = \underset{A \rightarrow B}{W_{\text{door } \vec{F}}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

q.e.d.

Geval VII.



Gegeven: In A heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_A$. Op het massapunt werken twee veranderlijke krachten $\vec{F}$(s) en $\vec{P}$(s), waarvan de werklijnen op ieder ogenblik samenvallen met de drager van de vector $\vec{v}_A$.
In dit geval is dus:

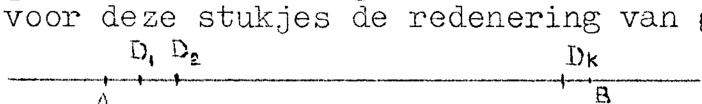
In dit geval is dus $W_{\text{door } \vec{F} \atop A \rightarrow B} = \int_A^B F(s)ds$ Joule

en $W_{\text{door } \vec{P} \atop A \rightarrow B} = \int_A^B P(s)ds$ Joule

Te bewijzen:

$$W_{\text{door } \vec{F} \atop A \rightarrow B} + W_{\text{door } \vec{P} \atop A \rightarrow B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Bewijs: We verdelen het baanstuk AB in infinitesimaal kleine stukjes die zo klein zijn, dat over elk van deze baanelementen $\vec{F}(s)$ EN $\vec{P}(s)$ als constant van grootte en richting kunnen beschouwd worden en passen voor deze stukjes de redenering van geval V toe.



$$A \rightarrow D_1 \quad W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule.}$$

$$D_1 \rightarrow D_2 \quad W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_{D_2}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 \quad \text{Joule.}$$

- -

$$D_{K-1} \rightarrow D_K \quad W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_{DK}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_{K-1}}^2 \quad \text{Joule.}$$

$$D_K \rightarrow B \quad W_{\text{door } \vec{F}} + W_{\text{door } \vec{P}} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_K^2 \quad \text{Joule.}$$

-- +

$$\int_A^B F(s)ds + \int_A^B P(s)ds =$$

$$W_{\text{door } \vec{F} \atop A \rightarrow B} + W_{\text{door } \vec{P} \atop A \rightarrow B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

q.e.d.

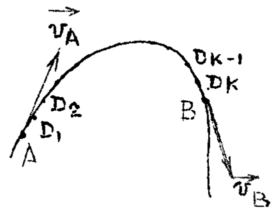
In de tot nu toe behandelde gevallen I t/m VII was de situatie zò, dat het massapunt een RECHTE BAAN beschreef (eventueel een halve rechte); ER WAREN DUS GEEN NORMALE KRACHTEN en de gegeven krachten HADDEN GEEN NORMALE COMPONENTEN.

We gaan nu het meest algemene geval beschouwen waarin er op het massapunt OOK NORMALE KRACHTEN werken (die dus loodrecht staan op de momentele snelheidsvector) en waarin er ook krachten op het massapunt werken die op ieder ogenblik zowel een normale als een tangentiële component hebben.
In de bewegingsleer hebben we gezien dat de normale krachten en de normale componenten van de gegeven krachten ALLEEN INVLOED HEBBEN OP DE VORM VAN DE BAAN, MAAR GEEN INVLOED HEBBEN OP DE GROOTTE VAN DE SNELHEIDSVECTOR VAN HET MASSAPUNT. In de theorie van de arbeid door een kracht verricht, hebben we gezien, dat DE NORMALE KRACHTEN EN DE NORMALE COMPONENTEN VAN GEGEVEN KRACHTEN BIJ DE BEWEGING VAN HET MASSAPUNT LANGS DE BAAN GEEN ARBEID VERRICHTEN.

Samenvattend: Bij een kromlijnige beweging WORDT DE PLAATSFUNCTIE LANGS DE BAAN (en dus ook de GROOTTE VAN DE SNELHEID op ieder ogenblik) ALLEEN BEPAALD DOOR DE TANGENTIELE KRACHTEN EN DE MOMENTELE TANGENTIËLE COMPONENTEN VAN DE GEGEVEN KRACHTEN, DE MASSA VAN HET MASSAPUNT, ZIJN BEGINSNELHEID EN DE BAANCOÖRDINAAT OP t = 0.
Bij een kromlijnige beweging VERRICHTEN ALLEEN DE TANGENTIELE KRACHTEN EN DE TANGENTIELE COMPONENTEN VAN DE GEGEVEN KRACHTEN ARBEID.

De bewijsvoeringen van de gevallen I t/m VII zijn dus onverkort geldig voor de kromlijnige beweging MITS we $\vec{F}(s)$ vervangen door $\vec{F}(s)_{tang}$ en $\vec{P}(s)$ door $\vec{P}(s)_{tang}$, en dit doen voor alle verder op het massapunt werkende krachten.

Geval VIII.



Gegeven: In het punt A van de ruimte heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_A$.
Op het massapunt werken n krachten die eventueel veranderlijk zijn van grootte en/of richting, en waarvan de werklijnen NIET samenvallen met de drager van de vector $\vec{v}_A$.
Onder invloed van deze krachten doorloopt het massapunt een bepaalde (mogelijk zeer grillige) kromlijnige baan volgens een bepaalde (moge-
lijk   lijk zeer ingewikkelde) plaatsfunctie. De snelheidsvector zal echter op ieder ogenblik in het momentele baanpunt raken aan de baan.
In het baanpunt B heeft het massapunt de snelheid $\vec{v}_B$.

Te bewijzen:

$$\underbrace{\Sigma W}_{\text{van alle krachten bij de bew. langs de kromme baan van } A \rightarrow B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule.}$$

Bewijs: We verdelen de kromme baan in infinitesimaal kleine stukjes, die zo klein zijn dat deze stukjes als recht kunnen beschouwd worden en alle tangentiële componenten van de krachten die op zo'n baanstukje op het massapunt werken constant zijn van grootte en richting langs het betrokken baanstukje.
Passen we nu voor de opvolgende baanstukjes te beginnen bij A en eindigend bij B, de redeneringen van geval V en VII toe, dan volgt:

$$A \rightarrow D_1 \quad W_{\text{door } \vec{F}_1} + W_{\text{door } \vec{F}_2} + \quad + W_{\text{door } \vec{F}_n} = \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

$$D_2 \rightarrow D_1 \quad W_{\text{door } \vec{F}_1} + W_{\text{door } \vec{F}_2} + \quad + W_{\text{door } \vec{F}_n} = \tfrac{1}{2}mv_{D_2}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_1}^2 \quad \text{Joule}$$

- -

$$D_{K-1} \rightarrow D_K \quad W_{\text{door } \vec{F}_1} + W_{\text{door } \vec{F}_2} + \quad + W_{\text{door } \vec{F}_n} = \tfrac{1}{2}mv_{D_K}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_{K-1}}^2 \quad \text{Joule}$$

$$D_K \rightarrow B \quad W_{\text{door } \vec{F}_1} + W_{\text{door } \vec{F}_2} + \quad + W_{\text{door } \vec{F}_n} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_{D_K}^2 \quad \text{Joule}$$

+ ____

$$\underbrace{\int_A^B F_1^{tang}(s)\,ds + \int_A^B F_2^{tang}\,ds + \quad + \int_A^B F_n^{tang}\,ds}_{\text{van alle krachten die bij de bew. langs de kromme baan van } A \rightarrow B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

$$\underbrace{\Sigma W}_{\text{van alle krachten die bij de bew. langs de kromme baan van } A \rightarrow B} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{Joule}$$

q.e.d.

EINDCONCLUSIE uit de gevallen I t/m VIII:

DE ALGEBRAISCHE SOM VAN ALLE HOEVEELHEDEN ARBEID die TIJDENS DE BEWEGING
van een massapunt in een bepaald tijdsinterval DOOR DE OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN WORDEN VERRICHT
IS GELIJK AAN
DE RESULTERENDE VERANDERING VAN HET A.v.B. VAN HET MASSAPUNT in het beschouwde tijdsinterval.

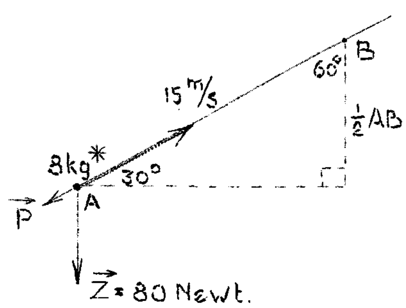
In formule:

In formule:

$$\underset{\text{door alle op het m.pt werkende krachten tijdens de beweging van het massapunt.}}{\Sigma W} = \tfrac{1}{2}mv^2_{EINDE} - \tfrac{1}{2}mv^2_{BEGIN} \text{ Joule.}$$

Deze conclusie staat bekend als DE WET VAN LEVENDE KRACHT EN ARBEID (of de wet van kinetische energie en arbeid.)

Opgave 45.



Gegeven: Een massapunt van 8 kg* wordt met een beginsnelheid van 15 m/sec. tegen een ruw hellend vlak (hellingshoek 30°) opgeworpen. Bij de beweging langs het vlak ondervindt het massapunt een wrijvingsweerstand $\vec{P}$ van 5 Newton.
g = 10 m/sec².

Gevraagd. a) Hoeveel meter legt het massa punt in stijgende richting langs het hellende vlak af?

Oplossing: Stel, dat de snelheid v.h. massapunt in B nul is.

ΣW	$\tfrac{1}{2}mv^2_{einde} - \tfrac{1}{2}mv^2_{begin}$
Bij de beweging van A→B verrichten slechts TWEE krachten arbeid, n.l.: $\vec{Z}$ en $\vec{P}$.	
$W_{\text{door } \vec{Z},\ A \to B} = -80.\tfrac{1}{2}AB = -40AB$ J.	$\tfrac{1}{2}mv^2_B = \quad = 0$
$W_{\text{door } \vec{P},\ A \to B} = -5.AB = -5AB$ J.	$\tfrac{1}{2}mv^2_A = \tfrac{1}{2}.8.15^2 = 900$ J.
(OP!) +	− (AF!)
$\Sigma W = -45AB$ J.	$\tfrac{1}{2}mv^2_{einde} - \tfrac{1}{2}mv^2_{begin} = -900$ J.

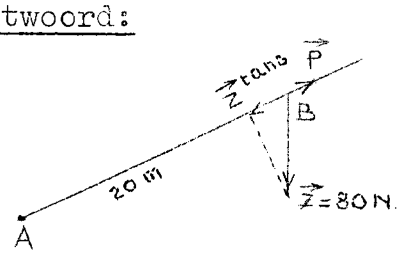
Volgens de wet van Levende Kracht en Arbeid is dus:

=

Dus AB = 20 meter.

Gevraagd: b) Zal het massapunt in B stil blijven liggen of zal het vanuit B langs het hellende vlak naar beneden glijden?

Antwoord:



De tangentiële component van $\vec{Z}$ is langs het vlak naar beneden gericht en 40 Newt. groot.
Was het vlak glad, dan zou het massapunt dus zonder meer naar beneden glijden.

Nu het vlak ruw is, zal de wrijvingskracht $\vec{P}$ het naar beneden glijden dus tegenwerken: ZODRA HET MASSAPUNT IN B TOT STILSTAND GEKOMEN IS ZAL DE WRIJVINGSKRACHT $\vec{P}$ DUS OMKEREN EN LANGS HET VLAK NAAR BOVEN GERICHT ZIJN.

De grootte van $\vec{P}$ is echter slechts 5 Newton: De wrijvingskracht $\vec{P}$ kan $\vec{Z}_{tang}$ dus NIET IN EVENWICHT HOUDEN.

Conclusie: Het massapunt zal vanuit B langs het hellende vlak naar beneden glijden.

Gevraagd: c) Met welke snelheid komt het massapunt in A terug?

Oplossing:

ΣW | $\frac{1}{2}mv^2_{einde} - \frac{1}{2}mv^2_{begin}$

Bij de beweging van B naar A verrichten alleen $\vec{Z}$ en $\vec{P}$ arbeid.

$W_{\text{door } \vec{Z},\ B \to A} = + 40.20 = + 800$ J. $\qquad \frac{1}{2}mv^2_{einde} = \frac{1}{2}.8.v_A^2$ Joule

$W_{\text{door } \vec{P},\ B \to A} = - 5.20 = - 100$ J. $\qquad \frac{1}{2}mv^2_{begin} = 0$ Joule

$\Sigma W = + 700$ J. $\qquad \frac{1}{2}mv^2_{einde} - \frac{1}{2}mv^2_{begin} = 4v_A^2$ Joule

Dus: $+ 700 = 4v_A^2$

$|v_A| = 5\sqrt{7}$ m/sec.

Uit de situatie in de opgave volgt, dat deze snelheid langs het vlak naar beneden gericht is.

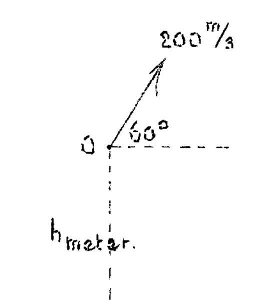
Vraag. Moet hier niet staan $v_A = - 5\sqrt{7}$ m/sec. De snelheid is toch langs het vlak naar beneden gericht?

Antw.: De wet van Levende Kracht en Arbeid leert ons alleen hoe groot het A.v.B. in het baanpunt A is; ze zegt echter niets OVER DE RICHTING VAN DE SNELHEID.

Conclusie: Met behulp van de wet van Levende Kracht en Arbeid kan men alleen DE GROOTTE VAN DE SNELHEIDSVECTOR in een bepaald baanpunt bepalen.

Opmerking: We hadden de antwoorden op de vragen a) en c) ook kunnen vinden door de plaatsfuncties langs de baan op te stellen.
De oplossing zou dan echter veel omslachtiger geweest zijn: we zouden dan de (niet gevraagde) tijdsduren moeten uitrekenen die het massapunt nodig heeft om van A naar B en van B naar A te gaan.
Het verdient aanbeveling om bij de sommen altijd even na te gaan of deze niet met de wet van Levende Kracht en Arbeid kunnen opgelost worden.

Opgave 46. Gegeven: Een kogel (m kg*) wordt vanuit een punt O op een hoogte van h meter boven de grond met een beginsnelheid van 200 m/sec. onder een elevatiehoek van 60° opgeschoten. g = 10 m/sec².



Gevraagd: a) De maximale hoogte boven O.

Oplossing: In de top van de parabool is v = 100 m/sec.

Dus:

$$-m.10Y_{max} = \tfrac{1}{2}.m(100)^2 - \tfrac{1}{2}m.(200)^2$$

Beide leden door m delen:

$$- 10Y_{max} = 5000 - 10000 = - 5000$$

$$Y_{max} = 500 \text{ meter.}$$

Opmerking: De massa van de kogel doet dus niets ter zake!

Gevraagd: b) Op welke hoogte bevindt O zich boven de grond als de kogel de grond treft met een snelheid van 210 m/sec.

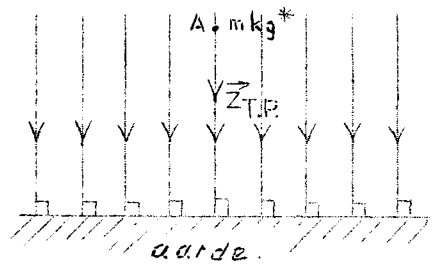
Oplossing: $+ m.10.h = \frac{1}{2}.m(210)^2 - \frac{1}{2}.m(200)^2$

$$10\ h = \tfrac{1}{2}\ (210 + 200)\ (210 - 200)$$

$$10\ h = \tfrac{1}{2}.410.10 \qquad h = 205 \text{ meter.}$$

Deel III van § 6: ARBEIDSVERMOGEN VAN PLAATS (A.v.P.) IN HET ZWAARTEKRACHTVELD.

Punt 1) Het begrip ZWAARTEKRACHTVELD.



Ieder lichaam op of boven de aarde ondervindt een verticaal naar het aardoppervlak toe gerichte zwaartekracht $\vec{Z}_{T.P.}$, die in grootte gelijk is aan:

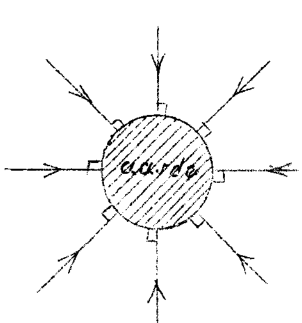
$$\boxed{Z_{T.P.} = mg_{T.P.} \text{ Newton.}}$$

Men drukt dit uit door te zeggen DAT DE AARDE OMGEVEN IS DOOR EEN ZWAARTEKRACHTVELD.
De term VELD is een verbastering van het Engelse woord FIELD, dat in dit verband RUIMTE betekent, n.l. de ruimte om de aarde waarin de zwaartekracht werkzaam is.

Definitie: Onder het ZWAARTEKRACHTVELD verstaat men DE RUIMTE om de aarde waarbinnen de zwaartekracht $\vec{Z}_{T.P.} = mg_{T.P.}$ Newton op een massapunt werkt.

De zwaartekracht $\vec{Z}_{T.P.}$ noemt men in dit verband ook wel DE VELDKRACHT TER PLAATSE OP HET MASSAPUNT.

Opmerkingen: a) Voor een klein gebied in het zwaartekrachtveld mag men aannemen dat de veldlijnen (dit zijn de lijnen die de richting aangeven waarin de zwaartekracht werkt) ONDERLING EVENWIJDIG LOPEN (zie bovenstaande figuur.)



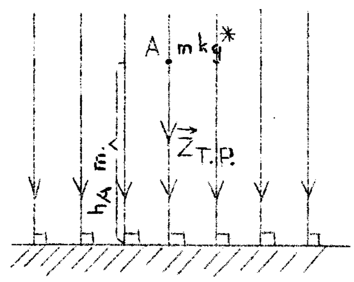
In nevenstaande figuur zijn de veldlijnen van het hele zwaartekrachtveld getekend in de veronderstelling dat de aarde een bol is die zich eenzaam in de ruimte bevindt: De veldlijnen zijn dan rechte lijnen die vanuit het oneindige straalsgewijs (radiaal) naar het aardoppervlak toelopen en het aardoppervlak dus loodrecht treffen: het zwaartekrachtveld is dan een z.g. RADIAAL veld.
In de komende theorie zullen wij steeds aannemen dat de veldlijnen van het zwaartekrachtveld onderling evenwijdige rechte lijnen zijn loodrecht op het aardoppervlak.
Bovendien zullen we aannemen dat $g_{T.P.}$ niet afhangt van de hoogte boven het aardoppervlak.
In onze beschouwing heeft de veldkracht $\vec{Z}_{T.P.} = mg_{T.P.}$ Newton voor een gegeven massapunt dus in ieder punt van het zwaartekrachtveld dezelfde grootte en richting.
Een krachtveld waarin de veldkracht op eenzelfde lichaam in ieder punt dezelfde grootte en richting heeft, noemt men een HOMOGEEN krachtveld.

<u>In de komende theorie zullen we dus steeds veronderstellen dat het zwaartekrachtveld een HOMOGEEN veld is.</u>
Deze theorie kan echter gemakkelijk uitgebouwd worden voor een radiaal krachtveld.

b) We zullen in de natuurkunde nog andere krachtvelden leren kennen b.v. het magnetisch veld van een staafmagneet, het electrisch veld van een geladen condensator, het krachtveld om een molecuul (ga, blijf, kom!) enz.
In het algemeen behoeven de veldlijnen van een krachtveld niet recht te zijn!

Punt 2) Probleem.

Gegeven: Een massapunt (m kg*) bevindt zich in A op een hoogte van h_A meter boven de grond en wordt in A vastgehouden.



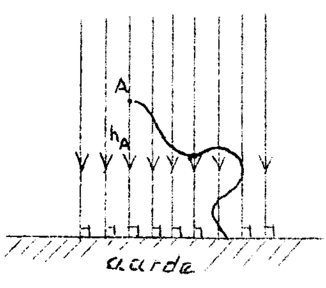
Gevr. a) Hoeveel arbeid hebben wij OP DE ZWAARTEKRACHT moeten verrichten om het massapunt vanaf de grond naar het punt A te brengen?

Oplossing: $W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ \text{grond} \to A}} = - mg_{T.P.} \cdot h_A$ Joule

Wij hebben dus bij dit transport OP de zwaartekracht de POSITIEVE ARBEID moeten verrichten van $+ mg_{T.P.} \cdot h_A$ Joule.

Gevraagd: b) Doet het hierbij iets ter zake langs welke weg we het massapunt vanaf de grond naar A toe gebracht hebben?

Antwoord:



Bij het transport van het massapunt vanaf de aarde naar het punt A is de goniometrische projectie van de resulterende verplaatsingsvector op de werkrichting van de zwaartekracht ongeacht de gevolgde baan gelijk aan $- h_A$ meter.
Bij dit transport verricht de constant gedachte zwaartekracht $\vec{Z}_{T.P.}$ dus steeds de negatieve arbeid $-mg_{T.P.} \cdot h_A$ Joule en moeten wij steeds OP de zwaartekracht de positieve arbeid van $+ mg_{T.P.} \cdot h_A$ Joule verrichten.

Conclusie: Met betrekking tot de hoeveelheid arbeid die wij OP DE ZWAARTEKRACHT moeten verrichten om het massapunt vanaf de aarde naar het punt A te brengen DOET DE GEVOLGDE WEG DUS NIETS TER ZAKE.

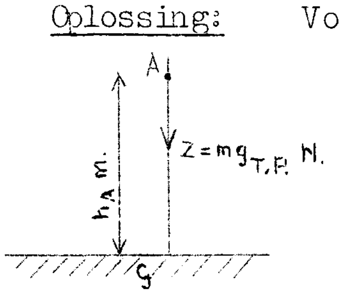
Opmerking. Het volgende leerjaar, als het integreren in de wiskunde behandeld is, zullen we inzien dat deze stelling ook geldig is in het radiale zwaartekrachtveld.

Gevraagd: c) Wat zal er gebeuren als het massapunt in A wordt losgelaten?

Antwoord: Dan zal het massapunt vrij vallen en dus o.i.v. de zwaartekracht $\vec{Z}_{T.P.}$ een eenparig versnelde rechtlijnige beweging zonder beginsnelheid gaan uitvoeren langs de veldlijn door A.

Gevraagd: d) Bereken het A.v.B. waarmee het massapunt op de grond aankomt.

Oplossing: Volgens de Wet van Levende Kracht en Arbeid is:

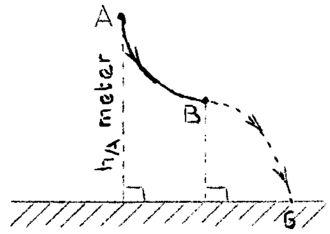


$$W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ A \longrightarrow G}} = \tfrac{1}{2}mv_G^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

Dus: $+ mg_{T.P.} \cdot h_A = \frac{1}{2}mv_{grond}^2 - 0$ Joule

$$\boxed{\text{Dus: } \tfrac{1}{2}mv_{grond}^2 = mg_{T.P.} \cdot h_A \text{ Joule.}}$$

Gevraagd: e) In nevenstaande figuur is AB een cirkelvormige volkomen gladde goot. Men laat het massapunt (m kg*) in A los, zodat het van A tot B de goot volgt, in B de goot verlaat en dan via een kogelbaan de grond in G bereikt.



Met welk A.v.B. komt het massapunt nu in G aan?

Oplossing: Bij deze beweging van het massapunt verricht alleen de zwaartekracht arbeid.

Volgens de wet van Levende Kracht en Arbeid is:

$$W_{\text{door } \vec{Z} \atop A \to B \to G} = \tfrac{1}{2}mv_G^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule}$$

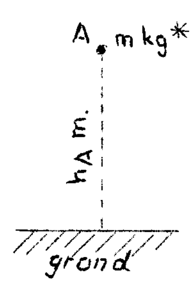
Dus: $$+ m.g_{T.P.}.h_A = \tfrac{1}{2}mv_G^2 - 0 \text{ Joule}$$

Dus: $$\boxed{\tfrac{1}{2}mv^2_{grond} = mg_{T.P.}.h_A \text{ Joule}}$$

Conclusie: MITS DE ZWAARTEKRACHT DE ENIGE KRACHT IS DIE BIJ "DE VAL" VAN HET MASSAPUNT ARBEID VERRICHT, doet de VORM van de gevolgde weg van A naar de aarde niets ter zake: Het massapunt treft de grond dan altijd met het A.v.B. van $m.g_{T.P.}.h_A$ Joule.

NB. Gevraagd: f) HAD HET MASSAPUNT, TOEN HET NOG IN HET PUNT A VAN HET ZWAARTEKRACHTVELD VASTGEHOUDEN WERD, ARBEIDSVERMOGEN?

Dit is de kwestie waar het ons in het onderhavige deel III van § 6 eigenlijk om gaat!



Antwoord: Een massapunt in rust is niet in staat om een op dit massapunt werkende kracht te dwingen haar aangrijpingspunt tegen haar werkrichting in te verplaatsen. Men zou dus geneigd zijn om te denken dat het massapunt dat in A vastgehouden wordt, geen arbeidsvermogen heeft.
Die mening zou de situatie waarin het massapunt in A verkeert echter niet juist weergeven:
DAAR A n.l. EEN PUNT VAN HET ZWAARTEKRACHTVELD IS ZAL HET MASSAPUNT, ZODRA HET IN A WORDT LOSGELATEN, onder invloed van de veldkracht gaan bewegen en als gevolg van de arbeidsverrichting door de veldkracht A.v.B. GAAN KRIJGEN.
Het gaat ons nu om dit GAAN KRIJGEN van A.v.B.: Het zwaartekrachtveld heeft a.h.w. een heel bepaalde hoeveelheid A.v.B. voor het zich in A bevindend massapunt "IN PETTO".
ALS HET MASSAPUNT OP DE GROND AANKOMT HEEFT HET IN TOTAAL VAN HET ZWAARTEKRACHTVELD EEN ARBEIDSVERMOGEN VAN BEWEGING GEKREGEN VAN $mg_{T.P.}.h_A$ Joule.

IN HET PUNT A VAN HET ZWAARTEKRACHTVELD HEEFT HET MASSAPUNT DUS DE POTENTIE (= vermogen of aanleg) OM VAN DIT ZWAARTEKRACHTVELD EEN A.v.B. TE KRIJGEN VAN $mg_{T.P.}h_A$ Joule.

CONCLUSIE: TOEN HET MASSAPUNT NOG IN HET PUNT A VAN HET ZWAARTEKRACHTVELD WERD VASTGEHOUDEN HAD HET GEEN WERKZAAM ARBEIDSVERMOGEN, MAAR WEL EEN ARBEIDSVERMOGEN-IN-AANLEG VAN $mg_{T.P.}.h_A$ Joule.

Het begrip ARBEIDSVERMOGEN-IN-AANLEG is voor ons geheel nieuw. Men noemt dit arbeidsvermogen POTENTIELE ENERGIE of ARBEIDSVERMOGEN van PLAATS.
Deze termen betekenen hetzelfde, maar ze brengen ieder iets anders nadrukkelijk onder de aandacht:

De term POTENTIËLE ENERGIE legt de nadruk op het feit, dat "HET IN STAAT ZIJN OM WERKELIJK ARBEID TE VERRICHTEN" NOG SLECHTS IN POTENTIE (= IN AANLEG) AANWEZIG IS, EN DAT ER NOG EERST IETS ANDERS MOET GEBEUREN ALVORENS DIT ARBEIDSVERMOGEN ZICH KAN MANIFESTEREN. Het massapunt op de hoogte van h meter boven de grond, heeft de POTENTIELE ENERGIE van $mg_{T.P.}$ h Joule, maar het moet nog eerst op de aarde vallen alvorens het in de toestand komt waarin het werkelijk $mg_{T.P.}$ h Joule arbeid kan verrichten.

⟶ De term ARBEIDSVERMOGEN VAN PLAATS legt de nadruk op het feit, dat het massapunt dit arbeidsvermogen-in-aanleg te danken heeft AAN DE PLAATS die het IN EEN KRACHTVELD inneemt.
Het massapunt op de hoogte van h meter boven de grond heeft een A.v.P. van $mg_{T.P.}$ h Joule doordat het zich IN HET ZWAARTEKRACHTVELD op de hoogte van h meter boven de grond bevindt en dus van het zwaartekrachtveld een A.v.B. kan krijgen van $mg_{T.P.}$ h Joule.

CONCLUSIE: DANK ZIJ HET BESTAAN VAN HET (homogene) ZWAARTEKRACHTVELD HEEFT EEN MASSAPUNT VAN m kg OP EEN HOOGTE VAN h meter BOVEN DE GROND
EEN POTENTIELE ENERGIE OF ARBEIDSVERMOGEN VAN PLAATS
VAN
$m.g_{T.P.}$ h Joule

Punt 3) De definitie van het A.v.P. of de Potentiële energie van een massapunt in het zwaartekrachtveld.

Definitie: Onder het A.v.P. of de POTENTIELE ENERGIE van een massapunt in het zwaartekrachtveld verstaat men de hoeveelheid arbeid die door de zwaartekracht verricht wordt als het massapunt vanaf zijn plaats in het veld naar het aardoppervlak beweegt.
De grootte van dit A.v.P. is $mg_{T.P.}$ h Joule.

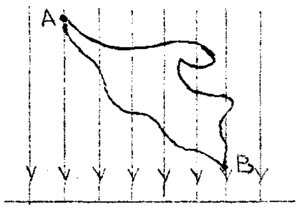
Daar deze hoeveelheid arbeid altijd gelijk is aan de hoeveelheid arbeid die WIJ OP de zwaartekracht moeten verrichten om het massapunt vanaf het aardoppervlak naar die plaats in het zwaartekrachtveld te brengen, kunnen we het A.v.P. ook aldus definiëren:

Definitie: Onder het A.v.P. of de POTENTIELE ENERGIE van een massapunt in het zwaartekrachtveld verstaat men de hoeveelheid arbeid die WIJ OP de zwaartekracht moeten verrichten om het massapunt vanaf het aardoppervlak naar deze plaats in het zwaartekrachtveld te brengen.

Opmerking.

Zie blz. 203.

Opmerking:



Beweegt een massapunt in het zwaartekrachtveld van A ⟶B dan is

$$W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ A \longrightarrow B}} = + m.g._{T.P.}(h_A - h_B) \text{ Joule.}$$

$$= mg_{T.P.}h_A - mg_{T.P.}h_B \text{ Joule}$$

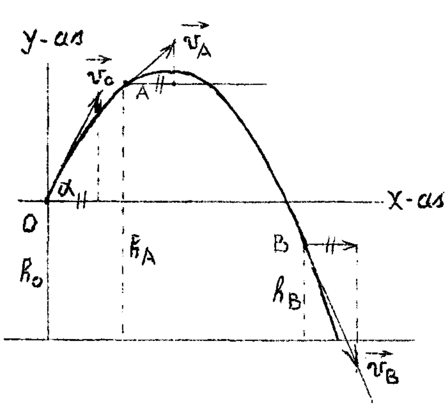
$$= (A.v.P.)_{in\ A} - (A.v.P.)_{in\ B} \text{ J.}$$

$W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ A \longrightarrow B}}$ hangt dus NIET af van de VORM van de weg die het massapunt gevolgd heeft om van A in B te komen.

Benaming: Een krachtveld waarin de arbeid, die de veldkracht verricht als deze haar aangrijpingspunt van een veldpunt A naar een veldpunt B verplaatst, NIET afhangt van de vorm van de baan A ⟶B, noemt men EEN CONSERVATIEF KRACHTVELD.
Het (homogene) zwaartekrachtveld is dus een CONSERVATIEF krachtveld. Dit geldt ook voor een radiaal zwaartekracht veld.

Deel IV van § 6. DE WET VAN BEHOUD VAN MECHANISCHE ENERGIE IN HET ZWAARTEKRACHTVELD.

Punt 1) De kogelbaan o.i.v. de zwaartekracht ALLEEN.



Gegeven: Een kogel (m kg*) wordt van uit een punt O op een hoogte van h_o meter boven de grond met een beginsnelheid $\vec{v}_o$ m/sec. opgeschoten onder een elevatiehoek α. Op de kogel werkt geen andere kracht dan de zwaartekracht.
A en B (zie fig.) zijn twee willekeurige punten van de kogelbaan.

Gevraagd: a) Pas de wet van Levende KRACHT en Arbeid toe op de beweging voor het tijdsinterval dat de kogel van A ⟶B gaat.

Oplossing: Bij de beweging van de kogel van A ⟶B verplaatst de zwaarte kracht haar aangrijpingspunt ($h_A - h_B$) meter in haar werkrichting en verricht daarbij dus de arbeid

$$W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ A \longrightarrow B}} = + m.g_{T.P.}.(h_A - h_B) \text{ Joule.}$$

Daar $\vec{Z}$ de enige kracht is die bij deze beweging arbeid verricht, volgt:

$$+ mg_{T.P.}(h_A - h_B) = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule} \qquad (1)$$

Gevraagd: b) Wat volgt uit deze vergelijking?

Antwoord: Uit deze vergelijking volgt:

$$+ mg_{T.P.}h_A - mg_{T.P.}h_B = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \text{ Joule.}$$

Dus:

$$+ mg_{T.P.}h_A + \tfrac{1}{2}mv_A^2 = + mg_{T.P.}h_B + \tfrac{1}{2}mv_B^2 \text{ J.} \qquad (2)$$

Dus:

$$(A.v.P.)_{in\ A} + (A.v.B.)_{in\ B} =$$

$$(A.v.P.)_{in\ B} + (A.v.B.)_{in\ B} \qquad (3)$$

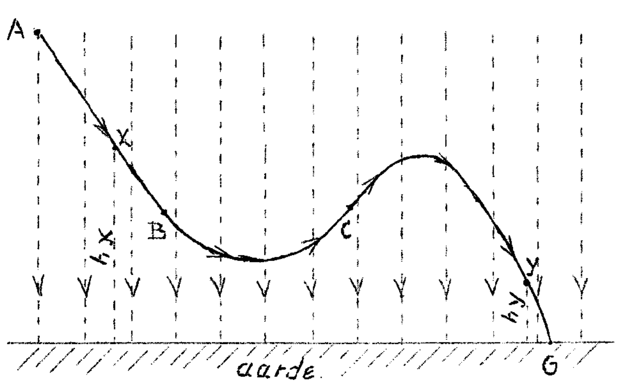
Benaming: De som (A.v.P.) + (A.v.B.) van een massapunt op een bepaald ogenblik noemt men DE MECHANISCHE ENERGIE van dit massapunt op dit ogenblik.

Vergelijking (3) zegt dus:

De mechanische energie van de kogel in het willekeurige baanpunt A.	=	De mechanische energie van de kogel in het willekeurige baanpunt B.

Conclusie: Bij een kogelbaan o.i.v. DE ZWAARTEKRACHT ALLEEN blijft DE MECHANISCHE ENERGIE van de kogel CONSTANT.

Punt 2) Bewegingen van een massapunt in het zwaartekrachtveld WAARBIJ DE ZWAARTEKRACHT DE ENIGE KRACHT IS DIE ARBEID VERRICHT.



Nevenstaande figuur wil het geval voorstellen waarin een massapunt een willekeurige baan beschrijft in het zwaarte krachtveld WAARBIJ DE ZWAARTE KRACHT DE ENIGE KRACHT IS DIE A R B E I D V E R R I C H T.

Van A $\rightarrow$ B glijdt het massapunt langs een VOLKOMEN GLAD hellend vlak; in B komt het terecht in een volkomen gladde cirkelvormige goot BC; in C verlaat het massapunt deze goot en bereikt via een kogelbaan in G de grond.

X en Y zijn twee willekeurige punten van de baan ABCG.

Bewering: $(A.v.P.) + A.v.B.)_{in\ X} = (A.v.P. + A.v.B.)_{in\ Y}$

Bewijs: We passen de wet van Levende Kracht en Arbeid toe voor de beweging van $X \rightarrow C \rightarrow Y$.
Bij deze beweging verplaatst de zwaartekracht haar aangrijpingspunt over het stuk $(h_X - h_Y)$ meter in haar werkrichting, en verricht daarbij dus de arbeid:

$$W_{\substack{\text{door } \vec{Z} \\ X \rightarrow C \rightarrow Y}} = + mg_{T.P.} . (h_X - h_Y) \text{ Joule}$$

Daar de zwaartekracht de enige kracht is die bij deze beweging arbeid verricht, volgt:

$$+ mg_{T.P.}(h_X - h_Y) = \tfrac{1}{2}mv_Y^2 - \tfrac{1}{2}mv_X^2 \quad \text{Joule}$$

dus
$$+ mg_{T.P.}h_X - mg_{T.P.}h_Y = \tfrac{1}{2}mv_Y^2 - \tfrac{1}{2}mv_X^2 \quad \text{Joule}$$

Dus:
$$m.g._{T.P.}h_X + \tfrac{1}{2}mv_X^2 = m.g._{T.P.}h_Y + \tfrac{1}{2}mv_Y^2$$

Dus
$$(A.v.P. + A.v.B.)_{in\ X} = (A.v.P. + A.v.B.)_{in\ Y}$$

q.e.d.

Met nadruk wijzen we er op, dat dit bewijs (en dus ook de bewering) alleen geldig is in de uitdrukkelijke veronderstelling DAT DE ZWAARTEKRACHT DE E N I G E KRACHT IS DIE

BIJ DE BESCHOUWDE BEWEGING ARBEID VERRICHT; de concrete vorm van de baan speelt in het bewijs geen rol.
In het geval dat $h_X < h_Y$ verricht de zwaartekracht bij de beweging van $X \rightarrow Y$ de negatieve arbeid:

$$- mg_{T.P.}(h_Y - h_X) \text{ Joule}$$

We komen dan tot hetzelfde eindresultaat.

EINDCONCLUSIE: MITS DE ZWAARTEKRACHT DE ENIGE KRACHT IS DIE ARBEID VERRICHT, BLIJFT BIJ IEDERE BEWEGING VAN EEN MASSAPUNT IN HET ZWAARTEKRACHTVELD DE MECHANISCHE ENERGIE VAN HET MASSAPUNT CONSTANT.

Deze conclusie staat bekend als DE WET VAN BEHOUD VAN MECHANISCHE ENERGIE IN HET ZWAARTEKRACHTVELD.

Punt 3) Getallenvoorbeeld.

Gegeven: In de fig. op blz. 204 is $h_A = 1,4$ meter; $h_C = 0,6$ meter. $g_{T.P.} = 10\ ^m/sec^2$.

Gevr.: De grootte van $\vec{v}_C$

Oplossing: $(A.v.P. + A.v.B.)_{in\ A} = (A.v.P. + A.v.B.)_{in\ C}$

Dus: $m.10.1,4 + 0 = m.10.0,6 + \frac{1}{2}mv_C^2$

Dus: $14\ m = 6\ m + \frac{1}{2}mv_C^2$

$8\ m = \frac{1}{2}mv_C^2$

Beide leden door m delen: de grootte van m doet niets ter zake.

$v_C^2 = 16$

$|v_C| = 4\ ^m/sec.$

$\vec{v}_C$ raakt in het punt C aan de goot.

Uit dit voorbeeld zien we, dat deze wet ons wel eens "goede diensten" kan bewijzen.

Punt 4) Opmerkingen:

a) Met behulp van de hogere wiskunde is het gemakkelijk te bewijzen dat de wet van behoud van mechanische energie ook geldig is in het radiale zwaartekrachtveld.

b) Met nadruk wijzen we er nogmaals op dat de wet van behoud van mechanische energie alleen geldig is als de zwaartekracht de ENIGE kracht is die bij de beweging van het massapunt arbeid verricht.

We zullen dit toelichten aan de hand van het in punt 2) getekende geval waarbij we dan aannemen dat het hellende vlak AB ruw is, zodat de wrijvingsweerstand ook arbeid verricht.

Gegeven: In fig. punt 2) is $h_A = 1,4$ meter; $h_C = 0,6$ m. AB = 1,0 meter; m = 20 kg*; het massapunt ondervindt bij de beweging langs AB een wrijvingsweerstand $\vec{F}$ van 120 Newton. $g_{T.P.} = 10\ ^m/sec^2$.

Gevr.: $|v_C|$

Oplossing:

Oplossing: We passen de wet van Levende Kracht en Arbeid toe op de beweging van het massapunt van $A \rightarrow C$.

ΣW	$\frac{1}{2}mv^2_{einde} - \frac{1}{2}mv^2_{begin}$
Bij de beweging van $A \rightarrow C$ verrichten $\vec{Z}$ en $\vec{P}$ arbeid.	
$W_{\text{door } \vec{Z},\ A \rightarrow C} = +20.10.(1,4-0,6) = +160$ J.	$\frac{1}{2}mv^2_{einde} = \frac{1}{2}.20.v_C^2 = 10\ v_C^2$ Joule
$W_{\text{door } \vec{P},\ A \rightarrow B} = -120.1 = -120$ J.	$\frac{1}{2}mv^2_{Begin} = \frac{1}{2}.20.v_A^2 = 0$ Joule
+	−
$\Sigma W_{A \rightarrow B \rightarrow C} = +\ 40$ J.	$\frac{1}{2}mv^2_{einde} - \frac{1}{2}mv^2_{begin} = 10\ v_C^2$ Joule

Dus:

$$+\ 40 = 10 v_C^2$$

$$\underline{\underline{|v_C| = 2\ {}^{m}/sec.}}$$

Welnu:

$$\left.\begin{array}{l} (A.v.P. + A.v.B.) \text{ in } A = +\ 20.10.1,4 = 280 \text{ Joule} \\ (A.v.P. + A.v.B.) \text{ in } C = +\ 20.10.0,6 + \frac{1}{2}.20.4 = \\ \qquad = 120 + 40 = 160 \text{ Joule.} \end{array}\right\}$$

Het massapunt verliest dus bij de beweging van $A \rightarrow C$ 120 J. aan mechanische energie. Deze energie heeft het massapunt nodig gehad om arbeid op de wrijvingskracht te verrichten. Deze verloren mechanische energie vinden we terug in de vorm van wrijvingsWARMTE.

Samenvatting van § 6.

Deel I. A.v.B. = $\frac{1}{2}mv^2$ Joule.

Deel II. De wet van Levende Kracht en Arbeid.

$$\underset{\substack{\text{door alle op} \\ \text{het massapunt} \\ \text{werkende krach-} \\ \text{ten tijdens de} \\ \text{besch. beweging}}}{\Sigma W} = \left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{EINDE} - \left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{BEGIN} \text{ Joule.}$$

Deel III. A.v.P. in het zwaartekrachtveld = $mg_{T.P.}.h$ Joule.

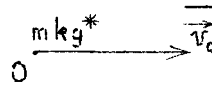
Deel IV. Mits de zwaartekracht de enige kracht is die arbeid verricht, geldt in het zwaartekrachtveld de wet van behoud van mechanische energie.

Henric van Veldeke College.
Maastricht.

§ 7. IMPULS EN HOEVEELHEID BEWEGING.

Deel I van § 7: De begrippen IMPULS VAN EEN KRACHT IN EEN TIJDSDUUR en DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN EEN MASSAPUNT.

Punt 1) Een massapunt onder invloed van ÉÉN ENKELE CONSTANTE KRACHT.



Gegeven: Een massapunt met massa m kg* beweegt ergens in de ruimte ONDER INVLOED VAN ÉÉN ENKELE KRACHT $\vec{F}$ DIE CONSTANT IS IN GROOTTE EN RICHTING.

Ten tijde t = 0 bevindt het massapunt zich in het punt 0 van die ruimte en heeft dan de snelheid $\vec{v}_0$ m/sec.
Met betrekking tot de kracht $\vec{F}$ zijn er DRIE GEVALLEN mogelijk:

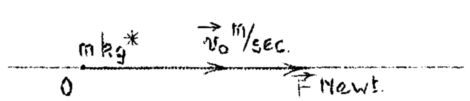
Geval I) De richting van $\vec{F}$ VALT SAMEN met de richting van $\vec{v}_0$.

Geval II) De richting van $\vec{F}$ IS TEGENGESTELD AAN de richting van $\vec{v}_0$.

Geval III) De richting van $\vec{F}$ maakt een hoek φ met de richting van $\vec{v}_0$.

Gevraagd: Bepaal in elk van deze gevallen de grootte en richting van de vector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$, waarin t_1 en t_2 twee willekeurige tijdstippen zijn die volgen op t = 0; $t_2 > t_1$.

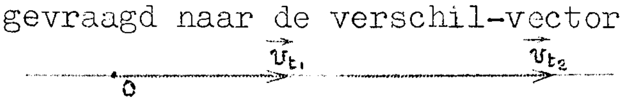
Oplossing voor Geval I.



Omdat de richting van $\vec{F}$ samenvalt met de richting van $\vec{v}_0$, voert het massapunt een eenparig versnelde rechtlijnige beweging uit met versnelling
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \ \mathrm{m/sec^2}.$$

Nemen we 0 tot oorsprong van het coördinatenstelsel en de richting van $\vec{v}_0$ als de positieve richting van het coördinatenstelsel langs de baan, dan wordt de snelheidsfunctie van het massapunt gegeven door de vergelijking:
$$v_t = v_0 + \frac{F}{m}\, t \ \mathrm{m/sec}.$$

Er werd gevraagd naar de verschil-vector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$, dus naar de vector van de snelheidsverandering T.O.V. HET BEWEGINGSVLAK in het tijdsinterval van $t_1 \to t_2$ sec., dus naar de vector die we bij $\vec{v}_{t_1}$ moeten optellen om vector $\vec{v}_{t_2}$ te krijgen.



Welnu: OMDAT DE BAAN RECHT IS, kan dit vectorverschil ALGEBRAÏSCH bepaald worden. We vinden:

1°) DE GROOTTE van de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ is gelijk aan $|v_{t_2} - v_{t_1}|$ m/sec.

$$v_{t_2} = v_0 + \frac{F}{m}\, t_2 \ \mathrm{m/sec.}$$
$$v_{t_1} = v_0 + \frac{F}{m}\, t_1 \ \mathrm{m/sec.}$$
$$v_{t_2} - v_{t_1} = +\frac{F}{m}(t_2 - t_1) \ \mathrm{m/sec.}$$

DE GROOTTE van de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ is dus $\frac{F}{m}(t_2 - t_1)$ m/sec.

2°) DE RICHTING van $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ wordt bepaald door het TEKEN van het algebraisch verschil $v_{t_2} - v_{t_1}$.

Is dit teken + , dan wijst de verschilvector in + richting.
Is dit teken - , dan wijst de verschilvector in - richting.

Omdat F + is en $t_2 > t_1$, is het teken van $v_{t_2} - v_{t_1}$ dus altijd +

DE VERSCHILVECTOR $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ heeft dus dezelfde richting als de krachtvector $\vec{F}$.

CONCLUSIE VOOR GEVAL I.

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)}\ {}^{m}/sec.$$

Hierin is $\overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)}$ een vector waarvan de grootte

gelijk is aan $\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1)\ {}^{m}/sec.$ en de richting samenvalt met de richting van de kracht $\vec{F}$.

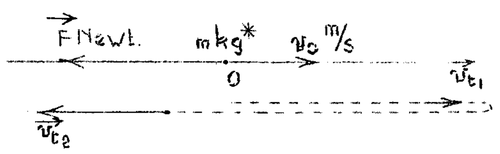
Deze vector heeft inderdaad de dimensie $^{m}/sec$, immers:

$$\left[\frac{F}{m}(t_2 - t_1)\right] = \frac{kg^{*}.{}^{m}/sec^2}{kg^{*}} .sec. = {}^{m}/sec.$$

Deze vector is dus een snelheidsvector, n.l. de vector van de snelheidsverandering in het tijdsinterval van $t_1 \rightarrow t_2$ sec.

→ Oplossing voor Geval II:

De richting van $\vec{F}$ is tegengesteld aan die van $\vec{v}_0$.



Het massapunt voert nu een eenparig vertraagde rechtlijnige beweging uit met vertraging $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\ {}^{m}/sec^2$.

Nemen we weer O tot oorsprong van het coördinatenstelsel langs de baan en de richting van $\vec{v}_0$ tot de positieve richting, dan wordt de snelheidsfunctie van het massapunt gegeven door de vergelijking:

$$v_t = v_o - \frac{|F|}{m} t\ {}^{m}/sec.$$

Er werd gevraagd naar de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ $^{m}/sec.$
De baan van het massapunt is nu EEN HALVE RECHTE. De gevraagde verschilvector kan nu dus ook ALGEBRAÏSCH bepaald worden.
We vinden:

1°) DE GROOTTE van de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ is gelijk aan $|v_{t_2} - v_{t_1}|$ $^{m}/sec.$

$$v_{t_2} = v_o - \frac{|F|}{m} t_2\ {}^{m}/sec.$$

$$v_{t_1} = v_o - \frac{|F|}{m} t_1\ {}^{m}/sec.$$

$$v_{t_2} - v_{t_1} = -\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1)\ {}^{m}/sec.$$

DE GROOTTE van de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ is dus gelijk aan $\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1)\ {}^{m}/sec.$

2°) DE RICHTING van de verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ wordt bepaald door het teken van het algebraische verschil $v_{t_2} - v_{t_1}$:

Is dit + , dan wijst de verschilvector in de + richting;
is dit − , dan wijst de verschilvector in de − richting.

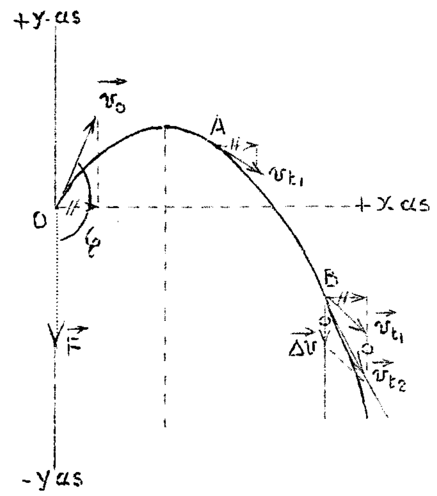
Omdat $t_2 > t_1$ is het teken van $-\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1)$ altijd − .

DE VERSCHILVECTOR $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ heeft dus dezelfde richting als de krachtvector $\vec{F}$.

CONCLUSIE VOOR GEVAL II.

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)}\ {}^{m}/sec.$$

→ <u>Oplossing voor Geval III.</u>



<u>De richting van de kracht $\vec{F}$ maakt een $\angle\,\varphi$ met de richting van $\vec{v}_o$; $\varphi \neq 0$, en $\neq 180°$.</u>
De baan van het massapunt is nu een in het vlak door $\vec{v}_o$ en $\vec{F}$ gelegen parabool, die in O raakt aan de vector $\vec{v}_o$ en waarvan de symmetrie-as // loopt aan- en gelijk gericht is met de krachtvector $\vec{F}$.
In nevenstaande figuur is deze parabool getekend.
De assen van het coördinatenstelsel zijn zò gekozen, dat de kracht $\vec{F}$ in de NEGATIEVE Y- RICHTING wijst.

Er werd gevraagd naar de verschilvector: $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$

Het bijzondere van de vectoren $\vec{v}_{t_2}$ en $\vec{v}_{t_1}$ is, dat hun X-componenten dezelfde grootte en richting hebben als $\vec{v}^x_o$.
Ontbinden we de vectoren $\vec{v}_{t_2}$ en $\vec{v}_{t_1}$ in hun X- en Y- componenten, dan volgt:

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = (\vec{v}^x_o + \vec{v}^y_{t_2}) - (\vec{v}^x_o + \vec{v}^y_{t_1}) = \vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1} \ {}^m/\text{sec.}$$

Dus:

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1} \ {}^m/\text{sec.}$$

<u>In woorden:</u> <u>De verschilvector $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ is in grootte en richting gelijk AAN DE VERSCHILVECTOR VAN DE Y-COMPONENTEN van de vectoren $\vec{v}_{t_2}$ en $\vec{v}_{t_1}$, dus gelijk aan</u> de verschilvector $\vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1}$.

<u>Welnu:</u> De grootte en richting van de verschilvector $\vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1}$ kan ALGEBRAÏSCH bepaald worden.
We vinden:

1°) <u>DE GROOTTE</u> van de verschilvector $\vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1}$ is gelijk aan $|v^y_{t_2} - v^y_{t_1}|$

De snelheidsfunctie in de Y-richting wordt gegeven door de vergelijking: $v^y_t = v^y_o - \frac{|F|}{m} t \ {}^m/\text{sec.}$

Dus:

$$v^y_{t_2} = v^y_o - \frac{|F|}{m} t_2 \ {}^m/\text{sec.}$$

$$v^y_{t_1} = v^y_o - \frac{|F|}{m} t_1 \ {}^m/\text{sec.}$$

$$v^y_{t_2} - v^y_{t_1} = -\frac{F}{m}(t_2 - t_1) \ {}^m/\text{sec.}$$

DE GROOTTE VAN DE VERSCHILVECTOR $\vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1}$ is dus gelijk aan: $\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1) \ {}^m/\text{sec.}$

DE GROOTTE VAN DE GEVRAAGDE VERSCHILVECTOR $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ IS DUS OOK GELIJK AAN $\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1) \ {}^m/\text{sec.}$

2°) DE RICHTING van de verschilvector $\vec{v}^y_{t_2} - \vec{v}^y_{t_1}$ wordt bepaald door HET ALGEBRAISCHE TEKEN van het verschil $v^y_{t_2} - v^y_{t_1}$: is dit teken

- \+ , dan is deze verschilvector gericht volgens de + y-as;
- \- , dan is deze verschilvector gericht volgens de - y-as;

Daar $t_2 > t_1$ is $-\frac{|F|}{m}(t_2 - t_1)$ altijd NEGATIEF.

DE VERSCHILVECTOR $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ HEEFT DUS DEZELFDE RICHTING ALS DE KRACHT $\vec{F}$.
DE GEVRAAGDE VERSCHILVECTOR $\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$ HEEFT DUS OOK DEZELFDE RICHTING ALS DE KRACHT $\vec{F}$

CONCLUSIE VOOR GEVAL III.

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)} \ ^m/sec.$$

Samenvatting van punt 1).

In het bovenstaande punt 1) hebben we de drie mogelijke gevallen beschouwd waarin een massapunt beweegt o.i.v. ÉÉN ENKELE KRACHT DIE CONSTANT BLIJFT IN GROOTTE EN RICHTING.

(Met nadruk wijzen we er op, dat er slechts ÉÉN ENKELE kracht mag WERKEN: in de beschouwde gevallen is er dus maar ÉÉN kracht die WERKT en ook maar EEN KRACHT die arbeid verricht. Deze arbeidsverrichting speelt in het onderhavige onderwerp echter geen rol).

In elk van deze gevallen vroegen we naar het vectorverschil

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1}$$

voor een willekeurig tijdsinterval van $t_1 \rightarrow t_2$ sec.; dus $t_2 > t_1$.

Welnu: in elk van deze gevallen vonden we voor dit vectorverschil DEZELFDE VERGELIJKING n.l.:

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)} \ ^m/sec.$$

Onder de gestelde voorwaarde dat er slechts ÉÉN kracht op het massapunt werkt die constant blijft in grootte en richting, is de snelheidsverandering t.o.v. het bewegingsvlak in het tijdsinterval van $t_1 \rightarrow t_2$ sec. dus altijd een vector die:

1^o) in grootte gelijk is aan $\frac{F}{m}(t_2 - t_1)$ $^m/sec.$, en

2^o) in richting samenvalt met de richting van $\vec{F}$.

EINDCONCLUSIE:

BEWEEGT EEN MASSAPUNT VAN m kg* O.I.V. EEN ENKELE KRACHT $\vec{F}$ DIE CONSTANT BLIJFT IN GROOTTE EN RICHTING, DAN IS DE RESULTERENDE SNELHEIDSVERANDERING t.o.v. HET BEWEGINGSVLAK IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t_1 \rightarrow t_2$ GELIJK AAN:

$$\vec{v}_{t_2} - \vec{v}_{t_1} = \overrightarrow{\frac{F}{m}(t_2 - t_1)} \ ^m/sec.$$

Punt 2) Twee nieuwe begrippen.

Vermenigvuldigen we beide leden van bovenstaande vergelijking met m, dus met de massa van het massapunt, dan volgt:

$$\overrightarrow{mv}_{t_2} - \overrightarrow{mv}_{t_1} = \overrightarrow{F(t_2 - t_1)} \ \frac{kg^* m}{sec} \qquad (1)$$

Deze vergelijking is voor ons aanleiding om TWEE NIEUWE BEGRIPPEN in te voeren:

I°) DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN EEN MASSAPUNT.

Definitie: Onder DE HOEVEELHEID BEWEGING van een massapunt met massa m kg^* en snelheid $\vec{v}$ $^m/sec.$ verstaat men

DE VECTOR DIE

IN GROOTTE gelijk is aan het PRODUCT $m.v \ \frac{kg^*m}{sec}$,

IN RICHTING samenvalt met de richting van vector $\vec{v}$.

Dus:

$$\boxed{\text{De HOEVEELHEID BEWEGING van een massapunt met massa m } kg^* \text{ en snelheid } \vec{v}\ ^m/sec.} = \overrightarrow{m\,v} \ \frac{kg^*\,m}{sec}$$

De dimensie van deze vector is inderdaad $\frac{kg^*m}{sec}$, immers:

$$[m.v] = kg^* \cdot \frac{m}{sec} = \frac{kg^*m}{sec}$$

II°) DE IMPULS VAN EEN CONSTANTE KRACHT IN EEN TIJDSINTERVAL.

Definitie: Onder DE IMPULS VAN EEN CONSTANTE KRACHT $\vec{F}$ IN EEN TIJDSINTERVAL Δt sec., verstaat men

DE VECTOR DIE

IN GROOTTE gelijk is aan het PRODUCT $F.\Delta t \ \frac{kg^*m}{sec}$,

IN RICHTING samenvalt met de richting van vector $\vec{F}$.

Dus:

$$\boxed{\text{De IMPULS van de constante kracht } \vec{F} \text{ in het tijdsinterval } \Delta t \text{ sec.}} = \overrightarrow{F.\,\Delta t} \ \frac{kg^*m}{sec}$$

De dimensie van deze vector is inderdaad $\frac{kg^*m}{sec}$, immers:

$$[F.\Delta t] = \frac{kg^*m}{sec^2} \cdot sec. = \frac{kg^*m}{sec}$$

In het linker lid van vergelijking (1) staat dus DE RESULTERENDE VERANDERING VAN DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t_1 \rightarrow t_2$ sec; in het rechter lid staat DE IMPULS VAN DE CONSTANTE KRACHT $\vec{F}$ IN (DE DUUR VAN) HET TIJDSINTERVAL $t_1 \rightarrow t_2$ sec.

Meestal verwisselt men de leden van deze vergelijking; er komt dan:

$$\boxed{\overrightarrow{F\,(t_2 - t_1)} = \overrightarrow{mv_{t_2}} - \overrightarrow{mv_{t_1}} \ \frac{kg^*m}{sec}} \qquad (2)$$

Met nadruk wijzen we er nogmaals op, dat deze vergelijking alleen geldig is in de uitdrukkelijke veronderstelling, dat

1°) $\vec{F}$ de ENIGE kracht is die op het massapunt WERKT, en

2°) $\vec{F}$ constant is in richting en grootte.

Natuurlijk is deze vergelijking ook geldig als $\vec{F}$ de resultante is van enige op het massapunt werkende krachten, MITS $\vec{F}$ dan maar constant is in grootte en richting.

NB. CONCLUSIE: Beweegt een massapunt o.i.v. EEN ENKELE kracht die constant blijft in grootte en richting, dan is

DE IMPULS VAN DIE KRACHT IN EEN TIJDSINTERVAL

gelijk aan

NB. DE RESULTERENDE VERANDERING VAN DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN DIT TIJDSINTERVAL.

Punt 3) We beschouwen nu het geval dat een massapunt m kg* beweegt onder invloed van EEN ENKELE KRACHT DIE NIET CONSTANT IS IN GROOTTE en/of RICHTING.

Geval I. Gegeven: Een massapunt m kg* beweegt o.i.v. EEN ENKELE kracht DIE MET SPRONGEN VERANDERT VAN GROOTTE en/of RICHTING:

van $t_1 \rightarrow t_2$ wordt de krachtvect. geg. door $\vec{F}_{t_1}$;
van $t_2 \rightarrow t_3$ " " " " " $\vec{F}_{t_2}$;
van $t_3 \rightarrow t_4$ " " " " " $\vec{F}_{t_3}$;

Gevr.: De somvector van de impulsvectoren van de kracht $\vec{F}$ in het tijdsinterval van $t_1 \rightarrow t_4$.

Oplossing: We passen formule (2) toe voor de achtereenvolgende tijdsintervallen $t_1 \rightarrow t_2$, $t_2 \rightarrow t_3$ en $t_3 \rightarrow t_4$s.

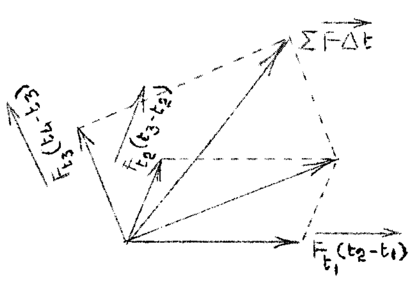
$$t_1 \rightarrow t_2: \ \overrightarrow{F_{t_1}(t_2-t_1)} = \overrightarrow{mv}_{t_2} - \overrightarrow{mv}_{t_1} \quad \frac{kg^*m}{sec}$$

$$t_2 \rightarrow t_3: \ \overrightarrow{F_{t_2}(t_3-t_2)} = \overrightarrow{mv}_{t_3} - \overrightarrow{mv}_{t_2} \quad \frac{kg^*m}{sec}$$

$$t_3 \rightarrow t_4: \ \overrightarrow{F_{t_3}(t_4-t_3)} = \overrightarrow{mv}_{t_4} - \overrightarrow{mv}_{t_3} \quad \frac{kg^*m}{sec} \quad +$$

$$\overrightarrow{\Sigma F_{ged.\Delta t} . \Delta t} = \overrightarrow{mv}_{t_4} - \overrightarrow{mv}_{t_1} \quad \frac{kg^*m}{sec} \quad (3)$$

Het linker lid van deze vergelijking is nu DE SOMVECTOR van de vectoren $\overrightarrow{F_{t_1}(t_2 - t_1)}$, $\overrightarrow{F_{t_2}(t_3 - t_2)}$ en $\overrightarrow{F_{t_3}(t_4 - t_3)}$



In nevenstaande figuur is deze somvector geconstrueerd; dit is de vector $\overrightarrow{\Sigma F \Delta t}$.

Deze somvector van ALLE impulsvectoren van de kracht $\vec{F}$ in het tijdsinterval van $t_1 \rightarrow t_4$, zullen we DE RESULTERENDE IMPULS VAN DE KRACHT $\vec{F}$ IN HET TIJDSINTERVAL VAN $t_1 \rightarrow t_4$ noemen.

Vergelijking (3) zegt dus, dat DE RESULTERENDE IMPULS van de kracht $\vec{F}$ in het tijdsinterval $t_1 \rightarrow t_4$ sec. gelijk is aan:

DE RESULTERENDE VERANDERING VAN DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN DIT TIJDSINTERVAL.

Opmerking:

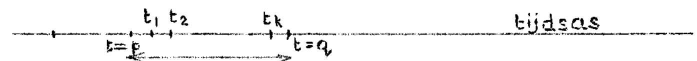
<u>Opmerking</u>: Als we de vector $\Sigma \overrightarrow{F\Delta t}$ werkelijk moeten berekenen, doen we dit volgens de methode die op blz. 128 en 129 uiteen gezet is: We ontbinden de impulsvectoren in hun X- en Y- componenten.

Dan is $\Sigma \overrightarrow{F\Delta t} = (\overrightarrow{\Sigma F_x \Delta t}) + (\overrightarrow{\Sigma F_y \Delta t})$

<u>Geval II.</u> <u>Gegeven</u>: Een massapunt m kg* beweegt o.i.v. ÉÉN ENKELE kracht $\overrightarrow{F_{(t)}}$ die EN IN GROOTTE EN IN RICHTING EEN FUNCTIE IS VAN DE TIJD.

<u>Gevr.</u>: De resulterende impuls van de kracht $\overrightarrow{F_{(t)}}$ in het tijdsinterval van t = p tot t = q sec. (q > p)

<u>Oplossing</u>:



beschouwde tijdsinterval.

We verdelen het beschouwde tijdsinterval in infinitesimaal kleine tijdsdelen die zo klein zijn dat de kracht $\overrightarrow{F_{(t)}}$ gedurende elk van deze tijdsdeeltjes als constant van grootte en richting kan beschouwd worden.

Dan volgt:

$$p \rightarrow t_1: \quad \overrightarrow{F_p(t_1 - p)} = \overrightarrow{mv_{t_1}} - \overrightarrow{mv_p} \quad \frac{kg^* m}{sec}$$

$$t_1 \rightarrow t_2: \quad \overrightarrow{F_{t_1}(t_2 - t_1)} = \overrightarrow{mv_{t_2}} - \overrightarrow{mv_{t_1}} \quad \frac{kg^* m}{sec}$$

- -

$$t_{k-1} \rightarrow t_k: \quad \overrightarrow{F_{k-1}(t_k - t_{k-1})} = \overrightarrow{mv_{t_k}} - \overrightarrow{mv_{t_{k-1}}} \quad \frac{kg^* m}{sec}$$

$$t_k \rightarrow q: \quad \overrightarrow{F_k \ (t_q - t_k)} = \overrightarrow{mv_q} - \overrightarrow{mv_{t_k}} \quad \frac{kg^* m}{sec} \quad +$$

$$\int_p^q \overrightarrow{F_{(t)} dt} = \overrightarrow{mv_q} - \overrightarrow{mv_p} \quad \frac{kg^* m}{sec} \tag{4}$$

Deze vergelijking zegt dus, dat

> DE RESULTERENDE IMPULS
> van de kracht $\overrightarrow{F(t)}$ in het tijdsinterval van p ⟶ q sec. gelijk is aan:
> DE RESULTERENDE V E R A N D E R I N G VAN DE HOEVEELHEID BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN DIT TIJDSINTERVAL.

<u>Opmerkingen</u>: a) Volgens de op blz. 128 en 129 behandelde methode om de somvector te bepalen is:

$$\int_p^q \overrightarrow{F(t)dt} = \overrightarrow{\left(\int_p^q F^x_{(t)} dt\right)} + \overrightarrow{\left(\int_p^q F^y_{(t)} dt\right)} \quad \frac{kg^* m}{sec}$$

b) Bovenstaande bewijsvoering is onverkort geldig voor het geval dat de kracht $\overrightarrow{F(t)}$ op ieder ogenblik de resultante is van meerdere veranderlijke, op het massapunt werkende krachten.

In dat geval is $\overrightarrow{\int_p^q F(t)dt}$ de RESULTERENDE IMPULS VAN ALLE OP HET MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN IN HET TIJDSINTERVAL VAN p ⟶ q sec.

EINDCONCLUSIE.

EINDCONCLUSIE VAN DEEL I van § 7:

DE RESULTERENDE IMPULS
VAN ALLE OP EEN MASSAPUNT WERKENDE KRACHTEN
IN EEN GEGEVEN TIJDSINTERVAL
is gelijk aan
DE RESULTERENDE VERANDERING VAN DE HOEVEELHEID
BEWEGING VAN HET MASSAPUNT IN DIT TIJDSINTERVAL.

Dus:

$$\int_{\text{begin}}^{\text{einde}} \overrightarrow{F(t)}dt = \overrightarrow{mv}_{\text{einde}} - \overrightarrow{mv}_{\text{begin}} \quad \frac{kg^*m}{sec}$$

waarin $\overrightarrow{F(t)}$ de resultante is van ALLE op het massapunt werkende krachten als functie van de tijd.

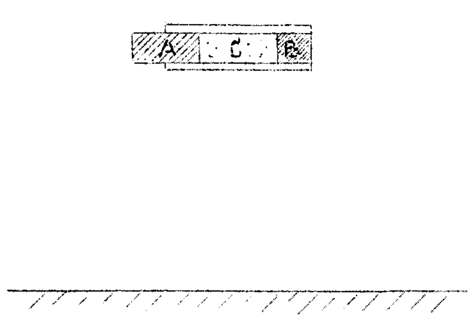
Opmerking: Voor het geval DAT DE BEWEGING RECHTLIJNIG IS, en de kracht $\overrightarrow{F(t)}$ dus ook langs deze rechte werkt, kunnen we bovenstaande vergelijking ALGEBRAÏSCH afleiden:

$$\int_{\text{begin}}^{\text{einde}} F(t)dt = \int_{\text{begin}}^{\text{einde}} m.\frac{dv}{dt}.dt = \int_{\text{begin}}^{\text{einde}} mdv = mv_{\text{einde}} - mv_{\text{begin}}$$

Voor v_{einde} en v_{begin} moeten dan wel DE ALGEBRAÏSCHE WAARDEN van de eind-resp. beginsnelheid worden ingevuld.

Deel II van § 7. Problemen waarbij de impuls van een kracht een rol speelt.

Punt 1) Het afschieten van een kogel.



Gegeven: Op enige hoogte boven de grond bevindt zich een hol buisje in horizontale stand. De openingen van het buisje worden afgesloten door twee stoppen A en B die even ver in het buisje steken (zie fig.). De massa van stop A is groter dan de massa van stop B. De ruimte C tussen de stoppen is opgevuld met een springstof die tot ontploffing wordt gebracht. Daardoor bewegen de stoppen naar buiten. Verondersteld wordt dat ze van het buisje dezelfde wrijvingsweerstand ondervinden en het buisje dus op hetzelfde moment verlaten.

Gevraagd: a) Wat valt er te zeggen over de snelheden waarmee de stoppen het buisje verlaten?

Antwoord: De springstof werkt op beide stoppen even lang en met dezelfde kracht. Daar de stoppen van het buisje ook dezelfde wrijvingsweerstand ondervinden IS DE RESULTERENDE IMPULS VAN DE OP STOP A WERKENDE KRACHTEN GELIJK AAN DE RESULTERENDE IMPULS VAN DE OP STOP B WERKENDE KRACHTEN.
Daar de stoppen aanvankelijk in rust waren verlaten ze het buisje dus MET DEZELFDE HOEVEELHEID BEWEGING.

Dus: $m_A.v_A = m_B.v_B \quad \frac{kg^*m}{sec.}$

Daar $m_A > m_B$ moet $v_A < v_B$.

Gevraagd: b) Wat valt er te zeggen over de tijdsduren die de stoppen nodig hebben om de grond te bereiken?

Antwoord: Na het verlaten van het buisje beschrijft elke stop een kogelbaan met horizontale beginsnelheid.
In de Y-richting hebben deze bewegingen DEZELFDE PLAATSFUNCTIE: $Y = -\frac{1}{2}|g|t^2$ m.

De stoppen zullen dus GELIJKTIJDIG de grond bereiken.

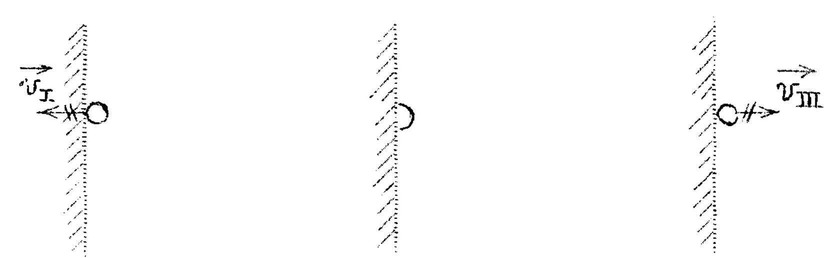
Gevraagd: c) Veronderstel, dat stop A onwrikbaar met het buisje verbonden is, wat zal er dan gebeuren na de ontploffing van de springstof?

Antwoord: Dan krijgt het geheel van buisje en stop A een hoeveelheid beweging naar links, die gelijk is aan de hoeveelheid beweging waarmee stop B het buisje verlaat.

Gevraagd: d) Waarom moet de kolf van een geweer zwaar zijn?

Antwoord: (zelf)

Punt 2) De volkomen veerkrachtige botsing van een molecuul (massapunt) tegen een starre wand.



In bovenstaande figuren wordt het geval beschouwd dat een massapunt van m kg* een starre wand loodrecht treft, volkomen veerkrachtig botst en daarna de wand weer verlaat.
We veronderstellen dat deze botsing zo kort duurt, dat de impuls van de zwaartekracht tijdens het contact van het massapunt met de wand kan verwaarloosd worden, zodat het massapunt de wand weer LOODRECHT zal verlaten.
De veronderstelling dat de botsing volkomen veerkrachtig is houdt in, dat het totale A.v.B. vòòr de botsing gelijk is aan het totale A.v.B. nà de botsing. Daar de wand STAR is, neemt deze geen A.v.B. van het botsende massapunt over. Het A.v.B. van het botsende massapunt moet dus vòòr de botsing dezelfde waarde hebben als nà de botsing, dus:

$$|v_I| = |v_{III}| = |v| \ \text{m/sec.}$$

In het tijdsinterval van I→III heeft er een wederkerige krachtwerking plaats tussen de wand en het botsende massapunt. In dit tijdsinterval oefent de wand voortdurend een NAAR RECHTS GERICHTE KRACHT uit op het massapunt. Deze kracht is dus constant IN RICHTING; ze is echter NIET CONSTANT IN GROOTTE. In het tijdsinterval van I→II neemt deze kracht toe van nul tot een maximum en neemt in het tijdsinterval van II→III weer af van deze maximale waarde tot nul.

Gevraagd: a) De resulterende impuls van de kracht die de wand op het massapunt uitoefent in het tijdsinterval van I→III

Antwoord:

Antwoord:

$$\int_{I}^{III} \overrightarrow{F(t)dt} = \overrightarrow{mv_{III}} - \overrightarrow{mv_I} \quad \frac{kg^*m}{sec}$$

Daar de vectoren $\overrightarrow{F}(t)$, $\overrightarrow{v}_{III}$ en $\overrightarrow{v}_I$ langs dezelfde lijn werken, kunnen we de verschilvector $\overrightarrow{mv}_{III} - \overrightarrow{mv}_I$ ALGEBRAÏSCH bepalen.
Rekenen we de naar rechts gerichte vectoren + en de naar links gerichte - , dan volgt:

$$+\int_{I}^{II} F(t)dt = + m|v_{III}| - (-m|v_I|) \quad \frac{kg^*m}{sec}$$
$$= + m|v| + m|v| \quad \frac{kg^*m}{sec}$$
$$= + 2\, m|v| \quad \frac{kg^*m}{sec}$$

Conclusie:
De resulterende impuls van de kracht die de starre wand in het tijdsinterval van de botsing op het botsende massapunt uitoefent is een vector die NAAR RECHTS GERICHT IS, en
IN GROOTTE gelijk is aan $2m|v| \ \frac{kg^*m}{sec}$

Gevraagd: b) Hoe ervaart de starre wand deze botsing?

Antwoord: Gedurende het tijdsinterval dat het massapunt in contact is met de wand oefent de starre wand dus een naar rechts gerichte kracht uit OP het massapunt waarvan de resulterende impuls gelijk is aan

$$+ 2m|v| \ \frac{kg^*m}{sec} .$$

VOLGENS DE WET VAN ACTIE EN REACTIE OEFENT HET MASSAPUNT GEDURENDE DIT BOTSINGSCONTACT OP DE STARRE WAND EEN REACTIE-KRACHT UIT DIE OP IEDER OGENBLIK GELIJK EN TEGENGESTELD IS AAN DE MOMENTELE KRACHT DIE DE WAND OP HET MASSAPUNT UITOEFENT.

Conclusie: De starre wand ervaart deze botsing als een NAAR LINKS GERICHTE KRACHTWERKING en wel zò dat

$$\underset{\substack{\text{m.pt op}\\ \text{wand}}}{\overrightarrow{F}(t)} = - \underset{\substack{\text{wand op}\\ \text{m.pt.}}}{\overrightarrow{F}(t)}$$

Gevraagd: c) De grootte en richting van de resulterende impuls die de starre wand ondervindt van het botsende massapunt.

Antwoord: Daar

$$\underset{\substack{\text{van m.pt.}\\ \text{OP de wand}}}{\overrightarrow{F}(t)} = - \underset{\substack{\text{van wand}\\ \text{op m.pt.}}}{\overrightarrow{F}(t)}$$

is

$$\int_{I}^{III} \underset{\substack{\text{v.m.pt.}\\ \text{op wand}}}{\overrightarrow{F(t)dt}} = - \int_{I}^{III} \underset{\substack{\text{v. wand}\\ \text{op m.pt.}}}{\overrightarrow{F(t)dt}} = - 2m|v| \ \frac{kg^*m}{sec}$$

Conclusie: De resulterende impuls die de starre wand ondervindt van het botsende massapunt is een vector die:
LOODRECHT NAAR DE WAND TOE GERICHT IS, en
IN GROOTTE gelijk is aan:

$$2m|v| \ \frac{kg^*m}{sec}$$

Punt 3) De SPANNING VAN EEN AFGESLOTEN HOEVEELHEID VAN EEN IDEAAL GAS.

NB. a) Inleiding. Een IDEAAL GAS is een DENKBEELDIG GAS waarvan:

1°) de moleculen VOLKOMEN VEERKRACHTIGE MASSAPUNTEN zijn, die

2°) GEEN KRACHTEN OP ELKAAR UITOEFENEN.

De moleculen van een ideaal gas hebben dus WEL MASSA, maar hun privé-volume is gelijk aan het volume van een MEETKUNDIG PUNT, dus nul. Hieruit blijkt, dat een ideaal gas in de werkelijkheid NIET BESTAANBAAR IS.

Toch is het voor ons van belang om de gedragingen van de ideale gassen te bestuderen, want het zal ons later blijken, dat deze gedragingen BIJ BENADERING hetzelfde zijn als de gedragingen van DE WERKELIJKE GASSEN IN VERDUNDE TOESTAND (d.w.z. als de gemiddelde afstand tussen de gasmoleculen zeer groot is t.o.v. de afmetingen der moleculen).
De formules die voor een ideaal gas EXACT gelden, gelden dus voor een verdund werkelijk gas BIJ BENADERING.

In het onderhavige punt 3) gaan we nu een formule afleiden voor de druk van een afgesloten hoeveelheid van een ideaal gas. In de hogere natuurkunde wordt deze formule streng wiskundig bewezen. Onze wiskunde kennis schiet echter te kort om deze strenge bewijsvoering te kunnen volgen.
Daarom moeten wij genoegen nemen met een sterk vereenvoudigde afleiding. De vereenvoudiging bestaat hierin dat we de moleculen van het gas niet "lukraak" door elkaar laten vliegen maar hen een zeer geordende beweging voorschrijven. (zie beneden)

b) We beschouwen nu een afgesloten hoeveelheid van een ideaal gas.

Stelling:

$$\boxed{P_{gas} = \frac{1}{3}\, L\, m\overline{v^2} \quad \frac{N}{m^2}}$$

Hierin is: P_{gas} de druk of spanning van het gas in $\frac{N}{m^2}$

L het aantal gasmoleculen PER M^3.

m de massa PER MOLECUUL v.h. GAS in kg*

$\overline{v^2}$ het gemiddelde van de kwadraten van de snelheden van de moleculen.

Opmerking: Met nadruk wijzen we er op, dat er in de formule staat $\overline{v^2}$ en niet $(\overline{v})^2$; het gemiddelde van de kwadraten van een aantal getallen is n.l. NIET gelijk aan het kwadraat van het gemiddelde van deze getallen.

Voorbeeld: Van de getallen 1, 2, 3 en 4 is het gemiddelde van de kwadraten:

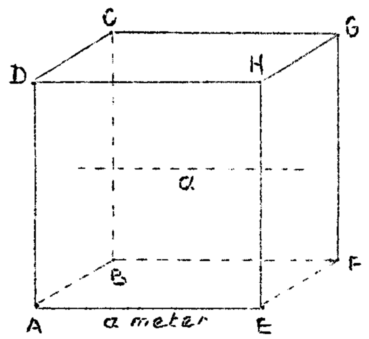
$$\frac{1+4+9+16}{4} = \frac{30}{4} = \underline{7{,}5}$$

en het kwadraat van het gemiddelde:

$$\left(\frac{1+2+3+4}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = \underline{6{,}25}$$

Bewijs van de formule $P = \frac{1}{3} L m\overline{v^2} \frac{N}{m^2}$

Deel I van het bewijs.



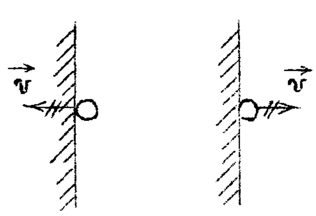
We beschouwen een kubusvormig vat met starre wanden waarvan de ribben een lengte hebben van a meter.
In dit vat bevinden zich N moleculen van een IDEAAL GAS.

WE NEMEN AAN DAT DEZE MOLECULEN GELIJKMATIG OVER DE INHOUD VAN DE KUBUS VERDEELD ZIJN EN ZICH "GEIDEALISEERD" BEWEGEN:

$\frac{1}{3}$N mol.beweegt // AE met snelh. v $^m/sec$;
$\frac{1}{3}$N " " // AD " " v $^m/sec$;
$\frac{1}{3}$N " " // AB " " v $^m/sec$;

Botsingen tussen de moleculen onderling achten we uitgesloten.
WE BESCHOUWEN NU DE $\frac{1}{3}$ N MOLECULEN DIE EVENWIJDIG AAN DE RIBBE AE BEWEGEN.
Elk van deze moleculen vliegt dus met constante snelheid v $^m/sec$. heen en weer tussen de overstaande zijwanden ABCD en EFGH langs een vaste rechte die loodrecht staat op deze wanden en botst dus met regelmatige tussenposen tegen deze wanden.

Deel II van het bewijs: WE BEREKENEN DE IMPULS PER MOLECUUL PER BOTSING TEGEN DE WAND ABCD.



De impuls per molecuul per botsing tegen de starre wand ABCD is een vector die:

1°) LOODRECHT OP ABCD staat en naar buiten gericht is,

2°) IN GROOTTE gelijk is aan:
$$2\ m|v|\ \frac{kg^*m}{sec} \quad \text{(zie punt 2)}$$

Deel III van het bewijs: WE BEREKENEN DE IMPULS PER MOLECUUL PER SECONDE TEGEN DE STARRE WAND ABCD.

We beschouwen een molecuul dat heen en weer beweegt tussen de wanden ABCD en EFGH.
Hoe vaak botst dit molecuul PER SECONDE tegen de wand ABCD?

Antwoord: Zo vaak het molecuul de afstand 2a meter aflegt botst het EEN KEER tegen de wand ABCD.
Welnu: het molecuul legt de afstand 2a meter af in $\frac{2a}{v}$ seconden. (De tijdsduur van een botsing tegen de starre wand wordt hierbij verwaarloosd).
Het botst dus $\frac{v}{2a}$ keer per seconde tegen ABCD.

Concl.: PER SECONDE botst het molecuul $\frac{v}{2a}$ keer tegen ABCD.

Opmerking. De dimensie van $\frac{v}{2a}$ is $\frac{^m/sec}{meter} = \frac{1}{sec}$.
$\frac{v}{2a}$ heeft dus de dimensie van een frequentie.

Hoe groot is dus de impuls PER MOLECUUL PER SECONDE tegen ABCD?

Antwoord: De impuls per molecuul per botsing = $2mv \frac{kg^*m}{sec}$
Het aantal botsingen per molecuul per seconde $= \frac{v}{2a} \frac{1}{sec}$. De impuls per mol. per sec. tegen ABCD is dus:
$$2mv \times \frac{v}{2a} = \frac{mv^2}{a} \quad \frac{kg^*m}{sec^2}$$

Conclusie:

DE IMPULS PER MOLEC. PER SEC. tegen ABCD $= \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$

Opmerking: De impuls per molecuul per seconde tegen ABCD heeft dus de dimensie van EEN KRACHT (Newton)!

Deel IV van het bewijs.

WE BEREKENEN DE TOTALE IMPULS PER SECONDE TEGEN DE STARRE WAND ABCD.

Er zijn $\frac{1}{3}$ moleculen die met de eenparige snelheid van v m/s tussen de wanden ABCD en EFGH heen en weer bewegen.

De impuls per molec. per sec. tegen ABCD = $\frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$.

De TOTALE IMPULS die deze $\frac{1}{3}$ N moleculen PER SECONDE aan de wand ABCD geven is dus: $\frac{1}{3} N. \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$

Conclusie:

DE TOTALE IMPULS PER SEC. TEGEN ABCD $= \frac{1}{3}N \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$

Opmerking. De totale impuls per sec. tegen ABCD heeft dus ook de dimensie van EEN KRACHT (Newton)!

Deel V van het bewijs.

HOE ERVAART DE STARRE WAND ABCD DE BOTSINGEN VAN DEZE $\frac{1}{3}$ N MOLECULEN?

Daar deze $\frac{1}{3}$ N moleculen gelijkmatig over de ruimte van de kubus verdeeld zijn, ONTVANGT DE WAND IN GELIJKE TIJDSDELEN EENZELFDE AANTAL STOTEN, DUS KRIJGT DE WAND ABCD van de botsende moleculen IN GELIJKE TIJDSDELEN OOK TOTALE IMPULSEN VAN GELIJKE GROOTTEN.

Welnu: Een CONSTANTE, op de wand ABCD werkende kracht $\vec{F}$ Newton, zou de wand ABCD in gelijke tijdsdelen ook impulsen van gelijke grootten geven. Immers, de impuls door de kracht $\vec{F}$ in een tijdsinterval Δt sec. zou dan gelijk zijn aan: $\overrightarrow{F.\Delta t} \frac{kg^* m}{sec}$

CONCLUSIE: De starre wand ABCD ervaart de gelijkmatige opeenvolging van de botsingen van de beschouwde $\frac{1}{3}$ N moleculen ALS DE WERKING VAN EEN CONSTANTE KRACHT $\vec{F}$ Newton DIE $\perp$ ABCD NAAR BUITEN GERICHT IS.

NB. HOE GROOT IS DEZE CONSTANTE KRACHT $\vec{F}$?

Antwoord: De impuls van deze constante kracht $\vec{F}$ in Δt sec. is gelijk aan $\overrightarrow{F\Delta t} \frac{kg^* m}{sec}$

DE IMPULS PER SECONDE van de kracht $\vec{F}$ is dus in grootte gelijk aan:

$$\frac{F\Delta t}{\Delta t} \frac{kg^* m}{sec^2} = F \frac{kg^* m}{sec^2}$$

Welnu:

$$\boxed{\text{DE TOT. IMPULS PER SEC. van de molec. tegen ABCD}} = \frac{1}{3}N \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt dat:

$$F = \frac{1}{3} N \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$$

<u>CONCLUSIE:</u> DE STARRE WAND ABCD ERVAART DE GELIJKMATIGE OPEENVOLGING VAN DE BOTSINGEN VAN DE BESCHOUWDE $\frac{1}{3}$N MOLECULEN ALS DE WERKING VAN EEN CONSTANTE KRACHT $\vec{F}$ DIE <u>IN GROOTTE gelijk is aan</u> $F = \frac{1}{3} N \frac{mv^2}{a} \frac{kg^* m}{sec^2}$, <u>EN ⊥ ABCD NAAR BUITEN GERICHT IS.</u>

Daar alleen deze $\frac{1}{3}$ N moleculen in aanraking komen met de wand ABCD is deze kracht $\vec{F}$ tevens de kracht die de wand ABCD ondervindt van ALLE moleculen in de kubus.

<u>Deel VI van het bewijs:</u>

<u>WE BEREKENEN DE KRACHT DIE DE MOLECULEN IN DE KUBUS PER M^2 VAN DE WAND UITOEFENEN = DE DRUK P.</u>

De kracht op de wand ABCD is in grootte gelijk aan:

$$F = \frac{1}{3} N \frac{mv^2}{a} \text{ Newton.}$$

Welnu: Het oppervlak van de wand ABCD = a^2 (meter)^2.

De kracht PER M^2 is dus:

$$P = \frac{F}{a^2} = \frac{1}{3} N \frac{mv^2}{a^3} \frac{\text{Newton}}{m^2}$$

Hierin is N het aantal moleculen in de kubus; a^3 is de inhoud van de kubus.

$\frac{N}{a^3}$ is dus gelijk aan het aantal moleculen PER (meter)^3. Dit aantal duidt men aan met de hoofdletter L.

Dus:

$$\boxed{P = \frac{1}{3} L \, mv^2 \, \frac{\text{Newton}}{m^2}}$$

<u>Deel VII van het bewijs:</u>

<u>Toevoeging.</u>

Bovenstaande formule is exact voor een ideaal gas waarvan de moleculen de voorgeschreven streng geordende bewegingen uitvoeren.
In de hogere natuurkunde leidt men de formule voor de druk van een ideaal gas af in de veronderstelling dat de moleculen luk-raak door elkaar bewegen en daarbij onderling verschillende snelheden hebben tussen "nul" en "oneindig" overeenkomstig de wetten der kansberekening.
Men vindt dan: $P = \frac{1}{3} L \, m\overline{v^2} \, \frac{N}{m^2}$
Deze formule is dus "op een streepje na" identiek met de formule die wij gevonden hebben, n.l. het teken "gemiddeld" boven v^2.
We zullen ons in de toekomst houden aan deze off. formule.

<u>EINDCONCLUSIE:</u> DE DRUK OF SPANNING VAN EEN AFGESLOTEN HOEVEELHEID VAN EEN IDEAAL GAS IS GELIJK AAN $P = \frac{1}{3} L \, m\overline{v^2} \, \frac{N}{m^2}$